

高等数学 基本教程

3 积分与级数

[法] J. 奎奈 著

唐兆亮 郭书春 译

高等教育出版社

[法] J. 奎奈 著

高等数学基本教程

3 积分与级数

唐兆亮 郭书春 译

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据法国J. Quinet著«Cours élémentaire de mathématiques supérieurs 3-Calcul intégral et séries»(dunod, 1976)一书译出的,内容主要是积分和级数,可供工科高等院校特别是电类专业的师生与工程技术人员参考。

[法] J. 奎奈 著
高等数学基本教程

3 积分与级数

唐兆亮 郭书春 译

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168·1/32 印张 9 字数 210 000
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数 0001—1'640

ISBN 7-04-009771-1/O·301

定价 1.45元

目 录

第一章 计算原函数的实用方法	1
1.1 引言	1
1.2 换元	2
1.3 分部积分的应用	3
1.4 例	4
1.5 同时应用两个基本方法	10
1.6 第一类简单被积函数的原函数	12
1.7 第二类简单被积函数的原函数	13
1.8 特殊方法	14
1.9 例	15
1.10 有理函数与指数函数的复合函数	20
练习	21
第二章 三角积分	23
2.1 一般方法	23
2.2 例	24
2.3 特殊方法	27
2.4 形如 $I_{p,q} = \int \cos^p x \sin^q x dx$ 的原函数, 其中 p 和 q 都是整数	28
2.5 形如 $I_m = \int \sin^m x dx$ 和 $J_m = \int \cos^m x dx$ 的原函数, 其中 m 是自然数	29
2.6 形如 $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ 及 $J_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ 的原函数, 其中 n 为非零自然数	32
2.7 例	33
2.8 形如 $I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx$ 的原函数, 其中 n 是整数	35

2.9 Wallis 积分	36
练习	38
第三章 阿贝尔积分	40
3.1 形如 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的原函数	40
3.2 例	41
3.3 形如 $I = \int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的原函数	42
3.4 形如 $I = \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$ 的原函数	43
3.5 例	44
3.6 形如 $I = \int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 的原函数, 其中 R 是两个未定元的有理分式	45
3.7 例	46
3.8 形如 $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 的原函数, 其中 R 是两个未定元的有理分式	47
3.9 例	47
练习	48
第四章 有限展开	50
4.1 控制关系	50
4.2 相似关系	51
4.3 优势关系	52
4.4 等价关系	53
4.5 在无穷大邻域的函数的比较	58
4.6 有限展开的定义	59
4.7 例	62
4.8 有限展开的积分	63
4.9 泰勒-杨公式	64
4.10 例	66
4.11 常用函数的有限展开	67
4.12 复合函数的有限展开	68
4.13 主部	70

4.14	求主部的例子	71
	练习	72
第五章 不定型的研究		74
5.1	概论	74
5.2	应用主部的例子	75
5.3	导数的应用	80
5.4	应用有限展开的例子	82
	练习	85
第六章 广义积分		87
6.1	在形如 $[a, +\infty)$ 的区间上的积分	87
6.2	非负实值函数的情况	90
6.3	绝对收敛和半收敛	93
6.4	广义积分的计算方法	94
6.5	在形如 $]-\infty, b]$ 的区间上的积分	96
6.6	整个区间 \mathcal{R} 上的积分	96
6.7	非有界函数的积分	100
6.8	函数在积分限内变为无限的情形	103
	练习	104
第七章 数值级数		107
7.1	定义	107
7.2	几何级数	108
7.3	从某一序号开始定义的级数	109
7.4	关于级数的线性运算	109
7.5	级数的项的有限集合的改变	110
7.6	收敛的必要条件	111
7.7	柯西准则	112
7.8	级数和的计算	112
7.9	非负实数级数的比较	114
7.10	非负实数级数的直接比较	115
7.11	级数与积分的比较	116
7.12	柯西法则	118

7.13	黎曼法则	120
7.14	级数的对数比较	121
7.15	达朗贝尔法则	122
7.16	绝对收敛	124
7.17	交错级数	124
7.18	最后注意	126
	练习	128
第八章 整级数		130
8.1	函数级数	130
8.2	简单收敛和一致收敛	130
8.3	一致收敛级数的性质	132
8.4	收敛区间	133
8.5	例	134
8.6	整级数的导数和积分	135
8.7	整级数的代数运算	136
8.8	可展成整级数的函数	138
8.9	麦克劳林级数	140
8.10	复变数函数	143
8.11	二项式级数	144
8.12	整级数的前	147
8.13	在数值级数上的应用	149
	练习	150
第九章 傅立叶级数		152
9.1	三角级数	152
9.2	正交函数	154
9.3	傅立叶级数	155
9.4	勒热纳-狄利克雷定理	157
9.5	任意周期的情况	159
9.6	傅立叶系数的实际计算	160
9.7	三角锯齿状函数	164
9.8	锯齿状函数	166
9.9	矩形信号	168

9.10	整流为交流半周的电流	169
9.11	几个电学结果	171
9.12	傅立叶级数的复数形式	172
9.13	锯齿状函数的复数展开	174
9.14	指数信号	175
9.15	整流成两个交流半周的电流	176
9.16	导数的傅立叶系数	178
9.17	原函数的傅立叶系数	180
9.18	平移的傅立叶系数	181
9.19	线性运算	183
9.20	卷积	183
9.21	帕斯瓦尔等式	184
9.22	记号	186
9.23	频谱	187
9.24	谱包络曲线	189
9.25	信号的分析	191
9.26	梯形信号的分析	192
9.27	矩形信号的分析	194
9.28	三角形信号的分析	197
9.29	正弦脉冲信号的分析	199
	练习	202
第十章	傅立叶变换	207
10.1	卷积方程	207
10.2	傅立叶变换	207
10.3	傅立叶反演公式	209
10.4	例	209
10.5	偶函数或奇函数的情况	211
10.6	基本运算	212
10.7	卷积	213
10.8	积	214
10.9	帕斯瓦尔等式	215

练习解答	216
第一章	216
第二章	222
第三章	226
第四章	233
第五章	239
第六章	246
第七章	254
第八章	259
第九章	267
常用原函数	277
常用整级数展开	279

第一章 计算原函数的实用方法

1.1 引言

在本章和下面两章中,我们给出许多计算原函数的方法.

我们已经看到,在某些情况下,从一些简单函数的求导可直接给出原函数.借助前一章的结果,我们完成了(从导数表获得的)原函数表.例如,对数函数的导数是 $x \mapsto \frac{1}{x}$,但是,如果 x 是严格小于零的,复合函数的求导法则指出, $x \mapsto \ln(-x)$ 的导数仍是 $x \mapsto \frac{1}{x}$. 因此,在所有情况下,都可以写成

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

同样,函数 $f: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, 至少在区间 $] -1, +1[$ 上是反双曲正切函数*的导数. 但是

$$\operatorname{Argth}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$

而后面这个表达式是 f 在区间 $] -\infty, -1[$ 、 $] -1, 1[$ 和 $] 1, +\infty[$ 上的一个原函数.

在第 277—278 页上,我们将找到原函数表,同样,它是由一些常用公式来组成的.当然,同常用导数表一样,也要记住常用原函数表.任何理论知识都不可能代替记忆的力量.

实际上,我们借助于下列方法把原函数的计算化为能表示成

* 原文为 fonction argument tangente hyperbolique——译者注.

原函数表中的函数:

- 换元;
- 分部积分;
- 分解为最简单函数的线性组合.

1.2 换元

在积分中,换元法当然适用于其上限为函数时的积分的情况.因此,我们可以使用它求原函数.

例

1. 试求 $I = \int \cos 3x dx$.

微分元很象 $\cos u du = d(\sin u)$. 为了化成这个简单的形式,令 $u = 3x$, 由此得 $dx = du/3$, 因而

$$I = \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin u = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

2. 试求 $I = \int e^{-2x} dx$.

微分元很象 $e^u du = d(e^u)$. 因为 dx 不是 $-2x$ 的微分, 令 $u = -2x$, 由此得 $dx = -du/2$, 因此,

$$I = \int e^u \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-2x}.$$

3. 试求 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$.

微分元的形式为 du/\sqrt{u} . 令 $1-4x = u$, 由此得 $-4dx = du$ 及 $dx = -du/4$, 因此

$$I = \int \frac{-du/4}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4} 2\sqrt{u} = -\frac{1}{2} \sqrt{1-4x}.$$

4. 试求 $I = \int \frac{dx}{5x-2}$.

微分元的形式为 du/u . 令 $u=5x-2$, 得 $dx=du/5$,

$$I = \int \frac{du/5}{u} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{5} \ln |u| = \frac{1}{5} \ln |5x-2|.$$

5. 试求 $I = \int (3x^2+4)^3 x dx$.

令 $u=3x^2+4$, 则 $6x dx=du$, $x dx=du/6$. 由此得

$$I = \int u^3 \frac{du}{6} = \frac{1}{6} \int u^3 du = \frac{1}{6} \frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{6} \frac{u^4}{4} = \frac{1}{24} (3x^2+4)^4.$$

6. 试求 $I = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$, 其中 a 是严格为正的实数.

化为原函数表中的函数, 令 $x=ay$, 得

$$I = \frac{a}{a^2} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} y = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a}.$$

这个结果经常用到, 应该记住. 而且, 这个公式已经列入原函数表内!

例如, 我们计算

$$I = \int \frac{dx}{5+3x^2}.$$

提出因子 $\frac{1}{3}$ 后, 即化为上述形式:

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+5/3} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} x = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} x.$$

7. 试求 $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$.

因为 $dx/x = d(\ln x)$, 令 $u = \ln x$, 那么

$$I = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

1.3 分部积分的应用

设 u 和 v 是两个连续可导函数, 关系

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

或者

$$d(uv) = vdu + u dv$$

表明

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

因此, 当原函数为形式 $\int u dv$ 时, 上述公式表明, 可以化为 $\int v du$ 的计算. 这个新的原函数可能比第一个原函数更容易计算. 相反, 也可以尝试颠倒 u 和 v 的位置, 再进行计算.

这个方法被用来计算下列函数的原函数.

- a) 多项式函数与指数函数的积;
- b) 多项式函数与正弦函数或余弦函数的积;
- c) 指数函数与正弦函数或余弦函数的积;
- d) 多项式函数与对数函数的积;
- e) 反三角函数: $\text{Arcsin}, \text{Arccos}, \text{Arctg}$, 与反双曲函数 $\text{Argsh}, \text{Argch}, \text{Argth}$;
- f) 某些平方根函数.

在某些情况下, 特别是对用递推法求原函数时, 需要接连几次分部求积分.

1.4 例

1. 试求 $I = \int x e^{2x} dx$.

令 $u = e^{2x}$, $dv = x dx$, 那么 $du = 2e^{2x} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$, 则

$$I = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x^2 e^{2x} dx.$$

由于最后这个原函数比 I 更复杂, 我们交换上面 u 与 v 的地位, 而令 $u = x, dv = e^{2x} dx$; 那么, $du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x}$, 则

$$I = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} = (2x-1)\frac{e^{2x}}{4}.$$

2. 试计算 $I = \int (x^2 + 3x)e^{-x} dx$.

连续两次分部积分得

$$\begin{aligned} I &= -(x^2 + 3x)e^{-x} + \int (2x + 3)e^{-x} dx \\ &= -(x^2 + 3x)e^{-x} - (2x + 3)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \\ &= (-x^2 - 5x - 5)e^{-x}. \end{aligned}$$

实际上, 宁可用下列方法计算: 由于已知 I 是 e^{-x} 与二次多项式函数的积, 我们用待定系数法将 I 写成

$$I = (ax^2 + bx + c)e^{-x},$$

将积分等式两端求导, 得

$$(2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (x^2 + 3x)e^{-x}.$$

约去 e^{-x} 得

$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c = x^2 + 3x.$$

由此得

$$a = -1, 2a - b = 3, -b + c = 0,$$

最后得 $a = -1, b = -5, c = -5$.

恰好也得到了上述结果. 但计算导数比计算原函数更容易!

3. 试求 $I = \int x \sin 2x dx$.

令 $u = x, dv = \sin 2x dx$, 那么 $du = dx, v = -\frac{1}{2} \cos 2x$, 则

$$\begin{aligned}
 I &= uv - \int v du = x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\
 &= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x.
 \end{aligned}$$

4. 试求 $I = \int x \cos^2 x dx$.

用 $\frac{1 + \cos 2x}{2}$ 代替 $\cos^2 x$, 那么

$$I = \frac{1}{2} \int x(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{4} \int x \cos 2x d(2x).$$

分部积分得

$$I = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x.$$

5. 试求 $I = \int (x^2 - x) \sin \frac{x}{2} dx$.

接连两次分部积分, 我们看出 I 具有下列形式:

$$I = (ax^2 + bx + c) \cos \frac{x}{2} + (a'x^2 + b'x + c') \sin \frac{x}{2}.$$

再用一次待定系数法, 并且对上述函数求导得

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{a'}{2} x^2 + \left(\frac{b'}{2} + 2a \right) x + \frac{c'}{2} + b \right] \cos \frac{x}{2} \\
 &+ \left[-\frac{a}{2} x^2 + \left(2a' - \frac{b}{2} \right) x + b' - \frac{c}{2} \right] \sin \frac{x}{2}.
 \end{aligned}$$

因此,

$$a = -2, \quad a' = 0,$$

$$b = 2, \quad b' = 8,$$

$$c = 16, \quad c' = -4.$$

最后得

$$I = (-2x^2 + 2x + 16) \cos \frac{x}{2} + (8x - 4) \sin \frac{x}{2}.$$

6. 试求

$$C = \int (2x^2 - 1) \cos 3x dx \quad \text{及} \quad S = \int (2x^2 - 1) \sin 3x dx.$$

我们要同时计算这两个原函数：事实上，由欧拉公式得

$$C + jS = \int (2x^2 - 1) e^{3jx} dx.$$

这样，我们把原函数化成了指数函数与多项式函数的积的情况，那么结果是形式

$$C + jS = (ax^2 + bx + c) e^{3jx}.$$

对积分等式两端求导得

$$[(2ax + b) + 3j(ax^2 + bx + c)] e^{3jx} = (2x^2 - 1) e^{3jx}.$$

由此得

$$3ajx^2 + (2a + 3jb)x + b + 3jc = 2x^2 - 1.$$

两个相等的多项式函数有相同的系数：

$$3aj = 2, \quad \text{即} \quad a = -\frac{2j}{3},$$

$$2a + 3jb = 0, \quad \text{即} \quad b = \frac{4}{9},$$

$$b + 3jc = -1, \quad \text{即} \quad c = -\frac{1+b}{3j} = \frac{13j}{27}.$$

因此，

$$C + jS = \left(-\frac{2j}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{13j}{27} \right) (\cos 3x + j \sin 3x).$$

将实部和虚部分开，最后得 C 和 S ：

$$C = \frac{4}{9}x \cos 3x + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{27} \right) \sin 3x,$$

$$S = \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{27} \right) \cos 3x + \frac{4}{9}x \sin 3x.$$

7. 试计算 $I = \int e^{2x} \sin 3x dx.$

令 $u = e^{2x}$, $dv = \sin 3x dx$, 那么 $du = 2e^{2x} dx$, $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$, 而

$$I = uv - \int v du = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

这样我们得到了类似于 I 的原函数. 仍然令 u 为指数函数 (否则, 将得到 $I = I$), 再分部积分:

$u = e^{2x}$, $dv = \cos 3x dx$, $du = 2e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{3} \sin 3x$. 因此,

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx.$$

不过, 最后一项的原函数 (除系数之外) 就是 I , 因此

$$I = \frac{e^{2x}}{3} \left(-\cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x \right) - \frac{4}{9} I,$$

最后得

$$I = \frac{3}{13} e^{2x} \left(-\cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x \right).$$

更一般地, 设 a 和 b 是两个非零实数, 我们可同时计算

$$C = \int e^{ax} \cos bx dx, \quad S = \int e^{ax} \sin bx dx.$$

事实上, 借助欧拉公式, 我们可写成

$$C + jS = \int e^{(a+jb)x} dx.$$

然而, 复指数的指数函数的原函数, 其计算方法同实数指数或是纯虚数指数的情况一样, 因此,

$$C + jS = \frac{1}{a + jb} e^{(a+jb)x} = \frac{e^{ax}}{a + jb} (\cos bx + j \sin bx).$$

只要将实部和虚部分开, 就可得到

$$C = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx),$$

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$