高等数学基本教程

3 积分与级数

[法] J. 奎奈 著

唐兆亮 郭书春 译

高等教育出版社

〔法〕 J. 奎奈 著

高等数学基本教程

3 积分与级数

唐兆亮 郭书春 译

高等教育出版社

内容提要

本书是根据法国J. Quinet 著《Cours élémentaire de mathématiques supérieurs 3-Calcul intégral et séries》(dunod, 1976) 一书译出的，内容主要是积分和级数，可供工科高等院校特别是电类专业的师生与工程技术人员参考。

〔法〕J. 奎奈 著

高等数学基本教程

3 积分与级数

唐兆亮 郭书春 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 210 000

1989 年 10 月第 1 版 1989 年 10 月第 1 次印刷

印数 0001—1 640

ISBN 7-04-000771-1/O·301

定价 [illegible].45 元

目　　录

第一章　计算原函数的实用方法

1.1　引言

在本章和下面两章中，我们给出许多计算原函数的方法.

我们已经看到，在某些情况下，从一些简单函数的求导可直接给出原函数. 借助前一章的结果，我们完成了(从导数表获得的)原函数表. 例如，对数函数的导数是 $x \longmapsto \frac{1}{x}$，但是，如果 x 是严格小于零的，复合函数的求导法则指出，$x \longmapsto \ln(-x)$ 的导数仍是 $x \longmapsto \frac{1}{x}$. 因此，在所有情况下，都可以写成

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

同样，函数 f：$x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$，至少在区间 $]-1, +1[$ 上是反双曲正切函数*的导数. 但是

$$\mathrm{Argth}\, x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$

而后面这个表达式是 f 在区间 $]-\infty, -1[$、$]-1, 1[$ 和 $]1, +\infty[$ 上的一个原函数.

在第 277—278 页上，我们将找到原函数表，同样，它是由一些常用公式来组成的. 当然，同常用导数表一样，也要记住常用原函数表. 任何理论知识都不可能代替记忆的力量.

实际上，我们借助于下列方法把原函数的计算化为能表示成

* 原文为 fonction argument tangente hyperbolique——译者注.

原函数表中的函数：

——换元；

——分部积分；

——分解为最简单函数的线性组合.

1.2 换元

在积分中，换元法当然适用于其上限为函数时的积分的情况. 因此，我们可以使用它求原函数.

例

1. 试求 $I=\int\cos 3x dx$.

微分元很象 $\cos u du=d(\sin u)$. 为了化成这个简单的形式，令 $u=3x$，由此得 $dx=du/3$，因而

$$I=\int\cos u\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int\cos u du=\frac{1}{3}\sin u=\frac{1}{3}\sin 3x.$$

2. 试求 $I=\int e^{-2x}dx$.

微分元很象 $e^u du=d(e^u)$. 因为 dx 不是 $-2x$ 的微分，令 $u=-2x$，由此得 $dx=-du/2$，因此，

$$I=\int e^u\left(-\frac{du}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int e^u du=-\frac{1}{2}e^u=-\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

3. 试求 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$.

微分元的形式为 $du/\sqrt{u}$. 令 $1-4x=u$，由此得 $-4dx=du$ 及 $dx=-du/4$，因此

$$I=\int\frac{-du/4}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{4}2\sqrt{u}=-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}.$$

4. 试求 $I=\int\frac{dx}{5x-2}$.

微分元的形式为 du/u. 令 $u=5x-2$, 得 $dx=du/5$,

$$I=\int\frac{du/5}{u}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{5}\ln|u|=\frac{1}{5}\ln|5x-2|.$$

5. 试求 $I=\int(3x^2+4)^3x\,dx$.

令 $u=3x^2+4$, 则 $6x\,dx=du$, $x\,dx=du/6$. 由此得

$$I=\int u^3\frac{du}{6}=\frac{1}{6}\int u^3du=\frac{1}{6}\frac{u^{3+1}}{3+1}=\frac{1}{6}\frac{u^4}{4}=\frac{1}{24}(3x^2+4)^4.$$

6. 试求 $I=\int\frac{dx}{x^2+a^2}$, 其中 a 是严格为正的实数.

化为原函数表中的函数, 令 $x=ay$, 得

$$I=\frac{a}{a^2}\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{Arctg}y=\frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a}.$$

这个结果经常用到, 应该记住. 而且, 这个公式已经列入原函数表内!

例如, 我们计算

$$I=\int\frac{dx}{5+3x^2}.$$

提出因子 $\frac{1}{3}$ 后, 即化为上述形式:

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+5/3}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}x=\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{Acrtg}\sqrt{\frac{3}{5}}x.$$

7. 试求 $I=\int\frac{\ln x}{x}dx$.

因为 $dx/x=d(\ln x)$, 令 $u=\ln x$, 那么

$$I=\int u\,du=\frac{u^2}{2}=\frac{(\ln x)^2}{2}.$$

1.3 分部积分的应用

设 u 和 v 是两个连续可导函数, 关系

$$(uv)'=u'v+v'u,$$

或者

$$d(uv)=vdu+udv$$

表明

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

因此，当原函数为形式$\int udv$时，上述公式表明，可以化为$\int vdu$ 的计算. 这个新的原函数可能比第一个原函数更容易计算. 相反，也可以尝试颠倒 u 和 v 的位置，再进行计算.

这个方法被用来计算下列函数的原函数.

a）多项式函数与指数函数的积；

b）多项式函数与正弦函数或余弦函数的积；

c）指数函数与正弦函数或余弦函数的积；

d）多项式函数与对数函数的积；

e）反三角函数：Arcsin, Arccos，Arctg，与反双曲函数 Argsh, Argch, Argth；

f）某些平方根函数.

在某些情况下，特别是对用递推法求原函数时，需要接连几次分部求积分.

1.4 例

1. 试求$I=\int xe^{2x}dx.$

令 $u=e^{2x}, dv=xdx$，那么 $du=2e^{2x}dx$，$v=\frac{x^2}{2}$，则

$$I=uv-\int vdu=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\int x^2e^{2x}dx.$$

由于最后这个原函数比 I 更复杂，我们交换上面 u 与 v 的地位，而令 $u=x, dv=e^{2x}dx$；那么，$du=dx, v=\frac{1}{2}e^{2x}$，则

$$I=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{e^{2x}}{4}=(2x-1)\frac{e^{2x}}{4}.$$

2. 试计算 $I=\int(x^2+3x)e^{-x}dx$.

连续两次分部积分得

$$I=-(x^2+3x)e^{-x}+\int(2x+3)e^{-x}dx$$

$$=-(x^2+3x)e^{-x}-(2x+3)e^{-x}+2\int e^{-x}dx$$

$$=(-x^2-5x-5)e^{-x}.$$

实际上，宁可用下列方法计算：由于已知 I 是 e^{-x} 与二次多项式函数的积，我们用待定系数法将 I 写成

$$I=(ax^2+bx+c)e^{-x},$$

将积分等式两端求导，得

$$(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(x^2+3x)e^{-x}.$$

约去 e^{-x} 得

$$-ax^2+(2a-b)x+b-c=x^2+3x.$$

由此得

$$a=-1,\ 2a-b=3,\ -b+c=0,$$

最后得 $a=-1, b=-5, c=-5$.

恰好也得到了上述结果. 但计算导数比计算原函数更容易！

3. 试求 $I=\int x\sin 2x dx$.

令 $u=x, dv=\sin 2x dx$，那么 $du=dx, v=-\frac{1}{2}\cos 2x$，则

$$I=uv-\int v\,du=x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x.$$

4. 试求$I=\int x\cos^2 x\,dx$.

用$\frac{1+\cos 2x}{2}$代替 $\cos^2 x$，那么

$$I=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{1}{4}\int x\cos 2x\,d(2x).$$

分部积分得

$$I=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x.$$

5. 试求$I=\int (x^2-x)\sin\frac{x}{2}dx$.

接连两次分部积分，我们看出 I 具有下列形式：

$$I=(ax^2+bx+c)\cos\frac{x}{2}+(a'x^2+b'x+c')\ \sin\frac{x}{2}.$$

再用一次待定系数法，并且对上述函数求导得

$$\left[\frac{a'}{2}x^2+\left(\frac{b'}{2}+2a\right)x+\frac{c'}{2}+b\right]\cos\frac{x}{2}$$

$$+\left[-\frac{a}{2}x^2+\left(2a'-\frac{b}{2}\right)x+b'-\frac{c}{2}\right]\sin\frac{x}{2}.$$

因此，

$$a=-2,\quad a'=0,$$

$$b=2,\quad b'=8,$$

$$c=16,\quad c'=-4.$$

最后得

$$I=(-2x^2+2x+16)\cos\frac{x}{2}+(8x-4)\sin\frac{x}{2}.$$

6. 试求

$$C=\int(2x^2-1)\cos 3x dx \quad 及 \quad S=\int(2x^2-1)\sin 3x dx.$$

我们要同时计算这两个原函数：事实上，由欧拉公式得

$$C+jS=\int(2x^2-1)e^{3jx}dx.$$

这样，我们把原函数化成了指数函数与多项式函数的积的情况，那么结果是形式

$$C+jS=(ax^2+bx+c)e^{3jx}.$$

对积分等式两端求导得

$$[(2ax+b)+3j(ax^2+bx+c)]e^{3jx}=(2x^2-1)e^{3jx}.$$

由此得

$$3ajx^2+(2a+3jb)x+b+3jc=2x^2-1.$$

两个相等的多项式函数有相同的系数：

$$3aj=2,\quad 即\ a=-\frac{2j}{3},$$

$$2a+3jb=0,\ 即\ b=\frac{4}{9},$$

$$b+3jc=-1,\ 即\ c=-\frac{1+b}{3j}=\frac{13j}{27}.$$

因此，

$$C+jS=\left(-\frac{2j}{3}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{13j}{27}\right)(\cos 3x+j\sin 3x).$$

将实部和虚部分开，最后得 C 和 S：

$$C=\frac{4}{9}x\cos 3x+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{27}\right)\sin 3x,$$

$$S=\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{13}{27}\right)\cos 3x+\frac{4}{9}x\sin 3x.$$

7. 试计算 $I=\int e^{2x}\sin 3x dx.$

令 $u=e^{2x}, dv=\sin 3x dx$，那么 $du=2e^{2x}dx$，$v=-\frac{1}{3}\cos 3x$，而

$$I=uv-\int v du=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx.$$

这样我们得到了类似于 I 的原函数. 仍然令 u 为指数函数(否则，将得到 $I=I$)，再分部积分:

$$u=e^{2x}, dv=\cos 3x dx, du=2e^{2x}dx, v=\frac{1}{3}\sin 3x.$$ 因此,

$$I=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

不过，最后一项的原函数(除系数之外)就是 I，因此

$$I=\frac{e^{2x}}{3}\left(-\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)-\frac{4}{9}I,$$

最后得

$$I=\frac{3}{13}e^{2x}\left(-\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right).$$

更一般地，设 a 和 b 是两个非零实数，我们可同时计算

$$C=\int e^{ax}\cos bx dx,\quad S=\int e^{ax}\sin bx dx.$$

事实上，借助欧拉公式，我们可写成

$$C+jS=\int e^{(a+jb)x}dx.$$

然而，复指数的指数函数的原函数，其计算方法同实数指数或是纯虚数指数的情况一样，因此，

$$C+jS=\frac{1}{a+jb}e^{(a+jb)x}=\frac{e^{ax}}{a+jb}(\cos bx+j\sin bx).$$

只要将实部和虚部分开，就可得到

$$C=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx),$$

$$S=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx).$$