职工初中数学复习

上海教育出版社

ZHIGONG CHUZHONG SHUXUE FUXI

职工初中数学复习

本 社 编

上海教育出版社

职工初中数学复习

本 社 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　江苏太仓印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 9.25　字数 204,000

1983 年 4 月第 1 版　1984 年 2 月第 2 次印刷

印数555,001—605,000本

统一书号：7150·2879　定价：0.64 元

说　　明

为了适应职工复习初中数学的需要，我们编写了这本《职工初中数学复习》。

本书的内容和要求，是根据"职工业余中等学校初中数学教学大纲"确定的。在内容编排上，根据业余学习的特点和职工数学基础的现状，注意了数学知识的内在联系和循序渐进。具体编排是，将初中的数学内容分成七章；每一章分为若干节，每一节又分为若干单元；按单元编写了基础知识提要、例题、练习，按章编写了习题。基础知识提要，主要是对数学的概念、性质、定理、法则和公式等进行系统整理；例题，主要举了一些有代表性的题目，通过分析和解证，以及一些解题关键和注意点的说明，提高读者分析问题和解决问题的能力；练习是为复习和巩固本单元内容而安排的，每章习题是为进一步复习和巩固本章内容所安排的，其难度比练习题略有提高。

读者在使用本书时，要注意以下两点：

一、要重视基础知识的复习。本书基础知识提要，限于篇幅，对概念的解释比较简略，对性质、定理、法则和公式的推导或证明都省略了，但在复习时，要努力弄清基本概念，了解性质、定理、法则和公式的推导或证明。当读者遇到这类问题的困难时，可参阅初中数学课本。

二、要重视解题能力的培养。读者应重视阅读例题的分析和说明，并在解题过程中，注意归纳、总结解某些问题的关键或一般方法，以不断提高自己的解题能力。

在本书编写过程中，得到了童德澂、周霖源两同志的热情帮助，对此，我们表示感谢。

目录

第一章 实 数

通过本章复习，要理解自然数、整数、有理数、无理数、实数等数的概念，了解实数的分类；要掌握实数运算的法则、顺序和定律；培养正确、合理、迅速的计算能力。

本章复习的重点是有理数的概念和四则运算。

第一节 实数的概念

一 自然数

1．自然数的概念

表示物体个数或事物次序的数叫做**自然数**。例如，1、2、3、5、10、101 等。

自然数有一个最小的数 1，但没有最大的数，也就是说，自然数的个数是无限的。

2．偶数和奇数

对于两个自然数 a、b，如果存在一个自然数 c，使

$$a \div b = c, \quad 或 \quad a = bc,$$

我们就说 a 能被 b **整除**，a 叫做 b（或 c）的**倍数**；b、c 叫做 a 的**约数**（或**因数**）。例如，$6\div3=2$，或 $2\times3=6$，称 6 能被 2 整除；6 是 2（或 3）的倍数，2、3 都是 6 的约数。

能被 2 整除的自然数叫做**偶数**。例如，2, 4, 6, 8, …。

不能被 2 整除的自然数叫做**奇数**。例如，1, 3, 5, 7, …。

3. 质数和合数

除 1 以外只能被 1 和它本身整除的自然数叫做**质数**(或**素数**)。例如，2, 3, 5, 7 都是质数。

不仅能被 1 和它本身整除，而且还能被其他自然数整除的自然数叫做**合数**。例如，4, 6, 8, 9, 10 都是合数。

1 既不是质数，也不是合数。

任何一个合数，都可以用几个质数因数连乘的形式表示。例如，合数 30，可用质数因数 2、3、5 的积来表示，即

$$30=2\times 3\times 5。$$

一个合数的质数因数，简称这个合数的**质因数**。例如，2、3、5 都是 30 的质因数；而 6 是 30 的一个因数，但不是质因数。

把一个合数分解成几个质因数的连乘积，叫做**质因数分解**。

4. 公约数和公倍数

一个数同时是几个数的约数时，这个数叫做这几个数的**公约数**。几个数的公约数的个数是有限的，其中最大的一个约数叫做这几个数的**最大公约数**。例如，8、16、24 的公约数有 2、4、8，最大公约数是 8。

一个数同时是几个数的倍数时，这个数叫做这几个数的**公倍数**。几个数的公倍数的个数是无限的，其中最小的一个公倍数叫做这几个数的**最小公倍数**。例如，3、5 的公倍数有 15、30、45、60、…，最小公倍数是 15。

如果两个自然数的最大公约数是 1，那么这两个数叫做**互质数**。例如，3 和 5、4 和 7、4 和 9 都是互质数。显然，两个互质数的最大公约数是 1，最小公倍数是两个互质数的积。

例 1 下列各数中，哪些是偶数？哪些是奇数？哪些是质数？哪些是合数？

1, 2, 4, 5, 9, 13, 15, 18, 19, 21, 23, 26, 29。

解 是偶数的有：2, 4, 18, 26;

是奇数的有：1, 5, 9, 13, 15, 19, 21, 23, 29;

是质数的有：2, 5, 13, 19, 23, 29;

是合数的有：4, 9, 15, 18, 21, 26。

例 2 (1) 把 360 分解成质因数的连乘积；

(2) 求：252 和 360 的最大公约数和最小公倍数。

解 (1)

$$\begin{array}{r|r}
2 & 360 \\ \hline
2 & 180 \\ \hline
2 & 90 \\ \hline
3 & 45 \\ \hline
3 & 15 \\ \hline
 & 5
\end{array}$$

$$\therefore \quad 360=2^3\times 3^2\times 5。$$

(2)

$$\begin{array}{r|rr}
2 & 252 & 360 \\ \hline
2 & 126 & 180 \\ \hline
3 & 63 & 90 \\ \hline
3 & 21 & 30 \\ \hline
 & 7 & 10
\end{array}$$

所以 252 和 360 的最大公约数是 $2\times2\times3\times3=36$; 最小公倍数是 $2\times2\times3\times3\times7\times10=2520$。

说明 (1) 例 2 中分解质因数的方法叫做短除法。利用短除法求几个数的最大公约数、最小公倍数时，一般用解(2)的形式。最大公约数是所有公共质因数的积，最小公倍数是所有公共质因数与剩下的几个互质数的积。

(2) 在使用短除法进行质因数分解时，常要用到一个数

被某一个质数整除的特征。例如，一个数的个位数是偶数，这个数能被 2 整除；一个数的个位数是 5 或 0，这个数能被 5 整除；一个数的各位数字之和能被 3 整除，这个数能被 3 整除。

练 习 1.1

1. 下面说法对不对？如果不对，举例说明理由：

(1) 自然数可以分为奇数和偶数两类，也可以分为质数和合数两类；

(2) 奇数都是质数，偶数都是合数；

(3) 一个数的约数都是质数，一个数的倍数都是合数。

2. 50～70 这些自然数中，哪些是偶数？哪些是奇数？哪些是质数？哪些是合数？

3. 说出下列各数，哪些数能被 2 整除？哪些数能被 3 整除？哪些数能被 5 整除？

12, 30, 44, 62, 189, 278, 425, 946, 4200。

4. 把下列各数分解成质因数的连乘积：

36, 100, 256, 645, 720。

5. 求下列各组数的最大公约数和最小公倍数：

(1) 42 和 54；　(2) 28 和 96；　(3) 88 和 132；

(4) 18、24 和 40；(5) 60、75 和 105；(6) 88、220 和 528。

二 有理数

1. 有理数的概念

在我们周围，存在着许多具有相反意义的量。例如，温度的零上、零下，货物的运进、运出，银行的收入、支出，等等。为

了区分相反意义的量，可以把一种量规定为正的，另一种相反意义的量规定为负的。如零上 5 度，用 $+5$ 表示，零下 5 度用 -5 表示。

象 $+5$、$+\frac{1}{2}$、$+5.2$ 等，带有正号的数叫做**正数**（正号也可省略不写）。

象 -5、$-\frac{1}{3}$、-0.2 等，带有负号的数叫做**负数**。

零既不是正数，也不是负数。

自然数也叫做**正整数**；-1，-2，-3，$\cdots$ 叫做**负整数**。

正整数、零、负整数统称为**整数**。

整数和分数（正分数和负分数）统称为**有理数**。

因为有限小数和循环小数都可以表示为分数，所以它们都是有理数。例如，$0.35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$，$-0.\dot{3}=-\frac{1}{3}$，它们都是有理数。

2．数轴

规定了方向、原点、单位长度的直线叫做**数轴**。（图 1-1）

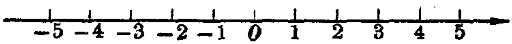

图 1-1

任何一个有理数都可以用数轴上的一个点来表示。例如，$+1$、$+2\frac{1}{2}$，可以分别用数轴上原点右边的点 A、B 表示；-2、-0.5 可以分别用数轴上原点左边的点 C、D 来表示；0 用原点 O 来表示。（图 1-2）

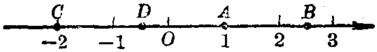

图 1-2

3. 相反数

象 $+6$ 和 -6、$+\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，只有正负号不同的两个数叫做**互为相反数**。

两个数如果互为相反数，那么在数轴上表示这两个数的点分别在原点的两旁，且离开原点的长度相等。

零的相反数是零。

任何一个数 a 的相反数可以用 $-a$ 表示。例如，3 的相反数为 -3；-3 的相反数为 $-(-3)$，即 $+3$。

4. 绝对值

数轴上表示一个数的点离开原点的长度，叫做这个数的**绝对值**。例如，在数轴上，表示 $+5$ 的点离开原点的长度是它本身 5；表示 -3 的点离开原点的长度是它的相反数 3。一般地，一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0 \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时；} \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时。} \end{cases}$$

例 1 下列各数中，哪些是正数？哪些是负数？哪些是整数？哪些是分数？

$+\frac{1}{3}$, -3, 2.1, 0, 1, 1.5, $-7\frac{1}{2}$, -8, 80。

解 是正数的有：$+\frac{1}{3}$, 2.1, 1, 1.5, 80；

是负数的有：-3，$-7\frac{1}{2}$，-8；

是整数的有：-3，0，1，-8，80；

是分数的有：$+\frac{1}{3}$，2.1，1.5，$-7\frac{1}{2}$。

例2 在数轴上表示下列各数以及它们的相反数：

-3.5，0，$2\frac{1}{3}$，-5，1。

解 -3.5 的相反数是 3.5；0 的相反数是 0；$2\frac{1}{3}$ 的相反数是 $-2\frac{1}{3}$；-5 的相反数是 5；1 的相反数是 -1。

它们在数轴上的表示如图 1-3 所示。

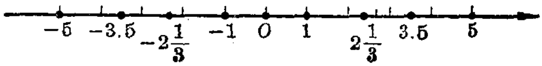

图 1-3

例3 求下列各数的绝对值：

$\frac{1}{5}$，$-\frac{1}{3}$，$+2.3$，0，20，$x(x<0)$。

解 $\left|\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}$，$\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$，$|+2.3|=2.3$，

$|0|=0$，$|20|=20$，$|x|=-x(x<0)$。

说明 求字母的绝对值时，要考虑字母的取值情况，即取正数、负数、还是零。本题中，$x<0$，即 x 是负数，而负数的绝对值是它的相反数，即 $-x$。此外，可以用 x 可取的某一具体数来验证。例如，取 $x=-1$，$|x|=|-1|=1=-(-1)$，说明 $|x|=-x(x<0)$ 是正确的。

练　习　1.2

1. 下面说法对不对？如果不对？举例说明理由：

   (1) 0 是最小的有理数；

   (2) 整数就是自然数；

   (3) 一个有理数，如果不是正数，就一定是负数；

   (4) 一个有理数，如果不是整数，就一定是分数。

2. 下列各数中，哪些是整数？哪些是分数？哪些是正整数？哪些是正分数？

   $-3,\ -\frac{1}{2},\ 4,\ 0,\ \frac{1}{10},\ 0.3,\ 6,\ -10,\ 7\frac{1}{3}$。

3. 在数轴上表示下列各数，并求出它们的绝对值：

   $-2,\ -3\frac{1}{2},\ 1.\dot{3},\ 0,\ 4.5,\ -3$。

4. 写出下列各数的相反数，相反数的倒数：

   $3,\ \frac{1}{2},\ -5,\ -\frac{4}{3},\ -\left|\frac{2}{7}\right|$。

5. (1) 举例说明：如果两个数互为相反数，那么它们的绝对值相等；

   (2) 根据(1)，求下列各式中的 x：

   $$|x|=2,\quad |-x|=\frac{1}{3},\quad |x|=0。$$

三　实数

1. 无理数的概念

小数除有限小数和循环小数外，还有一种无限不循环小数。例如，圆周率 $\pi=3.1415926\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，

0.1010010001…，等等。

无限不循环小数叫做**无理数**。

2．实数的概念和分类

有理数和无理数统称为**实数**。

实数的分类如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数，如 $1, 2, 3, \cdots$
      - 零，
      - 负整数，如 $-1, -2, -3, \cdots$
    - 分数
      - 正分数，如 $\frac{1}{3}$，$7\frac{1}{2}$，0.2，
      - 负分数，如 $-\frac{2}{3}$，$-3\frac{1}{2}$，-0.3，
  - 无理数
    - 正无理数，如 $\sqrt{2}$，π，$\sqrt{3}$，
    - 负无理数，如 $-\sqrt{5}$，$-\pi$，$-\sqrt{7}$。

3．实数和数轴上的点

任何一个有理数都可以用数轴上唯一的一个点来表示，但是，数轴上的点并不都表示有理数。例如，图 1-4 中，数轴上离开原点 O 的长等于单位正方形的对角线长的点 A，就表示无理数 $\sqrt{2}$。任何一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反之，数轴上的任何一个点都表示一个实数。

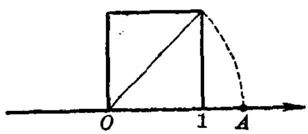

图 1-4

例 1　下列各数中，哪些是无理数？哪些是有理数？哪些是正数？哪些是分数？

$+7$，0，$\sqrt{3}$，$-\pi$，3.14，$0.\dot{6}$，$0.2020020002\cdots$，$2\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-0.\dot{2}$，$-\sqrt{2}$。

解 是无理数的有：

$\sqrt{3}$, $-\pi$, 0.2020020002…, $-\sqrt{2}$;

是有理数的有：

$+7$, 0, 3.14, $0.\dot{6}$, $2\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-0.\dot{2}$;

是正数的有：

$+7$, $\sqrt{3}$, 3.14, $0.\dot{6}$, 0.2020020002…, $2\frac{1}{3}$;

是分数的有：

3.14, $0.\dot{6}$, $2\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-0.\dot{2}$。

例 2 求下列各数的相反数和绝对值：

0.25, $-\frac{1}{10}$, $-\pi$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-0.102100210002\cdots$。

解 0.25 的相反数是 -0.25, $|0.25|=0.25$;

$-\frac{1}{10}$ 的相反数是 $\frac{1}{10}$, $\left|-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}$;

$-\pi$ 的相反数是 π, $|-\pi|=\pi$;

$\sqrt{2}$ 的相反数是 $-\sqrt{2}$, $|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$;

$-\sqrt{3}$ 的相反数是 $\sqrt{3}$, $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$;

$-0.102100210002\cdots$ 的相反数是 $0.102100210002\cdots$,

$|-0.102100210002\cdots|=0.102100210002\cdots$。

练 习 1.3

1. 下面的说法对不对？如果不对，举例说明理由：

(1) 小数都是有理数；　　(2) 小数都是无理数；

(3) 无限小数都是无理数；　(4) 实数都是无限小数。

2. 下列各数中，哪些是自然数？哪些是整数？哪些是有理

数？哪些是无理数？

-8, 60, -1, 0.16, 0.3010010001, 3, 18,

0, $5\frac{1}{5}$, $-\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2.030030003\cdots$。

3. 求下列各数的相反数和绝对值：

$\frac{1}{8}$, -0.11, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $6.0\dot{3}$, $\sqrt{5}$, -7.7, $-\frac{31}{100}$。

4. 在1～10这十个自然数的平方根中，哪些是有理数？哪些是无理数。

第二节 实数的大小比较

对于两个实数，可以比较它们的大小：在数轴上表示两个实数 a、b 的点分别为 A、B，如果点 A 在点 B 的右边，那么就说 $a>b$；如果点 A 在点 B 的左边，那么就说 $a<b$；如果点 A 和点 B 重合，那么就说 $a=b$。

由此可得到比较两个实数大小的法则：

正数都大于零，也大于一切负数；负数都小于零，也小于一切正数；两个正数，绝对值大的较大；两个负数，绝对值大的反而小。

例1 比较下列各组数的大小：

(1) 2 和 -4; (2) 0 和 $-\frac{1}{9}$;

(3) $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{4}{5}$; (4) $-\frac{12}{7}$ 和 $-1\frac{3}{4}$。

解 (1) $2>-4$; (2) $0>-\frac{1}{9}$;

(3) $\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$, $\left|\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$,