非线性连续统力学

李松年　　黄执中　编著

北京航空學院出版社

内 容 简 介

本书按照理性力学的观点，以张量分析为工具，系统而详尽地介绍了非线性连续统力学的基本概念、体系、理论和方法。内容包括四部分：张量分析（含九章）；非线性连续统力学的基本理论（含五章）；特殊物质（含四章）；及四个附录。

本书可供高等理工科院校力学专业，应用数学，应用物理，材料科学，航空航天，化工，能源等专业的研究生和教师作教学参考书，对从事基本理论研究的力学工作者和有关科技工作者也是有益的。

非线性连续统力学
李松年　　黄执中　编著
责任编辑　郭维烈
北京航空学院出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京市昌平环球科技印刷厂印刷
*
787×1092　1/16　印张：34　字数：863千字
1987年12月第一版　1987年12月第一次印刷　印数：2500册
ISBN 7-81012-001-8
O·001
定价：5.60元

序

理性力学自从获得复兴和发展以来，它的观点，方法，风格和符号几乎对力学的所有分支都产生了深刻的影响。在某种意义上说，理性力学就是现代非线性连续统（介质）力学。

本书作者们曾为北京航空学院研究生不止一次开过这课程，并写有讲义。本书就是在这讲义的基础上修改补充而成的。它不仅介绍了有关问题的现状和结果，而且在某些地方还详细地包含了作者们的体会和看法。

我国在这方面的论著尚少。相信，本书将是研究生学习这门课程的有用参考书。它对从事基本理论研究的力学工作者也是有意义的。

郭 仲 衡

1986年7月于北京大学

前　　言

非线性连续统（介质）力学是现代力学中新兴的基础学科，是基础力学的重要组成部分。**非线性连续统力学**（*nonlinear continuum mechanics*，简称NCM）是研究连续统（介质或物体）在外界环境影响下的变形和运动的科学。外界环境包括接触力、重力、热变化、化学相互作用、电磁场效应以及其它的环境变化。在本书中，我们只讨论物体承受纯力学和温度变化的作用，也就是说，只讨论纯力学物质和热力物质两类情况。

目前NCM已经成为多门学科的统一理论基础，如固体力学、流体力学、材料科学、热力学等，同时在它的基础之上已经产生很多新兴的交叉、边缘学科，如生物力学、考虑电磁场与变形体和液状体相互作用的连续体电动力学等。因此学习NCM的有关基本概念、理论对于固体力学、流体力学、材料科学、应用物理、应用数学、无线电、压电传感器、宇宙物理和地球物理等专业的研究生和科研人员都是十分重要的。

为什么要研究NCM？为什么近些年来它发展迅速，并越来越受到人们的重视？归纳起来有两方面的因素：

1． 生产实践、技术革命的要求与推动。现代科学技术的发展，提出了很多新现象、新问题有待解决。这对于发展已经很成熟并有广泛应用的“线性模型”（线弹性理论和线性粘性流体理论）来讲，已经是无能为力了。这些新现象和新问题有两个特点：“深”和“广”。所谓“深”包括这样几种含意：一是非线性效应和时间效应的问题越来越突出，原来的线性理论和定常静态处理的办法很难得到满意的解答；二是宏观与微观结合，在更深的层次和更小的水准上来考虑物质的宏观性质；三是在确定性理论的范畴考虑统计性，或随机统计理论的确定化。所谓“广”有这样几种含意：一是指需要有更多的“模型”理论来反映和解决现实生活中复杂的现象和问题，仅仅采用两个古老的“线性模型”是远远不够的；二是指耦联相互渗透性越来越明显，这种耦联效应不仅存在于固体与流体，固体与气体，固体、液体和气体之间，而且存在于电磁场与变形体、液状体之间，存在于生物体与非生物体之间等。原来的“孤立”、“狭隘”模型碰到了越来越多的矛盾。鉴于上述原因，客观实际就提出了需要建立一种“新”的模型理论，它既能包括已有的两种“线性模型”，又能解决上面提到的问题。NCM就是这样一种理论。它是根据统一的观点，利用严格的数学工具推导出来的理论，它不仅综合了固体力学与流体力学的精华（不是简单地机械处理，而是有机地统一），而且还包括了更为广泛的物质。

2． 在客观上具备了新理论产生和发展的条件。这些条件有这样几个方面：现代数学（如张量几何、拓扑学、非线性泛函、不变量理论、群论、随机理论等）及力学理论本身的发展；固体物理学的进展；计算机及数值计算技术，尤其是有限元技术的出现与发展。计算机技术的发展对力学的冲击不只是反映在使过去许多不能求解的力学问题得以解决，而且反映在要求力学理论更概括更统一地能包括更多的复杂现象，考虑得更仔细以适应计算力学的发展。非线性连续统力学和计算力学作为力学的两个重要组成部分将沿着相互依存、相互促进的方向向前发展。当然，这两者与实验力学的发展也是紧密相关的。理论，计算和实验是力学发展

的三大支柱。

物质结构理论和连续统理论 我们知道，物理中有两种基本理论：微观理论和宏观理论。前者就是物质结构理论，后者就是连续统理论。物质结构理论认为物质是由分子构成，而分子则由原子构成，原子又由原子核和电子构成，原子核又由基本粒子构成。这是一种在数学上无穷尽的分割，而在物理上则得到无穷尽新性质的过程。因此我们说物质是离散的，非连续的。连续统理论的基本概念是在数学上的无穷尽的分割，而在物理上又不失去其任何定义性质的连续场的概念。场可以是运动、物质、力、能和电磁现象所在的场所。这种理论又叫唯象理论（或现象宏观理论，或连续场论）。这两种理论是不同的，有不同的用处。在此我们不准备详细讨论它们之间的异同和关系，我们只是要说明，在实际生活中我们碰到的总是一块物质，感兴趣的是该物质在工作环境条件下的宏观行为。要确定物质宏观行为有两种途径：一是根据微观基本粒子理论，一是根据宏观连续统理论。根据微观理论我们已经得到了很多有关物质宏观行为的知识。譬如，我们把分子动能的统计平均值视为温度等。但是，在实际中确定物质的宏观行为多是根据宏观理论，这是因为由微观理论直接导出物质的宏观行为有些困难：1.基本粒子法则本身尚未完全建立，既使根据目前人们认识所及的基本法则能够建立，每一个分布性物体（或连续体）的理论每当发现基本粒子的一个新的性质时，势必得从头进行修改。但粒子观点的无穷尽发展从认识论的角度来讲又是不可避免的；2.数学上有很多困难目前难以克服。另外，由于物质结构的复杂性，常采用统计方法，这样一来就又失去了从粒子根本法则出发的原来意义；3.基本粒子的细节与物质的宏观力学行为无直接关联，粒子结构区别很大的物体在对应力的响应上往往区别不大。宏观理论的合理性主要依据于宏观实践，这种合理性的根源最重要的可能是来自于在连续理论中直接采用不变性要求和平衡律。采用宏观理论的前提是：所处理的物体，其最小特征长度较微观的特征长度，譬如晶体中的原子间距，气体的平均自由程等要大得多。需要指出的是微观尺度不一定是指原子尺度，譬如我们可以将连续统理论用于颗粒状（如砂子）物质，只要所论区域的尺寸远大于颗粒本身的尺寸就成。当前力学发展的一个重要特点是宏观与微观的结合，即在宏观理论中考虑微观结构效应，以便更精确地确定物质的宏观行为。

在连续统力学中，物质的特征是用在本构变量间建立某些泛函关系（通称为本构方程）的方式来描述的。对这些变量的选择以及对这些方程的限制都是建立在一些本构公理以及力学和热力学的基本定律基础之上的。幸运的是，在某些非常一般的公理条件下，我们能够得到确定的和具体的物质理论。这说明连续统力学理论是建立在两个强有力的基础之上的，这就是：基本定律和本构理论。

运动的基本定律 这是一些不管物体的物质组成如何，所有物体都必须服从的基本运动定律。它们是我们对真实世界经验的总结。在涉及到热力现象和电磁现象的范畴，有这样10个基本定律：1.质量守恒律；2.动量平衡律；3.动量矩平衡律；4.能量守恒律；5.熵不等式；6.Gauss定律；7.Faraday守恒律；8.磁通量守恒律；9.Ampére 定律；10.电荷守恒律。在经典力学的范畴内，即不计相对论和量子效应的情况下，这些定律是没有问题的。顺便指出，连续统力学理论可以考虑相对论和量子力学效应。在本书中仅讨论热力物质，因此可以不考虑有关电磁效应的基本定律。在热力物质中，若又不计及温度变化的效应，即纯力学物质，这时就只需考虑前面四个基本定律。研究连续体运动的基本定律，必然与连续体本身的变形和运动交织在一起，这是纯粹几何学的问题。在非线性连续统力学中，运动学是其中的关键

和难点。

本构理论 具有同样几何形状的不同物质体对于相同载荷的响应，一般是不同的。为了计及不同物质的性质，必须构造一组本构方程。这些方程依赖于所要求（期望）物理效应的性质和范畴。在构造和限制本构方程时，我们采用一些基本公理（见第十二、十四章）。然而最后所得到的方程还包含一些待定的物质参数，它们必须通过实验及／或统计力学的办法才能确定。一旦完成这项工作，理论就全完构成，并且可以提供实际使用。

本构方程只是理想物质的定义。譬如，线弹性理论，它假设一点的应力张量线性地依赖于从自然状态（零应力状态）推算出该点处微体所发生的长度和角度变化，它定义的是线性无限小弹性物质。又如线性粘性流体力学，它假设应力张量线性地依赖于长度和角度的瞬时变化率，它定义的是线性粘性流体。没有一种自然物体是完全弹性的物体，或完全的流体，也没有一种自然物体是完全刚性或完全不可压缩的。尽管如此，这并不能就降低了这两种特殊的线性模型的意义，因为每一种模型确实代表了相应实际自然物质的主要方面，并且在一定范围内具有一定的准确度。

有关NCM的概况，体系内容和特点，与新技术革命的关系，理论发展等见附录１。

本书是在李松年为北京航空学院固体力学专业研究生开设的“非线性连续介质力学”课程的同名讲义基础上补充、修改而成。在课程中，我们按照理性力学观点，以张量分析为工具，向研究生们介绍NCM的基本概念、理论和方法。期望研究生们在学完本课程后，掌握张量分析这一强有力的工具，建立起理性力学的一套基本概念、思想方法和基本理论体系，能够阅读现代力学的有关文献资料。自1982年起，经过五届研究生，两届固体力学助教进修班以及两届短训班的教学实践表明，上述要求是能够达到的。在教学过程中，大家对本课程表现出很大的兴趣，迫切期望能早日见到正式出版的教材，敦促作者将授课中补充的一些内容修订进教材中去，加之原来讲义印刷质量较差，体系上也需作些变动。正是在这种背景下，我们决定对82年版讲义进行修改，并幸运地能列入到正式出版计划中，使其能与让者见面。

本书内容分为四部分：第一部分为张量分析，即从第一章到第九章，由黄执中负责修改编写；第二部分为非线性连续统力学的基本理论，即从第十章到第十四章，第三部分为特殊物质，即从第十五章到第十八章，第四部分为附录，后三部分均由李松年负责修改编写。全书由李松年负责主编。

在编写张量分析部分时，我们有这样几点考虑：

（１）同时介绍间接法（核一标符号法）与直接法（抽象符号法），重点阐述抽象符号法。因为在推导某些较复杂的张量公式时，间接法系统且方便，而直接法表现物理（几何）量时概念清楚突出，书写形式简单清晰，它们各具优点。较早期的文献资料中，多采用间接法，近期的国际上流行的连续统力学文献资料中更多地采用直接法。目前中文书籍中，除郭仲衡教授著作以外，很少用抽象符号法叙述（当然除去杂志上论文不计）。因此本书在系统介绍这两种表示法的同时。用较多篇幅讨论直接法以适应目前国际及国内连续统力学现状及发展趋势的要求。

（２）考虑到张量分析已经作为独立的一门课，它的内容涉及到很多领域和学科。为了使本书这一部分内容对有关专业的研究生，科学工作者，工程技术人员也有参考价值，我们增加了两章内容，即第八章的曲面几何学和第九章的Riemann几何与仿射连络空间。第八章

对于研究非线性壳体理论是必须要知道的。增加第九章内容是考虑到目前在连续统力学基本理论及应用研究中，涉及到率型的愈来愈多，这就涉及到Riemann几何，故本书对$\mathscr{L}$ie微分作了较多的阐述。又目前连续统力学的发展趋势之一是宏观与微观的结合，这就涉及到非Riemann几何。为了适应不同专业、学科，不同学时等要求，在编写本书时，内容编排得使之具有一定的相对独立性和伸缩性，读者可以根据需要自行选取相应部分。

下面我们给出一个大致的讲授安排建议：如只用间接法讲授，则主要讲第一、二、三及七诸章。如用直接法讲授，则主要讲第一、四、五、七诸章。第六章基本上是线性变换内容，若读者熟悉线性代数中这一部分内容，则可不讲此章。

（3）增加了我们自己的一些研究成果：如将n维欧氏空间中直线坐标系中著名的Schouten公式推广为抽象符号表达式，从而可适用于n维欧氏空间中的任意曲线坐标系以及n维Riemann空间；又如任意曲线坐标系中的物理分量，这是迄今尚未完满解决的问题，本书对此作了系统、详细的阐述，并提出作者自己的方法，且从中得出了目前所有的应力、应变物理分量的公式；本书还提出了固定坐标系自然基向量的视动导数的概念和公式，从而导出了高阶张量的$\mathscr{L}$ie微分的抽象符号公式及分量公式。

在编写NCM的基本理论和特殊物质这两部分时，我们有如下考虑：

（1）重点采用抽象符号法。

（2）在运动学（1）这一章，我们除了对非线性变形几何学的常规内容作了详尽系统的叙述以外，特别对运动的描述，相对变形给予仔细的考虑。通常的连续统力学书籍只讨论物质描述和空间描述，而非牛顿流体力学则需要借助于相对变形描述这一工具。另外，为了便于在本构理论中对物质进行分类讨论，需要区别物质描述与参考描述这两种不同的概念。

（3）在运动学（2）这一章，我们给出速度梯度的两种和分解，系统地介绍Rivlin-Ericksen张量，并给出转动张量和拉伸张量的物质导数，详细地讨论了输送定理。

（4）在平衡这一章，为了突出物理概念，我们逐个介绍各个平衡律，最后再给出主控方程和对照表。对Piola-Kirchhoff应力张量和广义动量平衡律作了专节介绍。这些对于掌握非线性连续统力学理论是基本的。

（5）在第十三章，我们专门讨论客观性公理和应力率。因为客观性公理不只对于本构理论的讨论是重要的、必不可少的，而且对于运动学和平衡律同样是重要的、不可少的。在这方面除去通常的内容以外，我们还对客性公理的意义作了进一步的讨论。由于应力率的问题在非线性连续统力学中愈来愈重要，譬如在粘弹性、粘塑性物质的力学理论中，在有限应变弹塑性变形理论中，以及在晶体的细观力学中都要涉及到应力率的问题。因此我们在本章对它作了系统的介绍，并在其中介绍了作者的工作。

（6）在本构理论一章，我们介绍了到目前为止发展比较成熟的两种物质：纯力学物质和热力物质的本构理论，即Noll的三公理体系和Eringen的八公理体系。首先介绍Eringen的八公理体系，以使读者掌握NCM中本构理论的基本概念和体系，然后再谈Noll三公理体系。由于前者已包括后者，为了不致重复，我们在简要回顾了Noll公理体系内容之后，即将阐述重点放到对简单物质分类的进一步讨论上。

（7）在以后的四章中，有两章讨论固体，即第十五章的有限弹性力学和第十六章的热弹性固体力学。有两章讨论流体，即第十七章的非牛顿流体力学和第十八章的热粘性流体力学。这样安排是基于这样的考虑：它们代表了目前发展比较成熟的两种物质理论，同时又平

行地介绍固体和流体力学，表明它们是非线性连续统力学理论中的两个特殊分支。在编写上，这四章既是本书统一整体的有机组成部分，又具有相对独立的完整性。

在第十五章，我们系统地介绍三种弹性物质：Cauchy弹性物质，Green弹性物质和低弹性物质。对前两种的讨论系统、详细。另外，我们还增加了非线性弹性变分原理一节，其中我们提出了在一般非保守系统中，有限弹性变形的拟变分原理和广义拟变分原理的概念。

在第十七章，我们从NCM的角度系统地介绍了非牛顿流体力学理论的概貌。至于非牛顿流体力学中的一些细节已不属于本书的范围。

张量分析部分为60学时，NCM部分为80学时，在这种学时情况下，可删去带•号的章节。

在此我们对郭仲衡教授表示衷心的感谢，一是在本书中多处引用了他的著作中的成果、二是感谢他在审阅本书稿时提出了不少宝贵的意见。最后，我们还要感谢航空工业部教材编审室、北京航空学院教材科、北京航空学院出版社以及印刷厂的许多同志，没有他们的支持和辛勤劳动，本书的出版是不可能的。特别要感谢北航出版社的郭维烈同志，他对本书的最后定稿进行了仔细的校阅和编辑加工。胡素琳和何建国同志为本书的誊写和插图作了不少工作，在此一并感谢。

限于作者学识与水平，书中肯定有不少疏误不当之处，诚恳地希望读者提出宝贵意见。

李松年　黄执中　于北航

1986年6月

印刷说明：由于印刷所致，采用了与惯用符号不一致的做法，例如$\dot{\boldsymbol{x}}$改印为$\boldsymbol{x}^{\bullet}$，$\ddot{\boldsymbol{x}}$改印为$\boldsymbol{x}^{\bullet\bullet}$，$\overline{E}$改印为$E^{+}$，$\overline{\mathbf{C}}{}^{i}_{i}(s)$改印为$\mathbf{C}^{i*}_{i}(s)$等。

目　　录

第一部分　张 量 分 析

第一章　绪论

1.1　张量的重要性 ……………………………………………………（ 1 ）
1.2　张量的概念 ………………………………………………………（ 1 ）
1.3　张量计算的基本任务 ……………………………………………（ 1 ）
1.4　张量的记法 ………………………………………………………（ 2 ）

第二章　张量代数

2.1　曲线坐标 …………………………………………………………（ 3 ）
2.2　指标符号 …………………………………………………………（ 4 ）
2.3　仿射几何 …………………………………………………………（ 5 ）
2.4　向量的三种定义方式 ……………………………………………（ 6 ）
2.5　向量空间 …………………………………………………………（ 7 ）
2.6　几何体 ……………………………………………………………（ 8 ）
2.7　标量、向量和张量 ………………………………………………（ 9 ）
2.8　张量代数 …………………………………………………………（ 11 ）
2.9　数值相对张量 ……………………………………………………（ 14 ）

第三章　张量分析

3.1　度量张量 …………………………………………………………（ 20 ）
3.2　Christoffel's 符号 ………………………………………………（ 21 ）
3.3　张量场的协变微分 ………………………………………………（ 24 ）
3.4　协变微分公式 ……………………………………………………（ 27 ）
3.5　Ricci定理……………………………………………………………（ 27 ）
3.6　笛卡尔张量 ………………………………………………………（ 29 ）

第四章　抽象符号法

4.1　基向量 ……………………………………………………………（ 32 ）
4.2　互逆基 ……………………………………………………………（ 32 ）
4.3　自然基 ……………………………………………………………（ 33 ）
4.4　自然基向量的变换及微分 ………………………………………（ 35 ）

4.5 并向量……………………………………………………………………………………(37)
4.6 线性变换…………………………………………………………………………………(39)
4.7 正规张量表示……………………………………………………………………………(46)
4.8 不变性微分向量算子……………………………………………………………………(54)
4.9 积分定理…………………………………………………………………………………(57)
4.10 内蕴微分法………………………………………………………………………………(66)
4.11 Riemann-Christoffel张量 ………………………………………………………………(70)
4.12 张量的非完整分量………………………………………………………………………(82)
4.13 张量的物理分量…………………………………………………………………………(83)
4.14 柱极坐标与球极坐标中张量的物理分量………………………………………………(88)

第五章 两点张量场

5.1 平动张量…………………………………………………………………………………(100)
5.2 两点张量…………………………………………………………………………………(102)
5.3 偏绝对微商、全绝对微商………………………………………………………………(103)

第六章 二阶张量

6.1 转置张量、对（反）称张量……………………………………………………………(107)
6.2 正则与退化………………………………………………………………………………(108)
6.3 重向和不变量……………………………………………………………………………(111)
6.4 仿射量的主向……………………………………………………………………………(113)
6.5* 射影………………………………………………………………………………………(114)
6.6 谱定理、谱分解…………………………………………………………………………(118)
6.7 Cayley-Hamilton定理 …………………………………………………………………(120)
6.8 轴仿射量（小转动仿射量）……………………………………………………………(121)
6.9 正交仿射量（有限转动仿射量）………………………………………………………(122)
6.10 仿射量的分解……………………………………………………………………………(125)
6.11 偏张量……………………………………………………………………………………(127)

第七章 张量函数

7.1 各向同性张量 ……………………………………………………………………………(131)
7.2 四阶各向同性张量 ………………………………………………………………………(134)
7.3 各向同性张量函数 ………………………………………………………………………(135)
7.4 张量函数的梯度 …………………………………………………………………………(137)
7.5 表示定理 …………………………………………………………………………………(140)

第八章* 曲面几何

8.1 曲面的坐标曲线…………………………………………………………………………(150)
8.2 第一基本形式……………………………………………………………………………(150)

8.3 曲面上的坐标换变……(151)
8.4 协变微分、曲率张量……(152)
8.5 曲面的外在几何……(153)
8.6 第二基本形式……(153)
8.7 Weingarten公式、Gauss公式……(154)
8.8 可积条件……(155)
8.9 法曲率、主曲率、曲率线……(155)
8.10 测地线……(159)
8.11 渐近方向、渐近曲线……(162)
8.12 Levi-Civita平行移动……(162)
8.13 曲面上的ε-系统……(164)
8.14 参考面邻近的微分几何……(164)

第九章* Riemann空间与仿射联络空间

9.1 拓扑空间……(168)
9.2 拓扑映射、同胚……(168)
9.3 微分流形……(169)
9.4 Riemann空间……(169)
9.5 切空间……(169)
9.6 余切空间……(171)
9.7 $\mathscr{L}$ie 微分……(173)
9.8 仿射联络空间……(179)

第二部分 非线性连续统力学基本理论

第十章 运动学（1）

10.1 物体、位形、运动和描述……(185)
10.2 坐标系……(188)
10.3 变形梯度张量……(191)
10.4 变形张量……(199)
10.5 运动的描述、相对变形……(203)
10.6 位移向量和应变张量……(209)
10.7 长度和角度变化、应变和旋转的几何意义……(219)
10.8 应变椭球和应变不变量……(223)
10.9 转动、变形基本定理……(232)
10.10 相容性条件……(236)
10.11 一些特殊的简单的有限变形……(238)

第十一章　运动学（2）

11.1　物质导数……(248)
11.2　速度梯度、变形梯度的物质导数……(256)
11.3　变形率和旋率……(259)
*11.4　Rivlin-Ericksen张量……(269)
11.5　转动张量、拉伸张量的物质导数……(274)
11.6　物质和空间流形……(280)
11.7　输送定理……(281)

第十二章　平衡律（守恒律）

12.1　连续统力学中的平衡律……(291)
12.2　质量平衡律……(292)
12.3　动量和动量矩平衡律……(295)
12.4　动量平衡律的结论……(302)
*12.5　广义动量平衡律……(305)
12.6　Picla-Kirchhoff应力张量……(307)
12.7　能量平衡律（守恒律）……(310)
12.8　熵不等式……(317)
12.9　平衡律的主控制方程……(324)

第十三章　客观性公理及应力率

13.1　客观性公理……(327)
13.2　应力率……(343)

第十四章　本构理论

14.1　绪言……(352)
14.2　本构理论的公理体系……(353)
14.3　热力物质……(361)
14.4　一些特殊类型的简单热力物质……(365)
*14.5　对简单物质的进一步讨论……(366)

第三部分　特 殊 物 质

第十五章　有限弹性物质

15.1　Cauchy弹性物质……(377)
15.2　超弹性物质……(390)
15.3　有限变形弹性变分原理……(401)

15.4 低（次）弹性物质简述……(417)

第十六章* 热弹性固体力学

16.1 一般情况的热弹性固体……(418)
16.2 各向同性情况的热弹性固体……(425)
16.3 线性各向异性热弹性固体……(430)
16.4 线性各向同性热弹性固体……(434)
16.5 固体中的热传导，Duhamel定理……(438)

第十七章 非牛顿流体力学简介

17.1 绪言……(441)
17.2 简单流体的本构方程……(446)
17.3 粘度计流动……(455)
17.4 具有恒定主相对伸长史的运动……(467)

第十八章 热粘性流体

18.1 平衡方程和熵不等式……(477)
18.2 本构关系……(477)
18.3 熵不等式对本构方程的限制……(478)
18.4 线性热粘性流体……(480)
18.5 粘性流体力学……(482)
18.6 流体举例……(488)

第四部分 附 录

附录 1 非线性连续统力学理论与实践……(493)
附录 2 非线性连续统力学中常用符号……(503)
附录 3 参考文献资料……(510)
附录 4 习题……(513)

第一部分　张量导论

第一章　绪　　论

1·1　张量的重要性

1877年，Ricci创立张量分析，经Levi-Civita发展之，仍只有少数几何学家对此有兴趣，约三十年后，爱因斯坦在1915年发表了关于广义相对论的著名论文，用张量作为相对论的基本数学工具，从此张量分析在理论物理学家心目中，就占有了显要的地位。自此以后，不仅张量在物理理论的发展上起着重要的作用，而且反过来，起源于相对论性的物理学和场的物理学中的各种概念，也对张量分析提供了丰富的营养。在最近二十年来，连续统力学的现代发展，再次重复了这种历史。在今天，如果对张量分析没有一定程度的通晓，就不可能攻读大部分的文献。目前，在国内外，不仅科学界，而且工程界都掀起了学习和应用张量的热潮。

1·2　张量的概念

张量是确定的物理（几何）概念。参照某坐标系规定其分量，仅仅用其分量就可以数学地描述它。张量具有这样的特性，当坐标系变换时，其分量作线性变换。与坐标系无关，张量作为一个整体是独立存在的，为了它的数学描述才需要坐标系。张量本身是与坐标系无关的物理（几何）量；采用坐标方法时，张量的分量与坐标有关。

张量方法，就是既采用坐标系而又摆脱具体坐标系影响的不变性方法。它从整体上使物理（几何）概念更明确了。

1·3　张量计算的基本任务

在用到坐标法的各种场合中，在被研究的物理（几何）对象上要加上一个偶然选择的坐标系，因而我们所得到的解析资料不仅反映出那些我们所想知道的东西(物理量，几何量)，而且也反映出那些我们完全不想要的东西（任意选择的坐标系）。于是在这种情形下就产生一种要求：希望能使物理（几何）上确实重要的部分与由坐标的选择而偶然导来的部分相分开。张量计算就是从事解决这一问题的。

首先作一些张量：即反映一定的物理（几何）对象的各组量，它们在坐标变换下按某种简单的规律而变换。再在这些量间导入一些不变性的运算及关系，即在坐标变换下其形式不变。因此，这些关系所写成的公式不仅适合于被选出的坐标系，而且也适合于任一坐标系；

就是说，这些关系所反映的物理（几何）事实与坐标的选择无关，因而消除了由偶然选择的坐标系所产生的不利影响。

1·4 张量的记法

1·4·1 核—标记法

任何阶张量的分量可以用指标记法(indicial)简明地表示。在此记法中，指标字母，上标或下标附加在表示张量的核字母上。典型的例子如下：

$$a_i,\ b^i,\ T_{ij},\ F^{i}_{\cdot j},\ R^{ij},\ \in_{ijk}$$

在混变 mixed 形式下，上、下标都出现，$F^{i}_{\cdot j}$ 中的点·表示 j 是第二个指标。

1·4·2 直接（并矢，抽象）记法

张量之间的关系可以用数量 f，φ，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和张量 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{S}$ 之间关系的直接形式表示。即直接用这些量本身表示，而不用其分量来间接表示。

直接记法的优越性在于它强调物理提法不依赖于坐标系的选择。然而使用分量记法时，这种优越性并没有完全丧失，因为用分量记法也可以写出在坐标变换下仍能保持形式不变的关系来。分量形式与求和约定结合使用，常常便于进行代数运算，而考虑具体问题时总必须在某一阶段引进坐标系与分量。

在较早的文献中，微分几何中采用 Schouten 的核—标记法较多；在最近连续统力学中采用直接记法日渐增多。本著作中，两种记法都使用。

第二章 张量代数

2·1 曲线坐标

设 x^1，x^2，…，x^n（简写为 x^k，$k=1,2,\cdots,n$）为变量的有序集，每一变量在实数域中可取任意数。我们称这个集为一个点，而这个集的元素 x^k 为这一点的坐标，对于这个集 x^k 而言，我们可以用下列 n 个方程引进另一个 n 变量的集 $x^{k'}$($k'=1'$，$2'$，…，n')。

$$x^{k'}=x^{k'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n),\quad k'=1',\ 2',\ \cdots,\ n' \tag{2.1.1}$$

这里的数码上加的一撇，只是为了保持标码 k 上的一撇而用的。这样，我们可以把 x^k 和 $x^{k'}$ 区别开来。

如果 x^k 和 $x^{k'}$ 之间的关系是一一对应的，则(2.1.1)的关系必有一种唯一的逆关系，它的形式可以写成

$$x^k=x^k(x^{1'}x^{2'},\ \cdots,\ x^{n'})\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2.1.2}$$

根据微积分的隐函数定理，只要在 x^k 的邻域 B 中，函数 $x^{k'}(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$，或简称 $x^{k'}(x^k)$的一阶偏导数都存在，而且雅可比行列式

$$J=\det(\partial x^{k'}/\partial x^k)=\begin{vmatrix}\partial x^{1'}/\partial x^1 & \partial x^{1'}/\partial x^2 & \cdots & \partial x^{1'}/\partial x^n\\ \partial x^{2'}/\partial x^1 & \partial x^{2'}/\partial x^2 & \cdots & \partial x^{2'}/\partial x^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial x^{n'}/\partial x^1 & \partial x^{n'}/\partial x^2 & \cdots & \partial x^{n'}/\partial x^n\end{vmatrix} \tag{2.1.3}$$

在邻域 B 中不等于零，则逆关系(2.1.2)式必存在。一般说来，我们将假设函数 $x^{k'}(x^r)$具有一直到 s 阶都连续的偏导数（或简言之，我们假定它们都是光滑的）。在这种情况下，$x^k(x^r)$将称为 C^s 级的函数，或简称在 B 内，$x^k(x^r)\in C^s$。

C^0 级的函数是例外，因为在这种情况下，J 并不存在。包括(2.1.1)和(2.1.2)在内的坐标变换类称为是容许的。这类坐标变换还可以有子类。例如，当 $J>0$ 时，我们称坐标是**正向的**，而 $J<0$ 时，则称为**负向的**。这两种子类之间，并不能相互过渡。如果假设这两种子类在某一域 B_0 中，容许相互过渡，则在 B_0 中的某些点上 $J>0$，而在另一些点上 $J<0$，根据连续性，这就意味着存在 $J=0$ 的点，这和条件 $J\neq 0$ 是矛盾的。这种情况有可能在 B 中的有限个数的奇异点、奇异线或奇异面上发生。如果有这种情况，则我们必须给予特殊的注意。除了特别声明的情况外，我们将一般地假定 $x^{k'}$ 在 B 域中是光滑的，而且是 $J>0$。对于 $J<0$ 的情况而言，除了取向不同外，它和 $J>0$ 的结构完全相同。因此，我们无需给予特殊的注意。$J>0$ 称为**正常**变换，在 $n=3$ 时，由右手坐标系变换到另一右手坐标系。$J<0$ 称为**非正常**变换，在 $n=3$ 时，由右手（左手）坐标系变换到左手（右手）坐标系。

2·2 指标符号

2·2·1 求和规约和哑指标

$$s = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

在上式中指标 i，k 在求和与所用字母无关的意义下而称为**哑指标**(dummy indices)。

爱因斯坦求和规约：(Einstein's summation convention)：凡重复一次且仅一次的上下指标均从 1 到 n 求和，于是

$$s = a_i x^i = a_k x^k$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j = a_{ij}x^i x^j = a_{km}x^k x^m$$

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k = \sum_{k=1}^{n} v^k\sqrt{g_{kk}}\,\mathbf{g}_k/\sqrt{g_{kk}} = v^{(k)}\mathbf{g}_{(k)}$$

其中

$$v^{(k)} := v^k\sqrt{g_{kk}}$$

$$\mathbf{g}_{(k)} := \mathbf{g}_k\sqrt{g_{kk}}$$

在上诸式中，k 出现两次，为求和标，按爱因斯坦求和规约，可省写求和号 Σ；k 出现 3 次（上标一次，下标两次）不代表求和；k 出现 6 次而又代表求和，故求和号 Σ 不能省去。

$$g^{11} = 1/g_{11},\quad g^{22} = 1/g_{22},\quad \cdots,\quad g^{nn} = 1/g_{nn}$$

写成通式

$$g^{kk} = 1/g_{kk},\qquad k = 1,2,\cdots,n\ \ (no\ \ sum)$$

或

$$g^{\underline{kk}} = 1/g_{\underline{kk}},\qquad g^{\underline{kk}} = 1/g_{\underline{kk}}$$

称 $\underline{kk}$ 为二重自由标。我们认为就写成 $g^{kk} = 1/g_{kk}$，其中 k 不是求和标，因为虽然重复一次，但不是一次上标，一次下标。

以 g_{km} 为元素的行列式 g，g_{km} 的代数余因子为 G^{km}，则

$$g = g_{km}G^{km}\ \ (no\ \ sum\ \ on\ \ m)$$

m 为重复一次的上下标，而又不代表求和，故必须加文字说明（比二重自由标清楚）。

2·2·2 自由标

在一个方程的每项中只出现一次的指标称为**自由标**(free indices)。例如

$$u_i = A_{ik}v^k \qquad\qquad i,k = 1,2,\cdots,n$$
$$u^i = A^i{}_k v^k$$

中的 i 为自由标。

应当注意，出现在方程每项中的自由标必须相同。例如

$$A_{ikm}B^{km} + T_i{}^k u_k = 0$$

是有意义的。正确的。

$$A_{ikm}B^{km} + T^i{}_k u^k = 0$$