材料试验和质量分析的数学方法

王永逵　陆吉祥　编

中国铁道出版社

内 容 简 介

本书主要内容涉及建筑及其他材料产品质量分析、试验研究及工艺改革的数学方法等方面。包括随机事件和概率运算、随机变量及其分布、抽样和估计、假设检验、工序能力和质量控制、方差分析、正交设计、回归分析、回归正交设计等。文字通俗，说理清楚，叙述简明，联系实际，举例丰富，方法步骤明确，便于自学和应用。

本书可作为从事材料试验研究、工艺改革及产品质量分析工作者的工具书，也可作为工科院校建材、土建专业应用数学的教科书或教学参考书。

材料试验和质量分析的数学方法

王永逵　陆吉祥　编

*

中国铁道出版社出版、发行

（北京市东单三条14号）

责任编辑　刘启山　封面设计　王毓平

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 [illegible] 毫米 [illegible] 印张：15.5　字数：381 千

1990年 6月　第1版　第1次印刷

印数：0001—2,000册

ISBN7-113-00718-X/TU·163　定价：6.50元

前　言

在建筑材料试验研究、工艺改革及产品质量分析中，数据是分析问题和解决问题的基本依据，但是与数据分析最有关系的数理统计方法使许多初学者觉得有一定困难。本书编者从使用出发，本着通俗易懂的原则，紧密结合建筑材料试验研究，工艺改革及产品质量分析中的实际问题，深入浅出地介绍了各种数理统计方法的应用。

本书有三个特点：一是以建材、土建工程中从事材料试验、工艺配方及产品质量管理的工作者所熟悉的实例入手，提出问题，引进概念，介绍数学方法，说理清楚，这在一定程度上减少了数理统计方法的抽象性，增加了实际感，便于自学和入门；二是各种数理统计方法的介绍都有适量的实例相配合，并尽量具体、详尽地阐述运用这些方法分析和解决问题的过程，即使有的读者开始对本书的某些概念还不甚理解，通过对实例的分析也能掌握这些方法，并能用以解决实际问题；三是实例丰富，共有各种实例134个（例题90个，习题44个），它们涉及水泥、混凝土、钢材、木材、砖、陶瓷、大理石、塑料、橡胶、涂料、油漆、炸药等十多种材料。这些实例除出现在前面三章中的一部分比较简单外，还有相当一部分是近年来国内从事建筑材料试验、工艺配方及产品质量分析的管理人员和工程技术人员所讨论的课题。学习这些实例不仅可以加深对各种数学方法的理解和运用，而且还可以了解建材，土建行业中曾经探讨和正在探讨的各种问题，有利于开阔眼界，提高分析能力，指导自己的工作。

本书是编者在1985年编写的讲义《材料试验和质量管理的数学原理》基础上重新整理、修改充实而成的，该讲义曾经多次在各种类型的场合中使用过。根据数次使用情况和部分读者的建议，这次编写时，对原讲义做了重大修改，力求作到文字通俗，说理清楚，叙述简明，联系实际，方法明确，便于自学和使用。

在本书编写过程中，曾得到郭成举、谈汉生、风凌云、徐家保、张忠辅、马自立等专家学者的鼓励与帮助，以及杜宗儒、周暮、傅作钊等有关领导同志的关怀与支持；编写中引用了有关作者和单位在专著和研究报告中的宝贵资料；本书由陈万清、杨有海同志绘图。在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，难免有不妥之处，恳请读者批评、指正。

编　者

1987年8月

目　　录

第一章　随机事件和概率运算

在材料及其制品的质量分析中，许多现象都具有一定的偶然性，也就是说，在相同的生产或试验条件下，得到的结果并不是完全一样的。然而，在进行大量的观察后人们发现，这种具有偶然性的现象都呈现一定的规律性。研究这种规律性，无疑对指导生产和从事试验研究是十分重要的。概率论和数理统计就是研究这种偶然现象规律性的重要数学工具。目前，概率论和数理统计的方法在建材、土建工程的各个方面，从产品设计到施工质量管理，从材料检测、试验到性能规律性的研究等等，都正在得到愈来愈广泛的应用。

第一节　排列、组合

排列、组合是学习概率论与数理统计的基础，也是在解决实际问题中经常用到的一种基本的数学方法。

一、两个基本原理

1. 加法原理　如果完成某件事有 k 种方式，第 1 种方式中有n_1个方法，第 2 种方式中有n_2个方法，……第 k 种方式中有n_k个方法，而不论用哪一个方法都能完成这件事情，则完成这件事共有

$$n_1+n_2+\cdots+n_k \tag{1-1}$$

个不同的方法。

例1.1.1　某预制厂用大同、邯郸、永登等三种牌号的425号普通硅酸盐水泥，用大同、邯郸等两种牌号的525号矿碴水泥，在相同的条件下生产一批混凝土预制板，试问共有多少种不同的水泥选用方法？

解　在相同的生产条件下，用每一种牌号的水泥都能制成混凝土预制板，于是三种牌号的425号水泥有 3 种不同的选用方法，两种牌号的525号水泥有 2 种不同的选用方法，总共有 3 + 2 = 5 种不同的水泥选用方法。

2. 乘法原理　如果完成某件事要分k个步骤，完成第 1 步有n_1个方法，完成第 2 步有n_2个方法，……完成第k步有n_k个方法，各个步骤依次连续完成，该事才算完成，则完成这件事共有

$$n_1n_2\cdots n_k \tag{1-2}$$

个不同的方法。

例1.1.2　在研究钢纤维的纤维参数对水泥砂浆抗折强度的试验中，钢纤维的长度取20mm、30mm和40mm三种，钢纤维的体积掺量取1.5%、2.0%和3.0%三种，试问共有多少种不同的试验条件？

解　钢纤维的长度有 3 种不同的取法，而无论取哪一种的钢纤维长度后，可供选择的钢纤维体积掺量又都是 3 种，即

$$\text{钢纤维长度20mm}\begin{cases}\text{钢纤维体积掺量1.5\%}\\\text{钢纤维体积掺量2.0\%}\\\text{钢纤维体积掺量3.0\%}\end{cases}$$

$$\text{钢纤维长度30mm}\begin{cases}\text{钢纤维体积掺量1.5\%}\\\text{钢纤维体积掺量2.0\%}\\\text{钢纤维体积掺量3.0\%}\end{cases}$$

$$\text{钢纤维长度40mm}\begin{cases}\text{钢纤维体积掺量1.5\%}\\\text{钢纤维体积掺量2.0\%}\\\text{钢纤维体积掺量3.0\%}\end{cases}$$

它们中的每一种不同的搭配都是一种试验条件，因此，共有$3\times3=9$种不同的试验条件。这9种不同的试验条件是：

① 钢纤维长度20mm，钢纤维体积掺量1.5%；
② 钢纤维长度20mm，钢纤维体积掺量2.0%；
③ 钢纤维长度20mm，钢纤维体积掺量3.0%；
④ 钢纤维长度30mm，钢纤维体积掺量1.5%；
⑤ 钢纤维长度30mm，钢纤维体积掺量2.0%；
⑥ 钢纤维长度30mm，钢纤维体积掺量3.0%；
⑦ 钢纤维长度40mm，钢纤维体积掺量1.5%；
⑧ 钢纤维长度40mm，钢纤维体积掺量2.0%；
⑨ 钢纤维长度40mm，钢纤维体积掺量3.0%。

二、排　　列

1. 定义：从n个不同的元素中每次取出m（$m\leqslant n$）个，按照一定顺序排成一列，称做从n个不同的元素中，每次取出m个元素的排列。

当$m<n$时，称做选排列，排列种数记为P_n^m；

当$m=n$时，称做全排列，排列种数记为P_n。

由定义知，排列的特点是与元素的排列顺序有关。例如，如果一条自动生产线由红、黄、绿三种色灯中的两种灯，按上下位置排列组成信号进行控制，这时，共有以下6种不同的信号：

红　绿　红　黄　绿　黄
绿　红　黄　红　黄　绿

虽然信号红绿与绿红（红黄与黄红，绿黄和黄绿）都是由同样的两种色灯组成，但因排列的顺序不同，所以是两种不同的信号，而不是一种信号。

2. 排列种数的计算公式

选排列种数的计算公式为

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1) \tag{1—3}$$

全排列种数的计算公式为

$$P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n! \tag{1—4}$$

例1.1.3 某厂新建的一座料库共有7个不同的房间。现有5种不同规格的材料任意存放在7个房间中，每个房间只允许存放一种，问共有多少种不同的安排房间的方法？

解 将 7 个不同的房间看成 7 个不同元素，于是把 5 种不同规格的材料任意存放在 7 个房间中，每个房间只允许存放一种，共有多少种不同的安排房间的方法，可归结为从 7 个不同的元素中每次取出 5 个元素，共有多少种不同的取法。由式（1—3）得

$$P_7^5=7\times6\times5\times4\times3=2520$$

故共有2520种不同的安排房间的方法。

本例中如有 7 种不同规格的材料，则按排房间的方法有

$$P_7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$$

即共有5040种不同的安排房间的方法。

三、组　　合

1. 定义：从n个不同的元素中每次取出$m(m\leqslant n)$个，不管怎样的顺序并成一组，称做从n个不同的元素中，每次取出m个元素的组合。组合种数记为C_n^m。

由定义知，组合的特点是与元素的排列顺序无关。例如，从红、黄、绿三种涂料原色中，任意取出两种，按一定的比例（如 1∶1）配制成一种新的颜色涂料。由于红绿（红黄、绿黄）两种涂料和绿红（黄红、黄绿）两种涂料配制的新涂料是同一种颜色涂料，与配制时的顺序没有关系，所以这三种涂料共能配制成 3 种不同的新颜色涂料，而不是 6 种不同的新颜色涂料。

2. 组合种数的计算公式

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!} \qquad (1-5)$$

组合的一个性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m} \qquad (1-6)$$

当m较大时，利用上式可减少计算C_n^m的工作量，例如

$$C_{10}^9=C_{10}^{10-9}=C_{10}^1=10$$

例1.1.4 有混凝土檩条20根，其中一等品12根，二等品 5 根，不合格品 3 根。从中任取 5 根，试问：

（1）共有多少种不同的取法？

（2）恰有 1 根是不合格品，有多少种不同取法？

（3）恰有一等品 2 根，二等品 2 根，不合格品 1 根，有多少种不同取法？

（4）至少有 1 根是不合格品，有多少种不同取法？

解 （1）混凝土檩条的质量检验与抽检到檩条时的顺序没有关系，故不同取法有

$$C_{20}^5=\frac{20\times19\times18\times17\times16}{5\times4\times3\times2\times1}=15504\text{（种）}$$

（2）抽取的 5 根檩条中，如果恰有 1 根是不合格品，则其余 4 根恰是合格品（即一等品和二等品）。前者的不同取法有C_3^1种，后者的不同取法有C_{17}^4种，于是符合条件的取法有

$$C_3^1\cdot C_{17}^4=3\times\frac{17\times16\times15\times14}{4\times3\times2\times1}=7140\text{（种）}$$

（3）抽取的 5 根檩条中，恰有一等品 2 根的取法有C_{12}^2种，恰有二等品 2 根的取法有C_5^2种，恰有不合格品 1 根的取法有C_3^1种，故符合条件的取法有

$$C_{12}^{2}C_{5}^{2}\cdot C_{3}^{1}=\frac{12\times 11}{2}\times\frac{5\times 4}{2}\times 3=1980\ (\text{种})$$

（4）抽取的5根檩条中，至少有1根是不合格品的情况包括三种情形：恰有1根不合格品，恰有2根不合格品和恰有3根不合格品（产品中只有3根不合格品）。因此符合条件的取法有

$$C_{3}^{1}\cdot C_{17}^{4}+C_{3}^{2}\cdot C_{17}^{3}+C_{3}^{3}\cdot C_{17}^{2}=9316\ (\text{种})$$

或者，由于抽取的5根檩条中至少有1根是不合格品，实际上为抽取的5根檩条中含有不合格品，故又得一种计算方法：

$$C_{20}^{5}-C_{17}^{5}=15504-6188=9316\ (\text{种})$$

即从总的不同取法中除去5根全部是合格品的不同取法。

第二节　随机事件及其相互关系

在自然现象（包括社会现象）中存在两种不同类型的现象，一种是确定性现象，也称必然现象，另一种是不确定性现象，也称随机现象。

必然现象的特点是：在一定的条件下，每次观察或试验只有一个结果，并且可以预言这个结果一定会出现或者一定不会出现。例如

一定的外力作用在钢材上，必然出现变形；

一块木板上所承受的荷载超过一定限值时，必然断裂；

水泥混凝土的抗压强度一定大于抗拉强度。

随机现象的特点是：在一定的条件下，每次观察或试验具有多种可能的结果，而哪一个结果将会出现，事先不能预言。例如

从一批含有不合格品的混凝土空心楼板中，任意抽取50块进行质量检查，每次抽取的50块中所含不合格品块数有多种可能的结果，到底是多少，事先不能确定；

相同原材料及相同条件下生产的同一标号的水泥出厂强度，具有多种可能的强度值，具体是多少，事前不能确定；

设计标号相同，使用相同原材料及相同配合比生产的一批混凝土，其抗压强度值有多种可能的数值，究竟是多少，事先不能确定；

用指定的测量工具测量一块混凝土预制板的长度，其测量结果有多种可能的长度值，具体是多少，事前不能确定。

一、随机事件

在一定的条件下，对随机现象进行观察或试验将会出现多种结果。随机现象的每一个可能出现的结果称为一个随机事件，简称事件，通常用字母A、B、C等表示。例如

从一批含有不合格品的混凝土空心楼板中，任意抽取3块进行质量检查，则“3块全为合格品”是一个事件“恰有一块不合格品”是一个事件，“不合格品不多于两块”是一个事件等，记为

$A=$“3块全为合格品”

$B=$“恰有1块不合格品”

$C=$“不合格品不多于两块”

从一批设计标号30级（即300号，以下同），并且用相同原材料及相同配合比生产的混凝土中，取样做成三个试件，则“三个试件的抗压强度平均值是35.2MPa（即352kgf/cm²，以下同）”是一个事件，“三个试件的抗压强度平均值小于37.8MPa”是一个事件，“三个试件的抗压强度平均值大于31.5MPa”是一个事件，记为

A＝“三个试件的抗压强度平均值是35.2MPa”

B＝“三个试件的抗压强度平均值小于37.8MPa”

C＝“三个试件的抗压强度平均值大于31.5MPa”

随机事件有两个特殊情况，即必然事件和不可能事件。必然事件是指在一定的条件下，每次观察或试验都必定要发生的事件，记为S。例如，在标准大气压下，水加热到100℃时必然沸腾是一个必然事件。不可能事件是指在一定的条件下，每次观察或试验都一定不发生的事件，记为ϕ。例如，在标准大气压下，水加热到50℃时不沸腾是一个不可能事件。

二、随机事件之间的相互关系

随机事件之间是有联系的，例如抽查一批混凝土预制板的质量时，如验收标准规定抗压强度和长度尺寸都符合技术规范时，混凝土预制板才认为合格，这时要考虑以下事件：

A_1＝“混凝土预制板合格”，

A_2＝“抗压强度合格”，

A_3＝“长度尺寸合格”；

B_1＝“混凝土预制板不合格”，

B_2＝“抗压强度不合格”，

B_3＝“长度尺寸不合格”；

……

显然这些事件之间是相互有联系的。分析事件之间的相互联系，可以为我们以后通过一些简单的事件来研究比较复杂的事件，提供必要的方便。

随机事件的相互关系有以下几种：

1. 包含关系

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记为$B\supset A$，或$A\subset B$。

例如，“抗压强度不合格”必然导致“混凝土预制板不合格”，故事件B_1包含事件B_2，即

$$B_1\supset B_2$$

同理

$$B_1\supset B_3$$

如果两个事件A和B满足$A\subset B$同时$B\subset A$，则称事件A和B相等，记为$A=B$。

2. 事件的和

“事件A和B中至少有一个发生”这一事件称为事件A与B的和，记为$A+B$。

例如，“混凝土预制板不合格”这一事件发生，意味着“抗压强度不合格”与“长度尺寸不合格”这两个事件中至少有一个发生，因此，事件B_1是事件B_2与B_3的和，即

$$B_1=B_2+B_3$$

3. 事件的积

“事件A和B同时发生”这一事件称为事件A与B的积，记为AB。

例如，“抗压强度合格”和“长度尺寸合格”这两个事件同时发生时，事件“混凝土预制板合格”即发生，所以事件A_1是事件A_2和A_3的积，即

$$A_1 = A_2A_3$$

4. 互斥（互不相容）关系

如果事件A和B在同一次试验中不可能同时发生，或者说在同一次试验中，事件A发生必然导致事件B不发生，则称事件A和B为互斥关系或互不相容关系。

例如，从一批混凝土预制板中，任意抽取3块检查质量时，“没有不合格品”和“恰有一块不合格品”这两个事件，在一次抽检中不可能同时出现，所以这两个事件是互斥关系。

5. 对立（互逆）关系

如果事件A和B互斥，并且在每次试验中，不是出现A就是出现B，则称事件A和B是对立关系或互逆关系。

当事件A和B是对立关系时，称其中一个事件，例如事件A，为另一个事件B的对立事件或逆事件，记为$A=\overline{B}$。

例如，“混凝土预制板合格”的对立事件是“混凝土预制板不合格”，即

$$B_1 = \overline{A_1}$$

同理

$$B_2 = \overline{A_2}, \quad B_3 = \overline{A_3}$$

第三节　概率的概念

随机事件在一次试验中是否发生，固然不能事先知道，但当进行大量重复的试验时，可以发现事件的发生具有一定的规律性。为了说明这种规律性是客观存在的，先介绍频率的概念。

一、频率的定义

定义：在一定的条件下进行n次重复试验，如事件A出现了m（m称为频数）次，则称

$$f_n(A) = \frac{m}{n} \tag{1—7}$$

为事件A在n次试验中出现的频率。

由事件A在n次试验中出现的频率f_n（A）的变化，可以看出事件A发生的规律性。

例1.3.1　抽检某砖厂生产的一批砖的质量，观察事件A=“砖合格”发生的规律性。

解　将抽检结果列于表1—1中：

表1—1

n（抽检块数）	5	60	150	600	900	1200	1800	2000
m（合格块数）	5	53	131	543	820	1091	1631	1812
$f_n(A)$	1	0.883	0.873	0.905	0.911	0.909	0.906	0.906

从表中看出，随着抽检次数的增加，事件A出现的频率在常数0.9附近摆动，而且逐渐稳定于这个常数值。常数0.9反映了事件A发生的规律性。

例1.3.2　上抛一枚硬币，观察事件A=“正面（花面）向上”发生的规律性。

解　历史上许多人做过此试验，如表1—2所示。

表1—2

试验人	蒲 丰	皮尔逊	皮尔逊	维 尼
n（上抛次数）	4040	12000	24000	30000
m（正面向上次数）	2048	6019	12012	14994
$f_n(A)$	0.5069	0.5016	0.5005	0.4998

从表中看出，不管什么人做此试验，当试验次数增加时，事件A出现的频率在常数0.5附近摆动，而且逐渐稳定于这个常数值。同样，常数0.5反映了事件A发生的规律性。

以上两个例子说明，在一次试验中，某个事件是否发生我们虽然不能事先预言，但当试验次数增多时，这一事件出现的频率总是稳定的在一个常数附近摆动。事件所具有的这一性质称为频率的相对稳定性，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性，这种规律性就是通常所说的统计规律性。

二、概率的定义

用来描述事件发生的可能性大小的数量指标称为概率。对概率的定义方式通常有两种。

1. 概率的统计定义

定义：在一定的条件下进行n次重复试验，并且事件A出现了m次。如果n充分大时，事件A出现的频率总是稳定的在某个常数p附近摆动，则称此常数p为事件A的概率，记为

$$p=P(A) \tag{1—8}$$

例如，例1.3.1中事件$A=$“砖合格”出现的频率稳定的在0.9附近摆动，故事件A的概率为$p=0.9$。同样，例1.3.2中事件$A=$“正面向上”的概率$p=0.5$。

在一般情况下，由概率的统计定义求事件概率的精确值是困难的，因为要得到事件出现的频率的稳定值，必须对事件的发生进行大量的观察或试验，而这在实际上是无法实现的。应用中，常以事件在n次重复试验中出现的频率值作为该事件概率的近似值。

2. 概率的古典定义

定义：当随机现象具有以下三个特征：

（1）所有可能出现的试验结果只有有限个n；

（2）每次试验中必有一个，并且只有一个结果出现；

（3）每一试验结果出现的可能性都相同。并且，事件A是由其中的m（$m\leqslant n$）个试验结果组成时，则事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1—9}$$

由上述概率的定义，可以得到概率的以下几个性质：

（1）对任何事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1—10}$$

（2）必然事件的概率等于1，即

$$P(S)=1 \tag{1—11}$$

（3）不可能事件的概率等于零，即

$$P(\phi)=0 \tag{1—12}$$

例1.3.3 有20块混凝土预制板，其中有3块是不合格品。从中任意抽取4块进行检查，

求 4 块中恰有一块（记此事件为A）不合格的概率是多少？

解 预制板有20块，每次抽取 4 块共有C_{20}^4种不同的抽取方式，而抽取的 4 块中恰有 1 块不合格品的抽取方式有$C_3^1 \cdot C_{17}^3$种，故

$$P(A)=\frac{C_3^1 \cdot C_{17}^3}{C_{20}^4}=\frac{2040}{4845}=0.421=42.1\%$$

例1.3.4 有10根混凝土檩条，其中有 3 根是不合格品。从中任意抽取 2 根进行检查，求至少有 1 根檩条是不合格品（记此事件为A）的概率是多少？

解 从10根檩条中每次任意抽取 2 根，共有C_{10}^2种不同的抽取方式，而抽取的两根中至少有一根是不合格品的抽取方式有$C_3^2+C_3^1 \cdot C_7^1$种，故

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=0.533=53.3\%$$

第四节 概率的运算公式

一、加法公式

如果事件A和B是互斥关系，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1-13)$$

加法公式可以推广到n个事件。如果事件A_1，A_2，$\cdots A_n$两两互斥，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \qquad (1-14)$$

由式（1—13）可以得到求事件A的对立事件$\overline{A}$的概率公式，即

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (1-15)$$

事实上，由于$A+\overline{A}=S$，并且A与$\overline{A}$互斥，故有

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

即

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

例1.4.1 一批混凝土预制板共50块，其中45块是合格品，5 块是不合格品。从中任意抽取 3 块进行检查，求其中至少有 1 块不合格品的概率是多少？

解 记$A=$“3 块中至少有 1 块不合格品”，$A_1=$“3 块中恰有 1 块不合格品”，$A_2=$“3 块中恰有 2 块不合格品”，$A_3=$“3 块全部为不合格品”。由于A_1，A_2，A_3两两互斥，故有

$$A=A_1+A_2+A_3$$

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$=\frac{C_5^1 \cdot C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2 \cdot C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3 \cdot C_{45}^0}{C_{50}^3}$$

$$\approx 0.2525+0.0230+0.0005=0.2760=27.6\%$$

本例中如用事件A的对立事件$\overline{A}$求A的概率，十分简便。因事件$\overline{A}=$“3 块全为合格品”，又

$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=0.7240$$

所以得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.7240=0.2760=27.6\%$$

二、乘法公式

1. 事件的相互独立性

如果事件A的发生与否不影响事件B发生的概率（或者事件B的发生与否不影响事件A发生的概率），则称事件A与B相互独立。

例如，6块混凝土预制板中有2块是不合格品，在抽检中如从中任取1块，检查后仍放回去，然后再从中任取1块进行检查，即采用放回抽样方式检验。记$A=$“第一次取到不合格品”，$B=$“第二次取到不合格品”。由于第二次从混凝土预制板中任取的1块仍然是从原来的6块中抽取的，所以第1次抽检的结果不会影响第二次抽检的结果，即事件A的发生与否对事件B发生的概率没有影响。事实上，无论事件A是否发生，事件B发生的概率均为$P(B)=\frac{1}{3}$，因此事件A与B是相互独立的。如果把上面的抽检方式改为不放回抽样，即第一次抽取到1块混凝土预制板检查后不放回去，接着再从中任取1块进行检查。显然，第二次抽检的结果受第一次抽检结果的影响，这时事件A与B就不再是相互独立的了。

在产品抽样检查中当然不是采取放回抽样的方式，但是对大量的产品进行检验时，由于产品的数量很大，我们一般总是把不放回抽样近似的看作是放回抽样，因而各次的抽检产品结果认为是相互独立的，这样处理，便于计算。

容易验证，如果事件A与B相互独立，则

$$\overline{A}\text{和}\overline{B}\quad \overline{A}\text{和}B\quad A\text{和}\overline{B}$$

也都是相互独立的。

2. 乘法公式

如果事件A和B相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1—16}$$

乘法公式可以推广到n个事件。如果事件A_1，A_2，$\cdots A_n$相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{1—17}$$

例1.4.2 某预制厂生产一种水泥制品需三道工序。设第一、二、三道工序的次品率分别为0.2、0.15和0.1，并且每道工序的生产互不影响。问生产的水泥制品的次品率是多少？

解 设$A=$“生产的水泥制品是次品”，$A_1=$“第一道工序生产的半成品是次品”，$A_2=$“第二道工序生产的半成品是次品”，$A_3=$“第三道工序生产的半成品是次品”。如从A的对立事件$\overline{A}$考虑，则有

$$\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

因事件A_1，A_2，A_3是相互独立的，所以$\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$也是相互独立的，故得

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$
$$=(1-0.2)(1-0.15)(1-0.1)=0.612$$

于是事件A的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.612=0.388=38.8\%$$

例1.4.3 某预制厂生产的100块混凝土预制板中有5块不合格品，每次从中任取1块，连续抽取两次，求

（1）采用放回抽样时，两次都抽到合格品的概率？

（2）采用不放回抽样时，两次都抽到合格品的概率？

解 设A=“第一次抽到合格品”，B=“第二次抽到合格品”。

（1）由于采用放回抽样，所以第一次抽检的结果不影响第二次抽检的结果，即事件A和B是相互独立的，故按式（1—16）得

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{95}{100}\times\frac{95}{100}=0.9025=90.25\%$$

（2）因采用不放回抽样，于是第一次抽到合格品后第二次再抽时，只有99块预制板，并且其中的合格品为94块。因此，第二次抽到合格品的概率是$\frac{94}{99}$，而不是$\frac{95}{100}$，即事件A与B不是相互独立的，故不能用式（1—16）计算两次都取到合格品的概率。此时应按古典概率公式计算，即

$$P(AB)=\frac{95\times 94}{100\times 99}=0.9020=90.2\%$$

第五节　重复独立试验

应用中往往遇到下列类型的试验：每次试验只有两个结果A和$\overline{A}$，并且各次试验都是在完全相同条件下的同一个试验的重复，这种类型的试验称为重复独立试验。所谓“独立”，是指各次试验是相互独立的。因各次的试验条件完全相同，所以每一次试验中，试验结果发生的概率都不受其它各次试验中的试验结果的影响，故各次试验相互独立是非常明显的。例如，从一批含有不合格品的产品中，采取放回抽样方式进行质量检验，如把每抽取一件产品作为一次试验，那末每次的试验结果只有两个：A=“产品合格”，$\overline{A}$=“产品不合格”，并因各次抽取产品时面对的产品是完全相同的，所以每次抽检结果的概率，不受其他各次抽取时取得的产品是合格品或不合格品的影响，即各次的试验是既相互独立又重复进行的，因此是重复独立试验。

在n次重复独立试验中，设事件A发生的概率为p，则事件A恰出现k次的概率可由以下的分析得出：

“事件A在n次试验中恰出现k次”这一事件在n次试验中可以以许多不同的方式出现。例如，前k次验试都出现A，后$n-k$次试验都不出现A；或者前$n-k$次试验不出现A，而后k次试验出现A；也可能是某k次试验出现A，其它$n-k$次试验不出现A等，即

$$\underbrace{AA\cdots A}_{k}\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k},\ \cdots\cdots,\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k}\ \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

所有这些不同的方式总共有C_n^k种。

由于n次试验是相互独立的，并且每一种方式中事件A出现k次而不出现$n-k$次，所以由概率乘法公式，每一种方式出现的概率都相等，即

$$P(\underbrace{AA\cdots A}_{k}\ \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k})=\cdots\cdots=P(\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k}\ \underbrace{AA\cdots A}_{k})$$
$$=p^k(1-p)^{n-k}$$

故在n次重复独立试验中，事件A恰出现k次的概率为

$$P(A\text{恰出现}k\text{次})=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,2,\cdots n \tag{1—18}$$

例1.5.1 一批混凝土预制板共110块，其中混入4块不合格品。现从中有放回的连续抽取4次，每次抽取1块检查，问抽取的4块中恰有2块不合格品的概率是多少？

解 设A=“抽出1块不合格品”，则$\overline{A}$=“抽出1块合格品”，并且

$$p=P(A)=\frac{4}{110}=\frac{2}{55}\qquad 1-p=P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{53}{55}$$

有放回的连续抽取4次即为4次重复独立试验，故事件A恰出现2次的概率为

$$P(A)=C_4^2p^2(1-p)^{4-2}=C_4^2\left(\frac{2}{55}\right)^2\left(\frac{53}{55}\right)^2\approx 0.0074=0.74\%$$

例1.5.2 从一大批砖中（不合格品率$p=0.01$），任意抽取5块检查，问抽取的5块砖中恰有3块不合格品的概率是多少？

解 由于产品的数量很大，所以按放回抽样检验对待。于是所求概率为

$$p=C_5^3(0.01)^3(0.99)^{5-3}=10\times10^{-6}\times0.98=0.98\times10^{-5}\approx 0$$

即这种事件不可能出现。

习　题

1. 有5根混凝土梁，其中有2根是不合格品，从中任意抽取2根，求：（1）都是合格品的概率；（2）都是不合格品的概率；（3）一根是合格品另一根是不合格品的概率。

2. 某油漆公司发出17桶油漆，其中白漆10桶，黑漆4桶，红漆3桶。在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些标签重新贴上，问一个订货4桶白漆，3桶黑漆和2桶红漆的顾客，按所规定的颜色如数取到货的概率是多少？

3. 生产一种水泥制品采用两种工艺，第一种工艺有三道工序，每道工序的次品率分别为0.1，0.2，0.3；第二种工艺有两道工序，每道工序的次品率都是0.3。如果用第一种工艺，在合格产品中一等品率为0.9；而用第二种工艺，在合格产品中一等品率只有0.8。试问哪一种工艺能保证得到一等品的概率较大？

4. 某制砖厂有三台制砖机，在一月内甲制砖机正常运转的概率是0.9，乙制砖机和丙制砖机正常运转的概率分别是0.8和0.85，求在一月内，（1）没有1台制砖机正常运转的概率？（2）至少有1台制砖机需要维修的概率？

5. 某车间有6台车床，各车床加工产品的合格品率分别为$p_1=0.98$，$p_2=0.95$，$p_3=0.99$，$p_4=0.97$，$p_5=0.94$，$p_6=0.96$。今各台车床加工同一件产品，问产品的合格品率是多少？

6. 地砖使用两年后损坏的概率为0.01，求100块地砖在使用两年后最多有3块损坏的概率是多少？

7. 一批铁钉一级品率为0.30，进行重复抽样检查，共取出5个样品，求：（1）恰有2个一级品的概率；（2）至少有2个一级品的概率。

第二章 随机变量及其分布

第一节 随 机 变 量

一、随机变量的概念

随机现象的观察或试验结果不仅可以用事件来描述，还可以用一个变量所取的数值来描述。例如

一批混凝土预制板中有10块不合格品，从中任意抽取2块，检查抽取的2块中所含的不合格品数。检查的结果必定是不合格品的块数为零块（即全部为合格品）、1块和2块等三种情况之一。如果以X表示抽取的2块混凝土预制板中所含不合格品的块数，就引入了一个变量X，这个变量随检查结果的不同，将可能取0、1和2这三个数中的一个值；

测量24m预应力混凝土梁的长度，每次的测量结果为一数值，并且这些数值在某个范围，如在23.985～24.015m之间波动。如果以X表示每次的测量结果，也引入了一个变量X，随着测量结果的不同，变量X取不同的数值，而且X所有可能取的值落在区间[23.985～24.015]内。

有些试验结果与数之间虽然并没有自然的联系，但是可以给它们规定一个对应的关系，使其与数值联系起来。例如

验收一块混凝土预制板时有两种结果："质量合格"和"质量不合格"，如规定

当"质量合格"时，用$X=1$表示；

当"质量不合格"时，用$X=0$表示。

这样，当我们讨论验收结果时，就可以将验收结果简单地说成是1或0。建立这种数量化的关系，实际上就相当于引入了一个变量X，对于不同的验收结果，变量X将可能取1和0这两个数中的一个。

以上这些变量都是一种特殊的变量，它们的取值随试验结果而确定。

定义：在一定的条件下，用来描述随机现象观察或试验结果的变量称为随机变量。随机变量常用字母X、Y、Z等表示。

随机变量与一般在数学（如微积分学）中所说的变量虽然都是变量，但它们之间有本质的区别。随机变量的特点是：

1. 随机性：试验前只知道它取值的范围，而不能预言它具体取什么值；

2. 规律性：由于随机现象每个观察或试验结果的出现有一定的概率，所以随机变量的取值也有一定的概率。

例如在上面验收一块混凝土预制板的质量中，虽然$X=1$（质量合格）或$X=0$（质量不合格）是事先不能预言的，但如果该预制板质量合格的概率是0.8，那末$X=1$的概率为0.8是一定的，同样，$X=0$的概率为0.2也是一定的。

随机变量概念的引入，为研究随机现象的统计规律性提供了有效的工具和手段。其主要原