最新奥林匹克初中数学读本

3 年级

OLYMPIC

陕西人民教育出版社

最新奥林匹克

初中数学读本

本册主编　张秀芬
编　　者　江树基　尤　廉
许慧慧　曹程锦
孙永涛　李一心
张秀芬　姜书念

3 年级

陕西人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

最新奥林匹克初中数学读本．三年级/秦驰主编．

—西安：陕西人民教育出版社，2002.6

ISBN 7—5419—8385—3

Ⅰ.最…　Ⅱ.马…　Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 024956 号

最新奥林匹克初中数学读本

3 年 级

出 版 者　陕西人民教育出版社

发 行 者　各地新华书店经销

印　　刷　西北大学印刷厂

印　　次　2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

开　　本　880×1230　1/32 开本　8.25 印张

字　　数　165 千字

印　　数　1～5 000

标准书号　ISBN 7—5419—8385—3/G · 7233

定　　价　8.50 元

丛书主编　　秦　驰
丛书副主编　　刘康宁　江树基
　　　　　　　尤　廉　汪香志
编　　委　　张秀芬　沈　军
　　　　　　　许　盈　浮新民

前 言

随着数学课外活动及数学竞赛的蓬勃开展，为了探索出既切合九年义务教育数学课程特点，又渗透现代数学教育理念；既能够激发学生的求知欲、探索欲，又科学简捷，且难易程度适中的初中数学奥林匹克教材，我们组织了具有多年数学奥林匹克辅导经验，成绩斐然的一线教师和奥林匹克数学竞赛研究专家，对竞赛训练内容精心研讨，筛选出适合各年龄段学生认知特点及心理状况的专项内容，编写了这套《最新奥林匹克初中数学读本》。以期达到既能满足学生参加初中阶段的各级各类竞赛并取得好成绩，又能促进学生掌握更多的数学技能和方法，为以后的学习和工作打下坚实的基础。这套教材能让奥林匹克之门向更广大的学生敞开，使他们真正学到有价值的、必需的数学奥林匹克知识，杜绝那种舍本求末，不注意基础知识的严格训练和真正掌握，而搞题海战术，用大量的难题、偏题或怪题来压学生，挫伤学生的锐气和进取心，束缚学生的聪明才智的错误作法。我们力求做到教材通俗、易懂、深入浅出，让学子们通过阅读使用《最新奥林匹克初中数学读本》，对数学奥林匹克不再望而生畏，不再只是翘首期盼，更不是只限于个别人的荣耀，而真正能适合更多的学生，让他们感悟到数学奥林匹克所带来的欣慰和快乐，体会到它的内涵和魅力，为学子们实现数学梦想、遨游数学殿堂提供帮助。

这套《最新奥林匹克初中数学读本》有如下特点：

其一，贯彻了国家对初中课程改革的理念，符合国家对初中数学竞赛内容的各项要求；

其二，内容紧密联系学生实际，体现科学性、针对性、指导性、实用性和高效性，突出应用性、能力性和创新性；

其三，遵循“源于基础，高于课本”，注重同步性（与初中数学大纲同步）、提高性（与竞赛大纲内容衔接）及趣味性的统一。结合学生的认知水平精心设计、编排训练内容，以启迪学生思维、掌握方法，培养学生运用数学知识快速判断、解决问题的能力；

其四，尽力体现初中数学课程改革的新理念及数学竞赛命题的新思想、新动态；

其五，是内容求实。内容选取力求做到实实在在，对学生竞赛确有帮助，真正能解决学生竞赛中需要解决的问题。

本套读本编写过程中参考了许多相关图书资料，在此深表谢意。由于编写人员水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请各位读者批评指正。

目 录

1 面积与等积变换

专项透析

面积是平面几何中的重要内容，等积变换是解决几何问题的一个重要方法，著名的勾股定理最早就是利用面积的方法证明的，许多几何问题若用面积方法解决，就显得更具有简捷、明快、独树一帜的特点，因此，在历届数学竞赛中涉及面积问题的题目经常出现，本专题将深入探讨这方面的问题，利用面积解题时，以下基础知识应该掌握.

1. 面积公式

$S_{三角形}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$;

$S_{三角形}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$;

$S_{平行四边形}=ah$；$S_{菱形}=\frac{1}{2}l_1\cdot l_2$；（$l_1$，$l_2$是菱形的两条对角线的长）

$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$；$S_{正方形}=a^2$;

$S_{矩形}=ab$.

2. 等积定理

（1）等底等高的两个三角形等积；

（2）三角形的底扩大若干倍而它的高却相应地缩小相同的倍数，则新三角形与原三角形等积.

3. 面积比定理

（1）两个三角形面积之比，等于它们底与高乘积的比；

（2）等底（高）两个三角形面积之比，等于它们的高（底）之比；

（3）相似三角形（多边形）面积之比等于它们对应边的平方比.

例题评点

例 1. 如图1－1，在 $\triangle ABC$ 内部选取一点 P，过 P 点作 3 条分别与 $\triangle ABC$ 的 3 条边平行的直线，这样所得到的 3 个三角形 t_1，t_2 和 t_3 的面积分别为 4，9 和 49，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：如图1－1，设 S 是 $\triangle ABC$ 的面积，S_1，S_2 和 S_3 分别是三角形 t_1，t_2 和 t_3 的面积，c 是 AB 边的长，c_1，c_2，c_3 分别是平行于边 AB 的三个三角形 t_1，t_2 和 t_3 的边的长，由相似三角形的性质，得

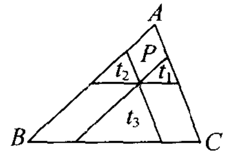

图 1－1

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{c_1}{c},$$

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{c_2}{c},$$

$$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{c_3}{c}.$$

又 $c_1+c_2+c_3=c$，

故有 $\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}+\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}+\dfrac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=1$，

得 $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2=(\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{49})^2=144$.

解题策略

要求 $\triangle ABC$ 的面积，应寻找 $\triangle ABC$ 的面积与题设中的三个三角形 t_1，t_2，t_3 的面积的关系，由题设中的三条平行线易知三角形 t_1，t_2，t_3 与 $\triangle ABC$ 相似，从而可通过面积比定理解之.

【评点】此类问题常常是把面积比转化为线段之比，从而巧妙得以解决. 有时在研究线段的比的计算与证明时，也常转化为面积比解之.

例 2. 如图1－2，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 上的一点，已知 $AC=5$，$AD=6$，$BD=10$，$CD=5$，那么 $\triangle ABC$ 的面积是（　　）

A. 30　　B. 36

C. 72　　D. 125.

解：过 C 作 $CH\perp AD$ 于 H，因为 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，所以在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中，$AC=5$，$AH=3$，$CH=4$，

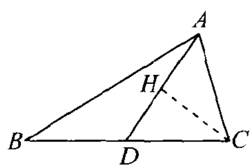

图 1－2

$\therefore \quad S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD \cdot CH$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 4$

$=12.$

因$\triangle ACD$与$\triangle ABC$同高

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{BC}{DC}\cdot S_{\triangle ACD}$

$=\frac{15}{5}\times 12$

$=36.$ 选B.

解题策略

因$\triangle ACD$的三边长已知，所以$\triangle ACD$面积可求，又因$\triangle ACD$与$\triangle ABC$同高且两三角形的底边CD和BC已知，故可用面积比定理求解.

【评点】面积比转化为线段比是解题的重要方法.

例3. 如图1-3，在$\triangle ABC$的各边AB，BC，CA上取AD，BE，CF各等于边的$\frac{1}{3}$，求证：$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

证明：连结AE，因$\triangle BDE$与$\triangle ABE$同高，且底边$BD=\frac{2}{3}AB$，

$\therefore \quad S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABE}$， ①

又因$\triangle ABE$与$\triangle ABC$同高且$BE=\frac{1}{3}BC$

$\therefore \quad S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$， ②

把②代入①，得

$S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$， ③

同理可得 $S_{\triangle ADF}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$， ④

$S_{\triangle CEF}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$， ⑤

③+④+⑤，

得 $S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle CEF}=\frac{6}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$，

所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

解题策略

要证 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ 只须证明$S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$即可.

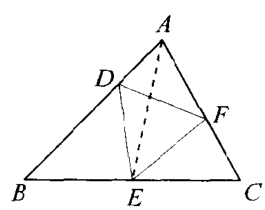

图 1-3

【评点】证明面积相等，一般方法是利用等积变换，辅以计算.

例4. 如图1-4，已知：E，F，G，H，K，L分别为AB，BC，CD，

DA，AC，BD 的中点，又 $KM /\!/ DB$，$LM /\!/ AC$，连 ME，MF，MG，MH，求证四边形 $AEMH$，$BFME$，$CGMF$，$DHMG$ 的面积相等.

证明：连结 EH，HK，KE，则 $HE /\!/ BD /\!/ KM$.

于是 $S_{\triangle HKE}=S_{\triangle HME}$，

从而 $S_{AEMH}=S_{AEKH}$.

又因 $KE \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC$，$HK \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}CD$.

所以 $S_{\triangle AEK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle AHK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACD}$.

$$\begin{aligned}S_{AEMH}&=S_{AEKH}\\&=S_{\triangle AEK}+S_{\triangle AHK}\\&=\frac{1}{4}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD})\\&=\frac{1}{4}S_{ABCD}.\end{aligned}$$

同理可证 $S_{BFME}=S_{CGMF}=S_{DHMG}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

解题策略

只须证明这 4 个四边形的每一个面积分别等于$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$，为此必须充分利用六个中点和两条平行线这些条件进行等积变换.

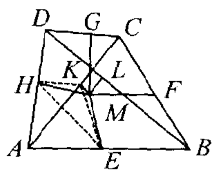

图 1-4

【评点】直线形中三角形最简单，并且各种直线形都可以分割为若干个三角形，因此，研究三角形面积等积变换是利用面积证题的基础.

例 5. 如图1－5，在$\triangle ABC$中，M，N分别是AB，AC边上一点，P是MN上一点，如果$BM:AM=AN:CN=MP:NP$，试证：$S_{\triangle PBC}=2S_{\triangle AMN}$.

证明：设$BM:AM=AN:CN=MP:NP=n$，

则 $AB:AM=n+1$，

$AC:AN=\frac{n+1}{n}$，

$MN:NP=n+1$，

$MN:MP=\frac{n+1}{n}$.

解题策略

充分利用题设中线段成等比的条件，巧设比值通过计算方法解之.

设 $S_{\triangle AMN}=1$，因$\angle MAC=\angle BAC$，

所以，$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}}=\frac{AB\cdot AC}{AM\cdot AN}=\frac{(n+1)^2}{n}$，故$S_{\triangle ABC}=\frac{(n+1)^2}{n}$.

又$\angle BMP$与$\angle AMN$互补，

故$\dfrac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle AMN}}=\dfrac{BM\cdot MP}{AM\cdot MN}=\dfrac{n^2}{(n+1)}$，

故$S_{\triangle BMP}=\dfrac{n^2}{(n+1)}$，

同理可证：$S_{\triangle CNP}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

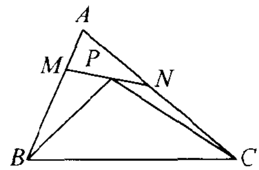

图 1–5

由此可得，$S_{\triangle PBC}=\dfrac{(n+1)^2}{n}-\dfrac{n^2}{(n+1)}-\dfrac{1}{n(n+1)}-1=2$，

因此，$S_{\triangle PBC}=2S_{\triangle AMN}$.

【评点】证明面积相等，一般方法是利用等积变换，但也可用计算方法证，此题证的过程不失一般性，巧设$S_{\triangle AMN}=1$，大大简化证明的过程.

例 6. 如图1−6，$ABCDE$是正五边形，AP，AQ和AR是由A向CD，CB和DE（或延长线）所引的垂线，设O是正五边形的中心，$OP=1$，则$AO+AQ+AR$等于（　）

A. 3　　B. $1+\sqrt{5}$

C. 4　　D. $2+\sqrt{5}$

解题策略

要求$AO+AQ+AR$，因$OP=1$，只须求$AP+AQ+AR$，而AP，AQ，AR分别是$\triangle ACD$，$\triangle ACB$，$\triangle ADE$的高，故可考虑用面积方法解题.

解：连结AC，AD，显然有

$$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}=S_{五边形ABCDE}=5S_{\triangle COD},$$

故$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}=5S_{\triangle COD}$.

即$\dfrac{1}{2}CD\cdot AP+\dfrac{1}{2}BC\cdot AQ+\dfrac{1}{2}ED\cdot AR$

$=5\times\dfrac{1}{2}CD\cdot OP$.

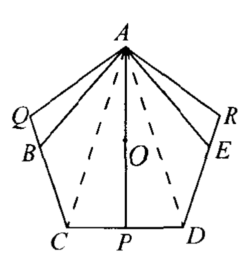

图 1–6

由$CD=BC=DE$，

得$AP+AQ+AR=5OP$.

又$OP=1$，$AP=AO+OP$，

所以$AO+1+AR+AQ=5$，

即$AO+AQ+AR=4$. 故选 C.

【评点】此题虽然题目中没有直接涉及到面积，但仍可借助于面积

知识求解，比其他方法巧妙.

用面积解题的基本思想是，对某个三角形的面积，采用不同的方法或从不同的角度去计算，就可得到一个面积关系式，化简这个关系式可得求证的结果.

例 7. 如图1－7，P为$\triangle ABC$内任一点，三边a，b，c的高分别为h_a，h_b，h_c，且P到a，b，c的距离分别为t_a，t_b，t_c，求证：$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

证明：因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$，

所以 $\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=1$.

又 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}ct_c$，$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}at_a$，

$S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}bt_b$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b$，

所以 $\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}ct_c}{\frac{1}{2}ch_c}=\frac{t_c}{h_c}$.

同理 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{t_a}{h_a}$，$\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{t_b}{h_b}$，

所以 $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

解题策略

连结PA，PB，PC，容易看出$\frac{t_a}{h_a}$，$\frac{t_b}{h_b}$，$\frac{t_c}{h_c}$分别是两个等底三角形高之比，于是可将高之比转化为面积之比，从而使此题得证.

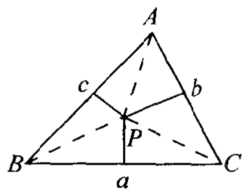

图 1-7

【评点】此题揭示了三角形内任一点到各边距离与三角形高之间的数量关系，用它可解决一些线段间的数量关系.

专项精练

（1）若一等腰三角形底边上的高等于 18，腰上中线等于 15，则此等腰三角形的面积等于（　）

A. 12　　B. 72　　C. 144　　D. 16

（2）如图1－8，D，E，F 为任意$\triangle ABC$ 各边的中点，AD，BE，CF 相交于 O 点，则图中面积相等的三角形有（　）对

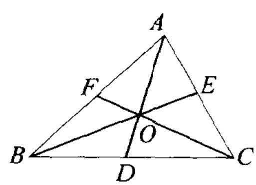

图 1-8

A. 15　　B. 18　　C. 30　　D. 33

（3）已知$\triangle ABC$内一点P，过P作AD，BE，CF分别与BC，AC，AB交于D，E，F，则$\dfrac{AP}{AD}+\dfrac{BP}{BE}+\dfrac{CP}{CF}$等于（　）

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{3}$

（4）如图1－9，梯形$ABCD$中，$AD /\!/ BC$，$AD:BC=2:5$，$AF:FD=1:1$，$BE:EC=2:3$，EF，CD延长线交于G，用最简单的整数比来表示，$S_{\triangle GFD}:S_{\triangle FED}:S_{\triangle DEC}=$______.

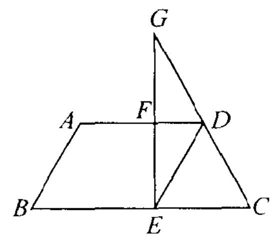

图 1－9

（5）在$\triangle ABC$中，$\angle B$是直角，P为其内一点，$PA=10$，$PB=6$，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA$，则$PC=$______.

（6）矩形$ABCD$中，$AB=a$，$BC=b$，M是BC的中点，$DE\perp AM$，E是垂足，则$DE=$______.

（7）在$\triangle ABC$中，CD将$\triangle ABC$分成面积相等的两个三角形，求证，可以在$\triangle ADC$，$\triangle DBC$中分别作一条直线，使得分成的两个三角形对应全等.

（8）已知P是$\triangle ABC$内任一点，连AP交BC于D，连BP交CA于E，连CP交AB于F，求证：$\dfrac{AF}{FB}$，$\dfrac{BD}{DC}$，$\dfrac{CE}{EA}$中，必有一个不小于1，又必有一个不大于1.

专项精练的参考答案与提示

（1）选C. $\because$ $AD=18\text{cm}$，$BE=15\text{cm}$，过E作$EF\perp BC$于F，

$\therefore$ $EF=9\text{cm}$，$BF=12\text{cm}$，

$\therefore$ $CF=DF=\dfrac{1}{3}BF=4\text{cm}$，

又$BC=16\text{cm}$，

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC=144\text{cm}^2$.

(2)选 D. 设$S_{\triangle ABC}=m$，易知$S_{\triangle BOD}=S_{\triangle BOF}=S_{\triangle AOE}=S_{\triangle AOF}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle COE}=\frac{m}{6}$. 所以可构成$C_6^2=15$ 对等积三角形. 由两个小三角形并成一个三角形,则上述6个小三角可并成3个等积三角形,即$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COA}=S_{\triangle AOB}=\frac{m}{3}$.

同理，由 3 个小三角形并成 6 个等积三角形，即$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCF}=S_{\triangle ACF}=\frac{m}{2}$. 这又可构造 15 对等积的三角形. 因此，共有等积三角形 15 + 15 +3 = 33（对).

(3）选C. $\because \quad \frac{AP}{AD}=1-\frac{PD}{AD}$，$\frac{BP}{BE}=1-\frac{PE}{BE}$，$\frac{CP}{CF}=1-\frac{PE}{CF}$，

$\therefore \quad \frac{PA}{AD}+\frac{BP}{BE}+\frac{CP}{CF}=3-(\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PE}{CF})$,

又$\because \quad \frac{PD}{AD}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PE}{BE}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$,

$S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$,

$\therefore \quad \frac{AP}{AD}+\frac{BP}{BE}+\frac{CP}{CF}=3-1=2.$

(4）设$AD=2$，则$BC=5$，$FD=1$，$EC=3$.

$\therefore \quad GF:GE=FD:EC=1:3.\ GF:FE=1:2$,

$$S_{\triangle GFD}:S_{\triangle FED}=GF:FE=1:2.$$

显然有 $S_{\triangle EFD}:S_{\triangle CED}=FD:EC=1:3$.

$\therefore \quad S_{\triangle GFD}:S_{\triangle FED}:S_{\triangle CED}=1:2:6.$

(5）设$PC=x$，显然$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，由余弦定理求出 AB，BC，再由$S_{\triangle APB}+S_{\triangle CPA}=S_{\triangle ABC}$，得出关于 x 的一元二次方程，解得 $x_1=x_2=33$.

(6）$\because \quad S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}DE\cdot AM=S_{ABCD}-S_{\triangle ABM}-S_{\triangle CDM}$

$$=ab-\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}b\cdot 2=\frac{1}{2}ab.$$

$$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2},$$

$\therefore \quad DE=\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

(7）由$\triangle ADC$与$\triangle DBC$面积相等知 D 为 AB 的中点，过 D 作 DE

$/\!/BC$ 交 AC 于点 E，作 $DF/\!/AC$ 交 BC 于点 F，则 $\triangle ADE\cong\triangle DBF$，$\triangle CDE\cong\triangle DCF$.

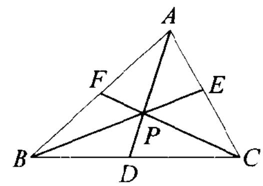

图 1–10

（8）如图1－10，由同高三角形的面积性质知

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle PCD}},$$

再由比例性质得，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle ACD}-S_{\triangle PCD}}=\dfrac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle CPA}}$.

同理，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle BPC}}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle APB}}$.

三式相乘得 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

于是 $\dfrac{AF}{FB}$，$\dfrac{BD}{DC}$，$\dfrac{CE}{EA}$ 中必有不小于 1 的，否则，若全都小于 1，其积必小于 1，相矛盾.

同样，$\dfrac{AF}{FB}$，$\dfrac{BD}{DC}$，$\dfrac{CE}{EA}$ 中必有不大于 1 的. 否则，若全都大于 1，其积必大于 1，相矛盾.