高等数学简明教程

安徽省职工大学数学教材编写组　编

中国科学技术大学出版社

高等数学简明教程

安徽省职工大学数学教材编写组　编

中国科学技术大学出版社

1991・合肥

内 容 简 介

本书是以国家教委 1983 年颁发的《职工大学高等数学教学大纲》为依据，由安徽省职工大学数学教材编写组编写的。全书内容由狄成恩(主编)统一安排、修改；由卢树铭、华文贤两同志主审。

全书内容为微积分、级数、常微分方程、线性代数、线性规划、概率统计、拉普拉斯变换等。本书内容通俗易懂、深入浅出、结构新颖。

本书可作为职工大学工科各专业以及管理、经济专业的教材，也可作为函授、夜大、专业技术岗位培训的数学教材或教学参考书。

高等数学简明教程

安徽省职工大学数学教材编写组　编

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码：230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：787×1092/16　印张：27.25　字数：657千

1991年7月第1版　1991年7月第1次印刷

印数：1—10000册

ISBN7-312-00290-0/O·95　定价：9.70元

安徽省职工大学数学教材编写组

主编　狄成恩

编者（按姓氏笔划排列）

王　雨	王寅辰	朱广斌	江旭光	汤明华
邵家德	吴新华	狄成恩	杨庚正	郑　华
周　维	段玉珍	赵玉华	夏　日	高振棣
葛开伦	濮德远	谷国梁		

主审　卢树铭（国家教委全国高校工科数学课程教学指导委员会委员、《工科数学》杂志主编）

华文贤（安庆石化总厂职工大学副教授）

前　言

职工高等教育的教学改革是一项十分重要而又艰巨的任务。就高等数学课程来说，目前职工高校一般都借用普通高校的本科教材，这给教、学两个方面都带来了很大的困难。因此，编写一本既符合职工高校对数学课程的要求，又具有职工教育特点的高等数学教材，就显得非常必要了。尤其是职工高校正由学历教育转为专业技术岗位培训，这种需要也就更为迫切。为此，安徽省职工高校数学协作组组织了安徽电力职工大学、蚌埠市职工大学、蚌埠机械职工大学、淮南矿务局职工大学、合肥职工业余大学、合肥科技职工大学、安徽省直职工大学、安徽地质职工大学、马鞍山钢铁公司职工大学、安庆石化总厂职工大学、铜陵有色金属公司职工大学等11所职工大学中具有多年职工教育教学经验的教师，编写出版了这本《高等数学简明教程》。

这本《高等数学简明教程》是以《职工大学高等数学教学大纲》为依据，根据国家教委对职工高校基础课提出的"必需、够用"的精神为指导进行编写的。因此，本书着重于数学方法的介绍，而对严格的逻辑论证不作过高的要求。在介绍各种数学方法的过程中，注意揭示其背景、阐述其来龙去脉，力求使读者能掌握其要点，正确地运用计算方法。书中对读者在学习过程中易于混淆、易于误解、易于出错之处，采用"注"的形式予以指出；对例题的讲解，着重思路分析和解题规律的总结。本书深入浅出、通俗易懂，既突出了方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。

全书包括一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数、线性规划、概率统计和拉氏变换初步等内容。其中概率统计、线性规划、拉氏变换等内容，可根据不同专业的需要进行选用。

本书可作为职工高校学历教育和专业技术岗位培训的教材，也可供有志于高等数学学习的在职职工自学参考。

在本书的编写过程中，自始至终得到了各参编学校的领导的大力支持，尤其是安徽电力职工大学的领导对本书的编写给予了亲切的关怀，并为本书的发行提供了条件；电子工程学院董自立、陈顺福同志帮助审阅了本书的部分章节；国家教委全国高等学校工科数学课程教学指导委员会委员、《工科数学》杂志主编卢树铭同志在百忙之中仔细审阅了全部书稿。在此，我们一并表示衷心地感谢。

编写出版一本具有职工教育特点的教材，是一项新的工作。由于我们经验缺乏、水平有限，书中缺点和错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

安徽省职工大学数学教材编写组

1990年12月

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学主要研究常量，而高等数学主要研究变量。微积分学是高等数学的主体，它是着重研究变量之间确定的依赖关系（即函数关系）的一门学科，极限方法则是研究变量变化趋势的一种基本方法。本章将在初等数学关于函数知识的基础上进一步讨论函数，并介绍极限和函数的连续性等有关知识。

1.1　实数与绝对值

一、实数

微积分是在实数范围内研究函数的。实数可以分为有理数和无理数两大类，现把实数的分类系统列表如下：

- 实数
  - 有理数
    - 正有理数
      - 正整数
      - 正分数
    - 零
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

任何一个有理数都可以表示成比值$\frac{p}{q}$（p，q为整数，$q\neq 0$）的形式，也可以用有限小数或无限循环小数表示，如$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{1}{3}=0.33\cdots$，等；而无理数只能用无限不循环小数表示，如$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\pi=3.141592\cdots$，于是任一实数都可用无限小数形式来表示。

如果在一条水平直线上取定一点O，称为**原点**，指定一个方向为正向（通常把由原点向右的方向规定为正向），再规定一个单位长度，则称这样的直线为**数轴**，如图1.1所示。

图 1.1

实数有如下三个基本性质：

（1）有序性。设a，b为任意两个实数，则a，b必满足下述三个关系式之一：

$$a<b,\ a=b,\ a>b.$$

（2）稠密性。任意两个不相等的实数之间有无穷多个有理数和无理数。

（3）连续性。全体实数与数轴上的全体点之间有着一一对应关系，即实数充满了数轴

而没有空隙。所以今后常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示。

二、绝对值

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

在数轴上，$|a|$表示点 a 到原点 O 的距离。

由绝对值的定义，可得绝对值如下几个性质：

（1） $|a|=|-a|\geqslant 0$；

（2） $|a|=\sqrt{a^2}$；

（3） $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

（4） $|a|\leqslant b$，$(b>0)$ 的充分必要条件是 $-b\leqslant a\leqslant b$；

（5） $|a+b|\leqslant |a|+|b|$，（三角不等式）；

（6） $|a|-|b|\leqslant |a-b|$；

（7） $|ab|=|a||b|$；

（8） $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$(b\neq 0)$。

例 解绝对值不等式 $|x-4|<7$。

解 由性质（4）知，绝对值不等式 $|x-4|<7$ 与不等式 $-7<x-4<7$ 等价，故得

$$-3<x<11$$

三、区间

数集中，今后用得最多的是各种各样的区间。

设 a，b 是两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体，叫做以 a、b 为端点的**开区间**，记作 (a,b)，在数轴上 (a,b) 表示直线段 ab（除去左、右端点 $x=a$，$x=b$）上点的全体，如图 1.2 所示。

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体，叫做以 a，b 为端点的**闭区间**，记作$[a,b]$，在数轴上，$[a,b]$表示直线段 ab（包括左右端点）上一切点的全体，如图 1.3 所示。

图 1.2

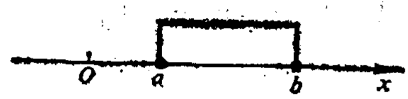


图 1.3

此外，区间$[a,b)$表示 $a\leqslant x<b$，区间$(a,b]$表示 $a<x\leqslant b$，这两种区间都称作**半开区间**，如图 1.4 和图 1.5 所示。

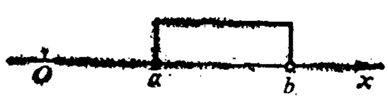


图 1.4

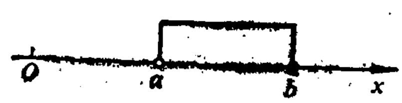


图 1.5

以上三类区间为有限区间，数 $b-a$ 是上述每个区间的长度。

除有限区间外，还有下面几类无穷区间：

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数，即 $-\infty<x<+\infty$.

同样有：

$[a,+\infty)$ 表示：$a\leqslant x<+\infty$；$(a,+\infty)$ 表示：$a<x<+\infty$；

$(-\infty, b]$ 表示：$-\infty<x\leqslant b$；$(-\infty, b)$ 表示：$-\infty<x<b$.

注 符号“$+\infty$”和“$-\infty$”不表示数，仅仅是记号.

还有一种特殊的开区间叫做邻域，确切地说，设 x_0 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 叫做 x_0 的 δ **邻域**，如图 1.6 所示.

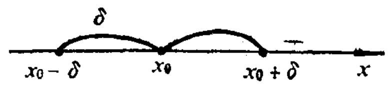


图 1.6

x_0 的 δ 邻域也可表示成绝对值不等式的形式：

$$|x-x_0|<\delta,$$

点 x_0 的去心 δ 邻域用 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示.

1.2 函数的概念

一、常量与变量

我们在研究实际问题时，常会遇到各种各样的量，如长度、体积、温度、产量、价格、成本、利润等. 在所考虑问题的过程中，有一些量总取同一数值，称为**常量**；而有一些量可取不同数值，称为**变量**.

通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，z，u，t 等表示变量.

二、函数的定义

在同一个问题中，往往同时出现好几个变量，这些变量往往相互联系、相互依赖，并遵循着一定的变化规律.

例 1 圆的面积 S 和半径 r 这两个变量之间有如下依赖关系 $S=\pi r^2$.

例 2 关系式 $y^2=x$，给出了抛物线上点 (x,y) 的两个坐标之间的依赖关系.

例 3 设 x 表示某商品销售量，y 表示销售总收入，则 x 与 y 之间有关系式 $y=ax$. 其中常数 a 表示某商品的单价.

撇开上面几个例子各自的具体意义，从纯数量关系的角度看，它们都表明，两个变量之间是相互依赖的，其中一个变量在其变化范围内任意取一个确定的数值时，另一个变量就按照一定的对应法则确定出其对应的值. 把变量之间的这种对应关系抽象化，就得到了函数的概念.

定义 1 设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的变化范围内的每一个值，y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，那么称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**函数**或**因变量**. 自变量 x 的变化范围称为函数的**定义域**，因变量 y 所对应的数值范围称为函数的**值域**.

符号“f”表示 x 与 y 的对应法则，也可用其它字母来表示，如 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=F(x)$，$y=y(x)$ 等，但应注意，在同一场合，为了避免引起混淆，不要用同一个字母来

表示不同的对应法则。

定义1中，如果对于一个x值只有一个确定的y值与之对应，则称y是x的**单值函数**；否则叫做**多值函数**。如例1，例3中的函数都是单值函数，例2中的函数是多值函数。多值函数可加以条件限制，使之成为单值函数，在微积分中，我们讨论的函数一般都是单值函数。

对于自变量x在定义域内的某一固定值x_0，函数$f(x)$的对应值y_0，叫做函数$f(x)$当$x=x_0$时的**函数值**，记作$y_0=f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$。如果当$x=x_0$时，函数$y=f(x)$有确定的值和它对应，那么称$y=f(x)$在x_0处有定义。

例 4 已知$f(x)=x^3+1$，求$f(0)$，$f(-1)$，$f(x^2)$，$f[f(x)]$。

解 $f(0)=0^3+1=1$，$f(-1)=(-1)^3+1=0$，$f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$，

$$f[f(x)]=(x^3+1)^3+1=x^9+3x^6+3x^3+2.$$

确定一个函数的要素是函数的定义域和对应法则，与自变量和因变量用什么字母来表示无关；两个函数相等，指的是它们的对应法则和定义域分别相同。

例 5 函数$f(x)=\cos x$与$g(x)=x^2$，虽然它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同，故它们是不同的函数。

例 6 函数$y=\lg x^2$的定义域是不为零的全体实数，$y=2\lg x$的定义域是$(0,+\infty)$，它们的定义域不同，且对应法则也不同，故它们是不同的函数。

例 7 求下列各函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{9-x^2}$；（2）$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；

（3）$y=\lg(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$。

解 （1）在实数范围内，当$9-x^2\geqslant 0$时，$\sqrt{9-x^2}$才有意义，故定义域为$-3\leqslant x\leqslant 3$，即$[-3,3]$。

（2）当$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，且$x\neq 0$时，$\arcsin\dfrac{1}{x}$才有意义，即$|x|\geqslant 1$且$x\neq 0$，故定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$。

（3）这是两项之和，当每一项都有意义时函数才有意义。当$1-x>0$时，$\lg(1-x)$才有意义，因而有$x<1$；当$x+4>0$时，$\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$才有意义，因而有$x>-4$。故函数定义域为$x>-4$且$x<1$，即$(-4,1)$。

三、函数的表示法

函数有以下三种常用的表示方法

1．公式法（或称解析法）

用数学式子把自变量与因变量之间的函数关系表示出来的方法称为**公式法**（或称**解析法**），上节各例题中的函数关系都是由公式给出的。公式法的优点是简单、准确、便于理论分析，缺点是不够直观，且在有些实际问题中遇到的函数关系，并不是都能用公式法表示出来的。

2．图象法

以函数自变量的值为横坐标，以函数的对应值为纵坐标，由这样的所有点在直角坐标系里构成的轨迹，称为该函数的图象（或曲线），用图象表示函数的方法称为函数的图象表示法。图象法的优点是鲜明直观，缺点是不便于理论研究和数学运算。

3．*列表法*

把自变量与其对应的因变量的值列成表，如数学用表里的对数表、三角函数表等等，这种表示函数的方法称为**列表法**。列表法的优点是对于表中每一个自变量的值，可以不经计算而直接查出它对应的函数值，缺点是表格中只有有限组数值，且不便于理论研究。

微积分里所研究的函数，大多用公式法表示。用公式法表示函数时，有时对函数定义域内自变量不同的取值，不能用一个式子表示，而需要用两个或更多个式子来表示，这类函数称为**分段函数**。如

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

是分成两段的函数，它的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，如图 1.7 所示。

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

是分成三段的函数，它的定义域是 $[-1,1]$，如图 1.8 所示。

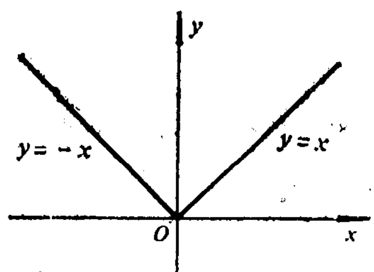


图 1.7

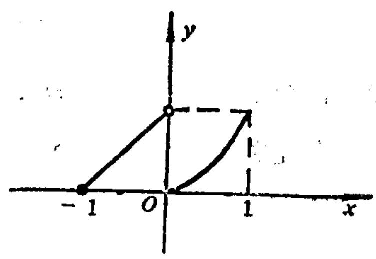


图 1.8

用公式法表示函数通常有两种不同的方式，一种是把因变量 y 直接表示成自变量 x 的函数 $y=f(x)$，叫做 x 的**显函数**。如 $y=x^2-1$，$y=\ln x$ 等。还有一种是因变量 y 和自变量 x 的数量关系由一个方程来确定，如 $x^2+y^2=r^2$，$e^x+xy-e^y=0$ 等，在这种表达式中，y 和 x 的函数关系隐含在方程之中，通常把未解出因变量的方程

$$F(x,y)=0$$

所确定的 x 与 y 之间的函数关系叫做**隐函数**。

有些隐函数可以化为显函数，例如，从方程 $x^2+y^2=r^2$ 可得到

$$y=\sqrt{r^2-x^2}，\text{或 } y=-\sqrt{r^2-x^2}。$$

而有些则不能化为显函数，例如

$$e^x+xy-e^y=0。$$

四、反函数

自变量与因变量的关系是相对的，在一定的条件下，这两个变量的地位可以互换。例

如，圆的面积 S 和圆的半径 r 之间的函数关系式是 $S=\pi r^2$（其中 r 是自变量，S 是 r 的函数）．如果问题是由面积 S 来确定半径 r，那么可把 S 取作自变量而把半径 r 取作因变量．这样，半径 r 就是面积 S 的函数，r 与 S 的函数关系式为

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

我们称后一个函数 $\left(r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$ 是前一函数（$S=\pi r^2$）的反函数，或者说它们互为反函数。

定义 2 如果在函数 $y=f(x)$ 中，把 y 当作自变量，x 当作因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**。

函数 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $x=f^{-1}(y)$，显然，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数。

习惯上，仍以 x 作为自变量的记号，y 作为因变量的记号。因此，把函数 $x=f^{-1}(y)$（或 $x=\varphi(y)$）改写为 $y=f^{-1}(x)$（或 $y=\varphi(x)$），$y=f^{-1}(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数，这是因为对应法则都是 f^{-1}，定义域相同，只是记号不同而已。可以证明，在同一个坐标系里，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1.9 所示。

例 8 求 $y=2x+3$ 的反函数。

解 由关系式 $y=2x+3$ 解得 $x=\frac{y-3}{2}$，因此，$y=2x+3$ 的反函数为

$$y=\frac{x-3}{2},$$

它的图形是把曲线 $y=2x+3$ 以直线 $y=x$ 为轴翻转 180° 所得到的曲线。曲线 $y=2x+3$ 与曲线 $y=\frac{x-3}{2}$ 是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1.10 所示。

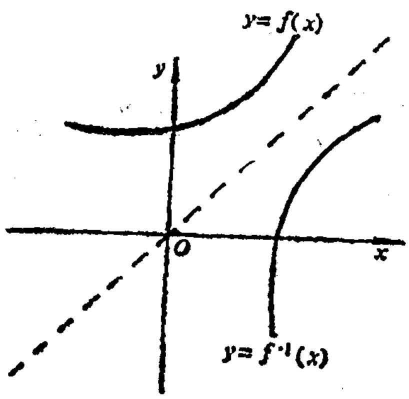


图 1.9

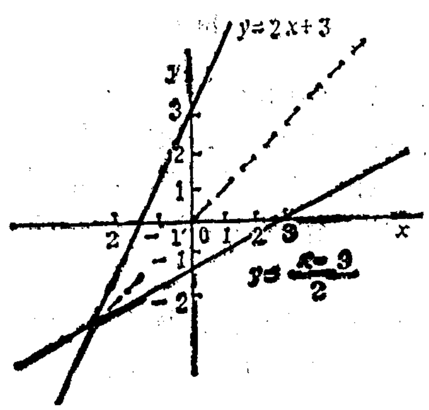


图 1.10

例 9 求 $y=x^2$ 的反函数。

解 由 $y=x^2$ 解得 $x=\pm\sqrt{y}$，这是多值函数，因此在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$y=x^2$ 没有反函数。如果求其反函数，应使函数变为单值函数后再求反函数。如

$y=x^2$，$(0\leqslant x<+\infty)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}$，其定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$；而 $y=x^2$，$(-\infty<x\leqslant 0)$ 的反函数为 $y=-\sqrt{x}$，其定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0]$，如图1.11所示。

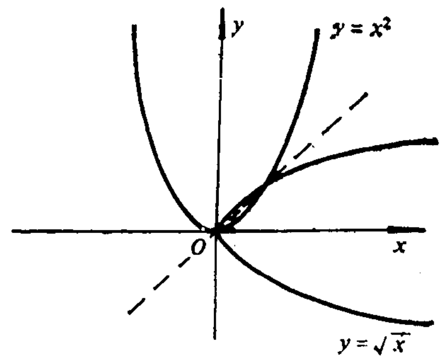


图 1.11

由此例可以看出，一个函数若有反函数，则此函数和其反函数都是单值函数，因此，函数 $y=f(x)$ 的定义域就是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域，而 $y=f(x)$ 的值域则是 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域。

单值单调函数的反函数在对应区间上必存在，且也是单值单调的。

1.3 函数的几种特性

一、奇偶性

定义 1 若函数 $f(x)$ 对于定义域内的所有 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

设 $f(x)$ 为奇函数，因为 $f(-x)=-f(x)$，所以，如果点 $P(x,f(x))$ 在图形上，则它的关于原点对称的点 $P'(-x,-f(x))$ 也在图形上。因此，奇函数的图形关于原点对称。如图1.12 (a) 所示。

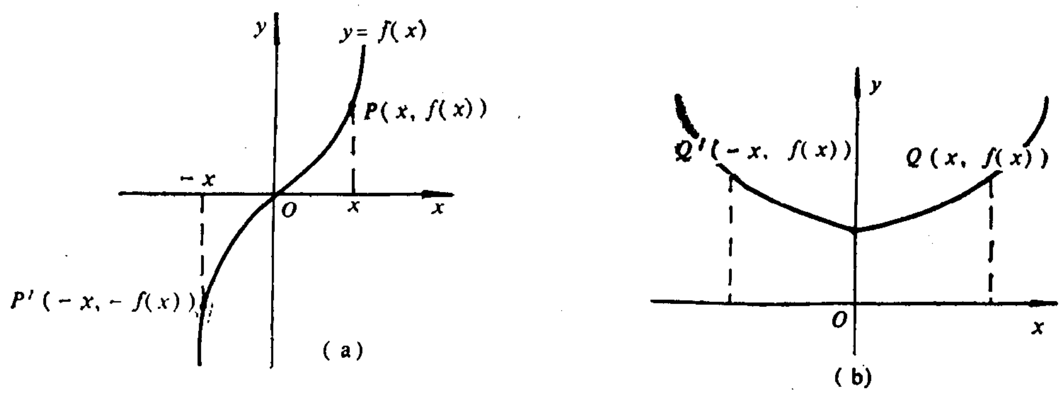


图 1.12

设 $f(x)$ 为偶函数，因为，$f(-x)=f(x)$，所以，如果点 $Q(x,f(x))$ 在图形上，则它的关于 y 轴对称的点 $Q'(-x,f(x))$ 也在图形上。因此，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图1.12 (b) 所示。

如 $y=\sin x$ 和 $y=x^3$ 都是奇函数，$y=\cos x$ 和 $y=x^2$ 都是偶函数。

注 函数奇偶性是关于对称区间而言的，如 $y=\ln x$，因为 $x>0$，故无奇偶性可言。

例 1 判断下列函数的奇偶性：

（1） $y=\dfrac{1}{x}$；　　（2） $y=x^2-4x^4$；

（3）$y=\cos x-\sin x+1$；　　　（4）$y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0.\end{cases}$

解　（1）因为，$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$，所以，$y=\frac{1}{x}$是奇函数。

（2）因为，$f(-x)=(-x)^2-4(-x)^4=x^2-4x^4=f(x)$，所以，$y=x^2-4x^4$是偶函数。

（3）因为$f(-x)=\cos(-x)-\sin(-x)+1=\cos x+\sin x+1$，它既不等于$f(x)$，也不等于$-f(x)$，所以$y=\cos x-\sin x+1$是非奇非偶函数。

（4）因为，当$x>0$时，$f(-x)=-1=-f(x)$，当$x<0$时，$f(-x)=1=-(-1)=-f(x)$，且$f(0)=0$，所以$f(x)$是奇函数。

二、有界性

定义 2　设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数M，使得对一切$x\in(a,b)$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在(a,b)内是**有界的**。如果这样的正数M不存在，则称$f(x)$在(a,b)内是**无界的**。

例如，$y=\sin x$，$y=\operatorname{arctg}x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的。因为对任何实数x，有

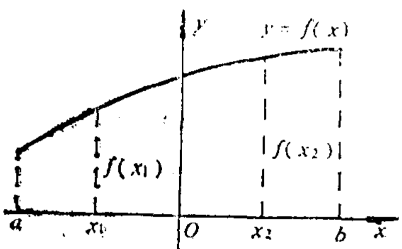
$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\operatorname{arctg}x|<\frac{\pi}{2}.$$

又如，$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的，在$[1,+\infty)$上是有界的。因此，函数是否有界不仅与函数本身有关，还与区间有关。

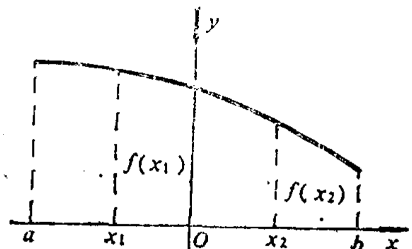
三、单调性

定义 3　设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于任意的x_1，$x_2\in(a,b)$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，那么称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加**的；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，那么称$y=f(x)$在区间(a,b)内是**单调减少**的。

单调增加函数的图形沿x轴正向上升，如图1.13（a）所示；单调减少函数的图形沿x轴正向下降，如图1.13（b）所示。



（a）



（b）

图 1.13

单调增加函数和单调减少函数统称**单调函数**。使函数为单调函数的自变量变化区间叫做函数的**单调区间**。

例 2 判断下列函数的单调性：（1）$y=x^3$；（2）$y=x^2+3$。

解 （1）对于任意的 x_1、x_2，有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3,$$

如果 $x_1<x_2$，那么 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的。

（2）对于任意的 x_1、x_2，有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+3)-(x_2^2+3)=x_1^2-x_2^2$$

在 $(-\infty, 0]$ 内，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $y=x^2+3$ 是单调减少的。

在 $[0, +\infty)$ 内，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^2+3$ 是单调增加的。

因此，在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$y=x^2+3$ 不是单调函数。

四、周期性

定义 4 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 a，使等式 $f(x)=f(x+a)$ 对于定义域内的任何 x 值恒成立，那么称此函数为**周期函数**，满足这个等式的最小正数 a（如果存在的话）称为函数的**周期**。

如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数。显然，所有的三角函数都是周期函数。

例 3 求下列函数的周期：

（1）$y=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$；（2）$y=\cos^2 x$

解 （1）因为正切函数的周期是 π，所以

$$2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad 即 \quad 2\operatorname{tg}\frac{x+2\pi}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

所以函数 $y=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 的周期是 2π，

（2）$\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$

因为余弦函数的周期是 2π，所以

$$\frac{1}{2}[\cos(2x+2\pi)+1]=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$$

即

$$\frac{1}{2}[\cos 2(x+\pi)+1]=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$$

因此，函数 $y=\cos^2 x$ 的周期是 π，