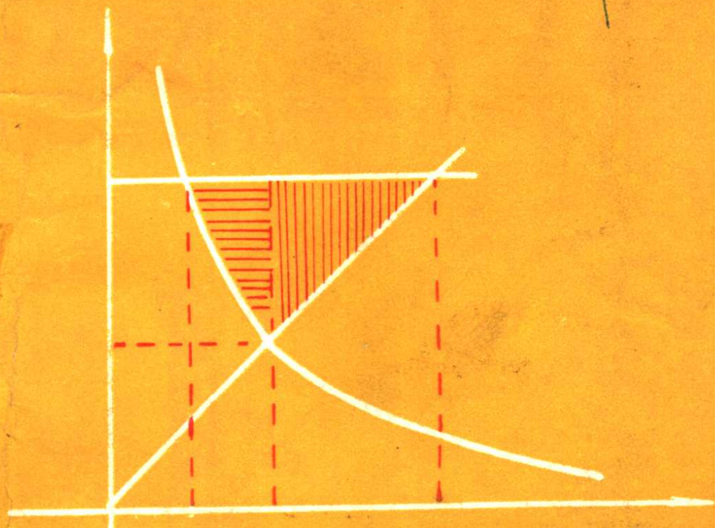
高等数学习题集解答

下册

翟连林　尹宝一　胡修伟　郝雨淋　编



机械工业出版社

高等数学习题集解答

下 册

翟连林　尹宝一
胡修伟　郝雨淋　编

机 械 工 业 出 版 社

高等数学习题集解答

下　册

翟连林　尹宝一
胡修伟　郝雨淋　编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）
（北京市书刊出版业营业許可证出字第 117 号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32・印张 21・字数 464 千字
1986年11月北京第一版・1986年11月北京第一次印刷
印数　00,001—19,300・定价4.90元

*

统一书号：7033・6557

前　　言

中央电大数学组编写的《高等数学习题集》(1986 年修订本)，是与北京大学邵士敏、蒋定华等同志编写的《高等数学讲义》(上、下册)相配套的一本教学参考用书。该书选题形式多样，具有相对的典型性，起点适中并富有启发性。

为了更好地配合高等数学的教与学，根据广大读者的需要，我们将该书全部的习题，一一作了解答。考虑到读者自学高等数学的具体困难，本题解在解题过程中尽可能地给予比较细致的分析，引导读者通过一定量的练习，巩固所学的基本概念、理论和基本技巧，帮助读者培养起自学的能力，以提高运算能力。

我们殷切地期望高等数学初学者，一定要刻苦地钻研，在独立思考的基础上使用本书。如果当读者以自己的思维方法与本书习题解答的解题思路相比较时，发现存在差异，那么就会激发起浓厚的学习兴趣，并能在活跃的思考之中获益——这就是本书出版的本意。

本书习题解答共分两册(上、下册)，上册内容包括一元微积分，下册内容包括多元微积分、无穷级数、微分方程、空间解析几何以及场论初步等。它既可供电大师生参考使用、同时也可供普通工科院校、各类业余职工大学有关专业学生，以及工程技术人员或自学高等数学者使用。

本书由翟连林同志主编，参加编写工作的还有尹宝一、

胡修伟、郝雨淋等同志。

由于时间比较仓促，水平有限，书中错误在所难免，诚恳地希望广大读者批评指正。

编者

一九八五年八月

目　录

第九章　矢量代数与空间解析几何

空间点的直角坐标

9.1 在空间直角坐标系中作出具有下列坐标的点：$A(2,3,4)$；$B(1,2,-1)$；$C(-2,2,2)$；$D(2,-2,-2)$。

解 根据题设四点 A、B、C、D 的坐标，可以图 9.1 所示的直角坐标系标出这些点的位置。

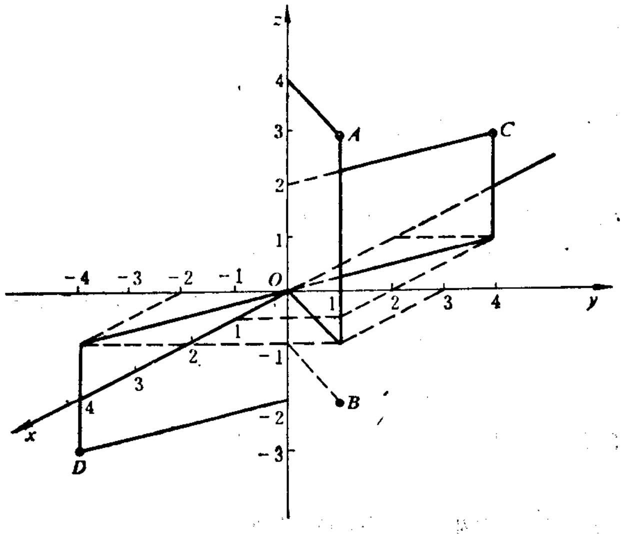


图　9.1

9.2 指出下列各点位置的特殊性：

$A(2,0,0)$；$B(0,-3,0)$；$C(0,-3,1)$；

$D(-5,0,3)$；$E(3,2,0)$；$F(0,0,0)$.

解 A在x轴上；B在y轴上；C在yOz平面上；D在xOz平面上；E在xOy平面上；F为原点.

9.3 求出与给定点$(2,-3,-1)$分别对称于下列坐标面：

(a) xOy；(b) yOz；(c) zOx

的点的坐标.

解 (a) $(2,-3,1)$；(b) $(-2,-3,-1)$；(c) $(2,3,-1)$.

9.4 求出给定点$(2,-3,-1)$分别对称于下列坐标轴：

(a) x轴；(b) y轴；(c) z轴的点的坐标.

解 (a) $(2,3,1)$；(b) $(-2,-3,1)$；(c) $(-2,3,-1)$.

9.5 求两点$(1,2,2)$和$(-1,0,1)$间的距离.

解 利用空间两点间距离公式，有

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\\ &= \sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2+(1-2)^2}\\ &= \sqrt{4+4+1}\\ &= 3.\end{aligned}$$

9.6 求出点$A(4,-3,5)$到坐标原点和各坐标轴的距离.

解 点A到坐标原点的距离为

$$|OA| = \sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2+(5-0)^2} = 5\sqrt{2}.$$

点A到x轴的距离为

$$d_x = \sqrt{(4-4)^2+(-3-0)^2+(5-0)^2} = \sqrt{34}.$$

点A到y轴的距离为

$$d_y=\sqrt{(4-0)^2+[(-3)-(-3)]^2+(5-0)^2}$$
$$=\sqrt{41}.$$

点A到z轴的距离为

$$d_z=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2+(5-5)^2}=5.$$

9.7 求顶点为$A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,11)$的三角形各边的边长.

解 边$|AB|$的长为

$$|AB|=\sqrt{(11-2)^2+(3-5)^2+(8-0)^2}=\sqrt{149}.$$

边$|AC|$的长为

$$|AC|=\sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2+(11-0)^2}=\sqrt{146}.$$

边$|BC|$的长为

$$|BC|=\sqrt{(5-11)^2+(1-3)^2+(11-8)^2}=7.$$

9.8 试证以点$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 因为由两点距离公式，有

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7.$$
$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7.$$
$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2}$$
$$=7\sqrt{2}.$$

所以 $$|AB|=|AC|=7.$$

并且

$$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2=98.$$

所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

9.9 根据下列条件求点B的未知坐标：

(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

解 （1）由两点间距离公式，有

$$|AB|=\sqrt{(6-4)^2+[2-(-7)]^2+(z-1)^2}=11.$$

于是 $(6-4)^2+[2-(-7)]^2+(z-1)^2=121,$

即 $(z-1)^2=36.$

故 $z_1=7,\ z_2=-5.$

（2）由两点间距离公式，有

$$|AB|=\sqrt{(x-2)^2+(-2-3)^2+(4-4)^2}=5.$$

于是 $(x-2)^2+(-2-3)^2+(4-4)^2=25,$

即 $(x-2)^2=0.$

故 $x=2.$

9.10 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 C。

解 由于 C 点在 z 轴上，因此设点 C 的坐标为 $(0,0,z)$。由题设和两点间距离公式，有

$$|AC|=|BC|,$$

即

$$\sqrt{[0-(-4)]^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+[z-(-2)]^2},$$

或 $16+1+(z-7)^2=9+25+(z+2)^2.$

解得 $$z=\frac{14}{9}.$$

因此点 C 的坐标为 $C\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

9.11 在 yOz 平面内求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点 D。

解 由于 D 点在 yOz 平面内，因此设点 D 的坐标为 $(0,y,z)$。由题设和两点间距离公式，有

$$|AD|=|BD|=|CD|,$$

即有方程组

$$\begin{cases}\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} \\ =\sqrt{(0-4)^2+[y-(-2)]^2+[z-(-2)]^2}, \\ \sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} \\ =\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2},\end{cases}$$

整理并化简，得

$$\begin{cases}3y+4z=-5, \\ 4y-z=6,\end{cases}$$

解得　　$y=1$，$z=-2$.

所以点D的坐标为$D(0,1,-2)$.

9.12　将$M_1(0,-1,3)$和$M_2(2,3,-4)$间的线段分为三等分，求分点坐标.

解　设线段M_1M_2的两个分点分别为$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$（如图9.2所示）.

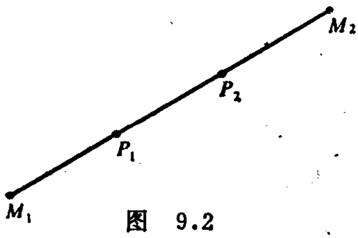


图　9.2

于是

$$\frac{M_1P_1}{P_1M_2}=\lambda=\frac{1}{2},$$

利用定比分点公式，有

$$x_1=\frac{0+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

$$y_1=\frac{-1+\frac{1}{2}\times 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$z_1=\frac{3+\frac{1}{2}(-4)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

以及$\dfrac{M_1P_2}{P_2M_2}=\lambda=2$，故

$$x_2=\frac{0+2\times 2}{1+2}=\frac{4}{3},$$

$$y_2=\frac{-1+2\times 3}{1+2}=\frac{5}{3},$$

$$z_3=\frac{3+2(-4)}{1+2}=\frac{-5}{3}.$$

因此所求的分点坐标为

$$P_1\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\qquad P_2\left(\frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right).$$

9.13 设三角形的顶点是$A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,12)$，求各中线的长.

解 设BC、CA、AB的中点分别为D、E、F.

根据中点坐标公式，有

$$x=\frac{11+5}{2}=8,$$

$$y=\frac{1+3}{2}=2,$$

$$z=\frac{12+8}{2}=10,$$

即求得$D(8,2,10)$，同理可求出另外两个中点

$$E\left(\frac{7}{2},\ 3,6\right),\qquad F\left(\frac{13}{2},\ 4,4\right).$$

利用两点间距离公式，有

$$|AD|=\sqrt{(8-2)^2+(2-5)^2+(10-0)^2}=\sqrt{145},$$

$$|BE|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-11\right)^2+(3-3)^2+(6-8)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{241},$$

$$|CF|=\sqrt{\left(\frac{13}{2}-5\right)^2+(4-1)^2+(4-12)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{301}.$$

因此所求的三条中线的长分别为

$$\frac{1}{2}\sqrt{301},\qquad \sqrt{145},\qquad \frac{1}{2}\sqrt{241}.$$

矢量代数初步

9.14 在平行四边形$ABCD$内，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示矢量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里$M$是平行四边形对角线的中点.

解 由矢量的运算，得

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\qquad \overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\qquad \overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

9.15 $ABCDEF$是一正六边形，O是它的中心，则在矢量组：

（1）$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$；

（2）$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$；

（3）$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BA}$

中，哪些是相等矢量？哪些是相反矢量？

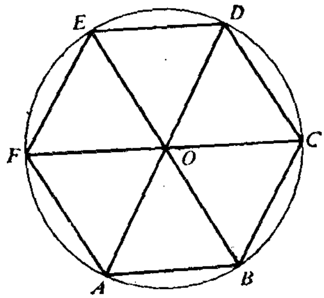


图 9.3

解 （1）本矢量组中没有相等的矢量.

互为相反的矢量有：

$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OE}$，

以及 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OF}$.

（2）本矢量组中没有相等的矢量.

互为相反的矢量有：

$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{EF}$.

（3）本矢量组中没有相等的矢量.

互为相反的矢量有：

$\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{FE}$.

9.16 一个矢量的终点在点 $B(2, -1, 7)$，它在坐标轴上的投影顺次是 4，-4 和 7．求这个矢量的起点 A 的坐标.

解 设起点 $A(x, y, z)$，于是

$2 - x = 4$，

$-1 - y = -4$，

$7 - z = 7$，

因此 $x = -2$，$y = 3$，$z = 0$，

即所求起点为 $A(-2, 3, 0)$.

9.17 已知$A(4,1,3)$，$B(2,-5,1)$，$C(3,7,-5)$. 试写出矢量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$的坐标表达式.

解 根据公式

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

有

$$\overrightarrow{AB}=(2-4)\boldsymbol{i}+(-5-1)\boldsymbol{j}+(1-3)\boldsymbol{k}$$
$$=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{BA}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AC}=(3-4)\boldsymbol{i}+(7-1)\boldsymbol{j}+(-5-3)\boldsymbol{k}$$
$$=-\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{CB}=(2-3)\boldsymbol{i}+(-5-7)\boldsymbol{j}+[1-(-5)]\boldsymbol{k}$$
$$=-\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}.$$

9.18 非零矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$应当具有什么特点才满足下列关系式：

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；

（4）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（5）$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

解 （1）$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$互相垂直；

（2）$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$方向相同；

（3）方向相反而且$|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$；

（4）方向相反；

（5）方向相同.

9.19 给定两点 $M_1(2, 5, -3)$和 $M_2(3, -2, 5)$，设在 M_1M_2上的一点M满足$\overrightarrow{M_1M} = 3\ \overrightarrow{MM_2}$，求矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标.

解 因为

$$\frac{\overrightarrow{M_1M}}{MM_2} = \lambda = 3,$$

所以由定比分点坐标公式可求得点M的坐标，即

$$x = \frac{2 + 3 \times 3}{1 + 3} = \frac{11}{4},$$

$$y = \frac{5 + 3(-2)}{1 + 3} = -\frac{1}{4},$$

$$z = \frac{-3 + 3 \times 5}{1 + 3} = 3.$$

于是点M坐标为$M\left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 3\right)$，且原点坐标为$O(0, 0, 0)$，因此矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标为

$$\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{11}{4} - 0, -\frac{1}{4} - 0, 3 - 0\right\}$$

$$= \left\{\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 3\right\}.$$

9.20 已知两矢量

$\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 9\boldsymbol{k}$,

试求：（1）$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$，（2）$3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

解 （1）因为

$$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = (6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}) + 2(3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 9\boldsymbol{k})$$

$$= 12\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k},$$

所以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=12\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$。

（2）因为

$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})-2(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k})$$
$$=12\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+48\boldsymbol{k},$$

所以 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=12\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+48\boldsymbol{k}$。

9.21 已知$\triangle ABC$，求证：$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$。

证 根据矢量的运算法则，有

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA},$$

又 $$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB},$$

所以 $$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB},$$

因此 $$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0.$$

9.22 在正六边形$ABCDEF$中，已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$

试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$来表示矢量$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FA}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$。

解 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EF}=-\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{FA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=2\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AE}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

9.23 已知两个非零矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，用几何法和代数法分别求出矢量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$-\boldsymbol{a}$的和。

解 几何法：

由作图得出$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$-\boldsymbol{a}$的和为$\boldsymbol{a}$(图9.4)。

代数法：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$。

9.24 设已给矢量