叶 军／编著

初中数学奥林匹克实用教程

报考高中理科实验班专辑

第四册

★基础与提高并重

★同步与超前结合

★乐趣无限　魅力四射

★名师手笔　托起希望之星

湖南师范大学出版社

叶 军／编著

初中数学☆奥林匹克实用教程

第四册

基础与提高并重
同步与超前结合
乐趣无限　魅力四射
名师手笔　托起希望之星

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学奥林匹克实用教程．第4册/叶军编著．—长沙：湖南师范大学出版社，2002.7

ISBN 7—81081—202—5/G·139

Ⅰ．初…　Ⅱ．叶…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 050978 号

初中数学奥林匹克实用教程

第四册

叶　军　编著

策划组稿：李映辉
责任编辑：尹金石
责任校对：杨国才

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市银都教育印刷厂印刷
730×988　16开　20.75印张　427千字
2002年7月第1版　2002年7月第1次印刷
印数：1—15000册
ISBN7—81081—202—5/G·139
定价：22.00元

前 言

在新世纪里,体现因材施教的教育特色,培养不同层次的学科人才,是基础教育正在积极探索的一个重要课题.从全国范围来看,教育部委托北京大学、清华大学、北京师范大学、华东师范大学等高校的附中举办了面向全国的高中理科实验班,其办班的主要目的是为国家培养高水平的中学生学科竞赛人才,以适应国际大赛的需要;从本省来看,湖南省教育厅委托湖南师范大学附中、长沙市一中、长沙市雅礼中学、长沙市长郡中学举办了面向全省的高中理科实验班.自有理科实验班以来,每年均经过了严格的招生考试,考试科目分四科:数学、语文、外语、理化,四科总分450分,其中语文、外语、理化各占100分,惟独数学占150分,并且招生录取原则中规定:数学单科成绩不得低于65分.由此可见数学单科的地位与作用,能否考上高中理科实验班,数学是关键.此举一直受到广大中学教师、学生及家长的广泛关注.

随着我国高等教育的迅猛发展,读大学将不再是一件难事.现在的中学生基本上都是独生子女,家长对子女的期望值已发生了质的变化.以往是大学选择学生,而现在已经出现了学生选择大学(不服从分配)的现象.随着各地理科实验班办学质量不断提高,学生追求名牌大学的愿望将会不断增强,但由于清华、北大等一流大学每年在各省的招生名额都非常少,几乎都被理科实验班的学生提前取走,因此,要在全国高考中竞争考上清华、北大是比较困难的.这样一来,不少学生家长为了实现儿女的清华、北大梦,从初中一年级开始就着手准备了.

在这样一种趋势下,为了保证高中理科实验班有高质量的生源,各地的名牌中学在初中就纷纷办起了各种层次的实验班.这样一来,能进入初中实验班学习就成了学生追求的目标之一.

据我们了解,除了学校办的初中实验班外,在社会上,由社会团体以及学生家长自发创办的面向那些学有余力的学生开设的提高班也有不少.这些民办的提高班,往往是由各中学的初中实验班的学生组成.这些学生在校外学到的知识和技能是对校

内所学知识的重要补充,其中不少学生通过一至两年的学习,就能在全国初中数学联赛以及高中理科实验班的考试中脱颖而出.

据我们了解,目前全国的高、初中数学教科书已进行了大面积的改编,而现在各校初中实验班所用的教材都比较陈旧,适应不了新世纪中学教育改革的需要.现在绝大多数实验班和提高班的师生都希望有一套系统的能适应未来至少5年教育发展的学习用书.

综上所述,根据新编全国高、初中数学教科书的要求,湖南师范大学出版社组织编写了这套《初中数学奥林匹克实用教程》丛书.

该套丛书共分四册,第一至三册中每讲分A、B两子讲.第四册是为报考高中理科实验班的学生编写的复习迎考教材.在编写过程中注意突出以下两点:

(1)基础与提高并重 采用同一讲分A、B两子讲的编写方法,A讲强调基础,帮助学生从竞赛的角度进一步深化对初中课本数学内容的认识,掌握课本以外的奥数内容;B讲强调提高,帮助学生掌握初中奥数中的一些要求较高的内容和技巧.

(2)同步与超前结合 A讲内容与初中教科书内容基本同步,但在数学思维方法的渗透和数学能力与技巧的培养方面又有一定的超前性,以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高;B讲内容则不受教材知识顺序的限制,在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系,帮助学生从整体上把握初中奥数的内容,提高数学素养和综合解题的能力.

值此《初中数学奥林匹克实用教程》出版之机,我谨向热情支持和关心本书出版的湖南师范大学出版社的有关编辑致以崇高的谢意;我还要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师,本书的许多材料来源于他们的智慧和创造;最后还要感谢曹灵芝女士,她为本书的出版做了大量的具体工作.

由于水平所限,书中若有不妥和差错,敬请专家和读者批评指正,并且我热情地期待更多的优秀数学奥林匹克教材问世.

叶　军

2002年夏于湖南师范大学

作者简介

叶军，男，湖南益阳市人，1963年4月生，现为湖南师范大学数学系副教授，中国数学奥林匹克高级教练。已发表论文百余篇，出版著作9部，其中专著《数学奥林匹克教程》是全国各省市高中理科实验班必读的三本奥数书之一，被同行们誉为“白皮书”。叶军是湖南师范大学附中第34届IMO金牌获得者、第32届IMO银牌获得者的主要教练之一。1992年曾率领湖南省队参加第6届中国数学奥林匹克，该队以团体总分第一夺得“陈省身金杯”。

叶军同志从事数学奥林匹克的教学和研究工作近20年（中学6年，大学14年），在大学主讲师范类本科生必修课程“竞赛数学”，几乎每年被省内外名牌中学邀请为理科实验班讲学。他独特的教学风格赢得了广大师生的赞誉，并初步形成了贯穿中学到大学别具一格的数学奥林匹克教学体系。如今有一批青少年学子正在他的指导下脱颖而出。

湖南师大附中

——国际中学生学科奥赛金牌的摇篮

湖南师大附中是湖南省实施素质教育的窗口学校，直属省教育厅管辖。学校历史已近百年，其前身是著名民主革命先驱禹之谟于1905年创办的惟一学堂，1912年更名为湖南省私立广益中学，1941年—1943年朱镕基总理曾就读该校初中部，以第一名的优异成绩毕业。在长期的办学历史中，学校形成了“慎选良师，从严治校，艰苦朴实，注重学生主动全面发展”的优良办学传统和深厚的教育文化积淀，培养出一大批优秀人才。

学校坐落在风光秀丽人文荟萃的岳麓山下，校园占地10.7万㎡，建筑总面积近9万㎡，建成了千兆校园网络，教学设施已具备信息化功能。现有45个教学班，2500余名学生；教职工295名，其中专任教师204名(高级教师101名)，先后有19人被评为特级教师，有14人获全国或省级劳动模范称号。学校共获得各类国家级荣誉称号8次，教改教研成果获省级以上奖励16项，1999年由省教育厅推荐，成为教育部“国家级示范性普通高中建设”课题项目学校(全国共4所)。

自1991年由省教育厅批准创办省高中理科实验班至今，学生获学科竞赛省一等奖以上的达350余人次，占高中理科实验班毕业生总人数的53.6%，进入学科奥赛国家冬令营的105人次，入选国家集训队的49人次，23人进入国家代表队，代表我国参加国际中学生学科奥赛，共夺取金牌12枚、银牌6枚。郭婧(女)同学以世界第一的优异成绩荣登国际生物奥赛冠军的领奖台。今年7月，高中理科实验班学生肖维、杨桓、吕华又将代表我国中学生分赴英国、印尼、荷兰参加国际数学、物理、化学奥赛。在已毕业的11届共660名高中理科实验班学生中，升入北大、清华、复旦、上海交大、中国科大、浙大等名牌大学的近400人。

十年树木，百年树人；改革进取，任重道远。在新的世纪中，湖南师大附中必将创造新的辉煌。

欢迎三湘四水的莘莘学子踊跃报考湖南师大附中高中理科实验班，用智慧和激情谱写新一曲青春之歌的华彩乐章！

附: 湖南师大附中学生参加国际学科奥赛成绩一览表

(1991-2002)

时 间	地 点	姓 名	竞 赛 名 称	获奖
1991 年	瑞 典	郭早阳(长沙县)	第 32 届国际中学生奥林匹克数学竞赛	银牌
1992 年	芬 兰	李 翌(长沙市)	第 23 届国际中学生奥林匹克物理竞赛	金牌
1993 年	土耳其	刘 炀(长沙市)	第 34 届国际中学生奥林匹克数学竞赛	金牌
1993 年	意大利	周 彪(澧 县)	第 25 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	金牌
1993 年	意大利	袁 泉(邵阳市)	第 25 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	银牌
1994 年	香 港	彭建波(湘潭县)	第 35 届国际中学生奥林匹克数学竞赛	金牌
1994 年	挪 威	黄永亮(衡阳市)	第 26 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	金牌
1994 年	挪 威	李帅格(株洲市)	第 26 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	金牌
1995 年	澳大利亚	倪 彬(长沙市)	第 26 届国际中学生奥林匹克物理竞赛	金牌
1995 年	中 国	骆宏鹏(资兴市)	第 27 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	金牌
1997 年	土库曼斯坦	夏 凡(津市市)	第 8 届国际中学生奥林匹克生物竞赛	金牌
1997 年	加拿大	刘登峰(安化县)	第 29 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	银牌
1997 年	土耳其	贺毅憬(长沙市) 刘晓隽(长沙市)	第 5 届国际环境科学奥林匹克竞赛	银牌
1998 年	德 国	郭 婧(株洲市)	第 9 届国际中学生奥林匹克生物竞赛	金牌
1998 年		艾颖华(武冈市)	人选第 39 届国际中学生奥林匹克数学竞赛中国代表队，因台湾问题中国未能参赛	
1999 年	罗马尼亚	孔文彬(桃源县)	第 40 届国际中学生奥林匹克数学竞赛	银牌
2000 年	土耳其	徐良亮(浏阳市)	第 11 届国际中学生奥林匹克生物竞赛	银牌
2001 年	美 国	余 君(华容县)	第 42 届国际中学生奥林匹克数学竞赛	金牌
2001 年	比利时	廖雅静(长沙市)	第 12 届国际中学生奥林匹克生物竞赛	金牌
2002 年	英 国	肖 维(望城县)	第 43 届国际中学生奥林匹克数学竞赛	7 月参赛
2002 年	印 尼	杨 桓(长沙市)	第 33 届国际中学生奥林匹克物理竞赛	7 月参赛
2002 年	荷 兰	吕 华(常宁县)	第 34 届国际中学生奥林匹克化学竞赛	7 月参赛

内容简介

本套丛书共四册，本册是专门为学完前三册后的学生报考高中理科实验班编写的复习迎考教材。本册分三部分，第一部分专题介绍了第一试的基本题型与解题方法；第二部分推出了20套湖南省高中理科实验班招生考试数学模拟AB卷，其中A卷注重第一试的训练，B卷注重第二试的训练，各卷均给出了参考答案与解答；第三部分介绍了历届湖南省高中理科实验班招生考试数学试卷，并附有参考答案与评分标准。

目　录

第一部分 第一试基本题型分析

参加省级以上高中理科实验班的考试，一般来说分为第一试和第二试.第一试的考试难度略高于中考，题型与中考相似；第二试的难度高于中考，基本上与全国初中数学联赛相当，个别题目的难度要高于联赛.

由于第一试的分值占总分值的60%，因此，在本书的这一部分里，我们专门分析第一试的基本题型，希望能给同学们一些帮助与启示.

第一讲 函数型基本问题

函数型基本问题包括函数与方程问题、函数与几何问题以及函数与解析几何问题.下面我们针对以上三类问题中的一些典型例题作一些解法分析.

§1.1 函数与方程问题

例1 (1)若抛物线 $y=ax^2+x+2$ 经过点$(-1,0)$.

①求 a 的值,并写出这条抛物线的顶点坐标;

②若点 $P(t,t)$在抛物线上,则点 P 叫做抛物线上的不动点,求出这条抛物线上所有不动点的坐标.

(2)当 a 取a_1 时,抛物线 $y=ax^2+x+2$ 与 x 轴正半轴交于点$M(m,0)$;当 a 取 a_2 时,抛物线 $y=ax^2+x+2$ 与 x 轴正半轴交于点 $N(n,0)$.若点 M 在点N 的左边,试比较 a_1 和 a_2 的大小.

解 (1)①$\because$ 抛物线 $y=ax^2+x+2$ 经过点$(-1,0)$,$\therefore$ $a=-1$.

$\therefore$ 抛物线 $y=-x^2+x+2$ 的顶点坐标为$(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$.

②根据题意,得 $-t^2+t+2=t$.解得 $t=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ 这条抛物线上有两个不动点,坐标分别为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$和$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

(2)$\because$ 当 a 取 a_1 时,抛物线与 x 轴正半轴交于点$M(m,0)$,

$\therefore$ $a_1m^2+m+2=0$.$\therefore$ $a_1=-\frac{m+2}{m^2}$.

同理 $a_2=-\frac{n+2}{n^2}$.

$$a_1-a_2=-\frac{m+2}{m^2}-(-\frac{n+2}{n^2})$$
$$=\frac{m^2n+2m^2-mn^2-2n^2}{m^2n^2}$$
$$=\frac{(m-n)(mn+2m+2n)}{m^2n^2}.$$

$\because$　M、N 在 x 轴正半轴上，$\therefore$　$m>0,n>0$.

又$\because$　点 M 在点 N 的左边，

$\therefore$　$m<n$，从而 $m-n<0$.

$\therefore$　$a_1-a_2=\dfrac{(m-n)(mn+2m+2n)}{m^2n^2}<0$.

$\therefore$　$a_1<a_2$.

例 2　如图 1 - 1，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个公共点 P，与 y 轴的交点为 Q，过点 Q 的直线 $y=2x+m$ 与 x 轴交于点 A，与这个二次函数的图象交于另一点 B. 若 $S_{\triangle BPQ}=3S_{\triangle APQ}$，求这个二次函数的解析式.

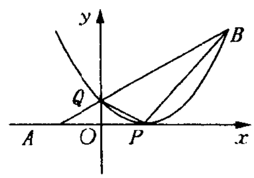

图 1 - 1

解　由图象，知 $m=c$，解方程组

$$\begin{cases}y=x^2+bx+c, & ①\\ y=2x+m. & ②\end{cases}$$

由① - ②，得　$x^2+(b-2)x=0$,

$\therefore$　$x_1=0,x_2=2-b$.

$\therefore$　$Q(0,c),B(2-b,4-2b+c)$.

$\because$　$S_{\triangle BPQ}=3S_{\triangle APQ}$,

$\therefore$　$S_{\triangle PAB}=4S_{\triangle APQ}$.

$\therefore$　$\dfrac{4-2b+c}{c}=4,b=2-\dfrac{3}{2}c$.

$\because$　$y=x^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个公共点，$\therefore$　$b^2-4c=0$.

$\therefore$　$(2-\dfrac{3c}{2})^2-4c=0$.

$\therefore$　$9c^2-40c+16=0$.

$\therefore$　$c_1=\dfrac{4}{9},c_2=4$.

又$\because$　$x=-\dfrac{b}{2}>0$，$\therefore$　$b<0$.

$\therefore$　$2-\dfrac{3}{2}c<0$. $\therefore$　$c>\dfrac{4}{3}$.

$\therefore$　$c=4,b=-4$. $\therefore$　二次函数解析式为　$y=x^2-4x+4$.

注　本题关键是通过解方程组，求得 Q、B 的坐标. 同时，还运用了抛物线与 x

轴只有一个公共点，建立 $\Delta=0$ 这一方程，求出 c 的值.

例3　已知抛物线 $y=ax^2-2ax+c-1$ 的顶点在直线 $y=-\frac{8}{3}x+8$ 上，与 x 轴相交于 $B(\alpha,0)$、$C(\beta,0)$ 两点，其中 $\alpha<\beta$，且 $\alpha^2+\beta^2=10$.

(1)求这条抛物线的解析式；

(2)设这条抛物线与 y 轴的交点为 P，H 是线段 BC 上的一个动点，过 H 作 $HK /\!/ PB$，交 PC 于 K，连结 PH，记线段 BH 的长为 t，$\triangle PHK$ 的面积为 S，试将 S 表示成 t 的函数；

(3)求 S 的最大值，以及 S 取最大值时过 H、K 两点的直线的解析式.

解　(1)由 $y=ax^2-2ax+c-1=a(x-1)^2+c-1-a$，得抛物线的顶点为 $A(1,c-1-a)$.

$\because$　点 A 在直线 $y=-\frac{8}{3}x+8$ 上，

$\therefore$　$c-1-a=-\frac{8}{3}\times1+8$，即　$c=a+\frac{19}{3}$.　①

又抛物线与 x 轴相交于 $B(\alpha,0)$、$C(\beta,0)$ 两点，

$\therefore$　α、β 是方程 $ax^2-2ax+c-1=0$ 的两个根.

$\therefore$　$\alpha+\beta=2,\alpha\beta=\frac{c-1}{a}$.

又　$\alpha^2+\beta^2=10$，即　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10$.

$\therefore$　$4-2\times\frac{c-1}{a}=10$，即　$c=1-3a$.　②

由①、②，解得　$a=-\frac{4}{3},c=5$.

$\therefore$　$y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$.

此时，抛物线与 x 轴确有两个交点，故所求的抛物线解析式为

$y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$.

(2)由抛物线 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$，

令　$x=0$，得　$y=4$，故 P 点坐标为 $(0,4)$.

令　$y=0$，解得　$x_1=-1,x_2=3$.

$\because$　$\alpha<\beta$，

$\therefore$　$B(-1,0),C(3,0)$.

$\therefore$　$BC=4$. 又由 $OC=3,OP=4$，得 $PC=5,\sin\angle BCP=\frac{OP}{PC}=\frac{4}{5}$.

$\because$　$BH=t$，　$\therefore$　$HC=4-t$.

$\because \quad HK /\!/ BP, \quad \therefore \quad \dfrac{BH}{HC}=\dfrac{PK}{KC},$

即 $\dfrac{t}{4-t}=\dfrac{PK}{5-PK}. \quad \therefore \quad PK=\dfrac{5}{4}t.$

如图 1-2,过 H 作 $HG \perp PC$ 于 G,则

$HG=HC\cdot\sin\angle BCP=(4-t)\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}(4-t),$

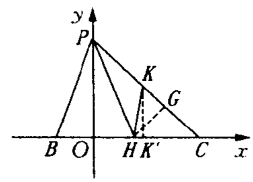

图 1-2

$\therefore \quad S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{4}t\cdot\dfrac{4}{5}(4-t)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t.$

$\because$ 点 H 在线段 BC 上,且 $HK /\!/ BP$, $\therefore \quad 0<t<4.$

$\therefore$ 所求的函数式为 $S=-\dfrac{1}{2}t^2+2t(0<t<4).$

(3)由 $S=-\dfrac{1}{2}t^2+2t=-\dfrac{1}{2}(t-2)^2+2 \quad (0<t<4)$,可知当 $t=2$(满足 $0<t<4$)时,S 取最大值,其值为 2.

此时,点 H 的坐标为(1,0).

$\because \quad HK /\!/ PB$,且 H 为 BC 的中点,$\therefore \quad K$ 为 PC 的中点.

作 $KK' \perp HC$ 于 K',则

$KK'=\dfrac{1}{2}PO=2, OK'=\dfrac{1}{2}CO=\dfrac{3}{2},$

$\therefore$ 点 K 的坐标为$(\dfrac{3}{2},2)$.

设所求直线的解析式为 $y=kx+b$,则

$\begin{cases}0=k+b,\\ 2=\dfrac{3}{2}k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=4,\\ b=-4.\end{cases}$

故所求的解析式为 $y=4x-4.$

说明 本题综合考查了一元二次方程的根与系数的关系,二次函数的性质及几何知识等,它要求我们具有扎实的基础知识和较强的综合能力.

例 4 已知直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 和 $y=-x+m$,二次函数 $y=x^2+px+q$ 图象的顶点为 M.(1)若 M 恰在直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 与 $y=-x+m$ 的交点处,试证明无论 m 取何实数值,二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图象与直线 $y=-x+m$ 总有两个不同的交点;(2)在(1)的条件下,若直线 $y=-x+m$ 过点 $D(0,-3)$,求二次函数 $y=x^2+px+q$ 的表达式,并作出其大致图象;(3)在(2)的条件下,若二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图象与 y 轴交于点 C,与 x 轴的左交点为 A,试在直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上求异于 M 的点 P,使 P 在$\triangle CMA$ 的外接圆上.

(1)证明　由$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x, & ① \\ y=-x+m. & ② \end{cases}$

得 $x=\dfrac{2}{3}m, y=\dfrac{1}{3}m$. ∴　交点 $M(\dfrac{2}{3}m,\dfrac{1}{3}m)$.

此时二次函数为　$y=(x-\dfrac{2}{3}m)^2+\dfrac{1}{3}m=x^2-\dfrac{4}{3}mx+\dfrac{4}{9}m^2+\dfrac{1}{3}m$.　③

由②、③联立，消去 y，得 $x^2-(\dfrac{4}{3}m-1)x+\dfrac{4}{9}m^2-\dfrac{2}{3}m=0$.

又∵　$\Delta=[-(\dfrac{4}{3}m-1)]^2-4\times1\times(\dfrac{4}{9}m^2-\dfrac{2}{3}m)$

$=\dfrac{16}{9}m^2-\dfrac{8}{3}m+1-\dfrac{16}{9}m^2+\dfrac{8}{3}m=1>0$.

∴　无论 m 为何实数值，二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图象与直线 $y=-x+m$ 总有两个不同的交点.

(2)解　∵　直线 $y=-x+m$ 过点 $D(0,-3)$，

∴　$-3=0+m$.　∴　$m=-3$.

∴　$M(-2,-1)$.

∴　二次函数为　$y=(x+2)^2-1=(x+3)(x+1)$.

图象如图 1－3.

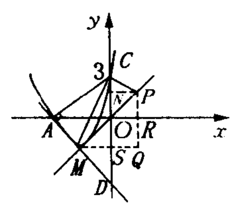

图 1－3

(3)解　由勾股定理，可知△CMA 为 Rt△，且∠$CAM=90°$.

∴　MC 为△CMA 外接圆直径.

∵　P 在 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上，可设 $P(n,\dfrac{1}{2}n)$，由 MC 为△CMA 外接圆直径，P 在这个圆上，

∴　∠$CPM=90°$.

过 P 作 $PN\perp y$ 轴于 N，$PR\perp x$ 轴于 R，过 M 作 $MS\perp y$ 轴于 S，MS 的延长线与 PR 的延长线交于点 Q，由勾股定理，得 $MP^2=MQ^2+QP^2$，即

$MP^2=(n+2)^2+(\dfrac{1}{2}n+1)^2$. $CP^2=NC^2+NP^2=(3-\dfrac{1}{2}n)^2+n^2$,

$CM^2=20$. 而 $MP^2+CP^2=CM^2$,

∴　$(n+2)^2+(\dfrac{1}{2}n+1)^2+(3-\dfrac{1}{2}n)^2+n^2=20$.

解得　$n_1=\dfrac{6}{5}$, $n_2=-2$. 而 $n_2=-2$ 即是 M 点的横坐标，不合题意，故舍去.

∴　P 点的坐标为$(\dfrac{6}{5},\dfrac{3}{5})$.

注　本题难度大，计算量大，推理过程多，将抛物线与直线的交点问题，转化为方程组问题，最终转化为方程问题.

习题 1—1

1. 已知二次函数 $y=x^2-(2m+4)x+(m+2)(m-2)$ 的图象与 y 轴的交点 C 在原点下方，与 x 轴交于 A、B 两点，点 A 在点 B 的左边，点 A、点 B 到原点 O 的距离分别为 OA 和 OB.
(1)求证：$OB-OA=2m+4$；
(2)确定实数 m 的取值范围；
(3)若 $3(OB-OA)=2OA\cdot OB$，求此二次函数的解析式.

2. 已知：关于 x 的一元二次方程 $(k+3)x^2+kx+\frac{2k+3}{8}=0$ 有两个不相等的实数根 α 和 β，且反比例函数 $y=\frac{2k+7}{x}$ 的图象的两个分支在各自象限内 y 随 x 的增大而减小.(1)求 k 的取值范围；(2)当 k 取满足上述条件的整数值时，求以 $\frac{8}{3}(\alpha-\beta)^2$，$-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})$ 为两直角边长的直角三角形的内切圆半径.

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点（A 在 B 左侧），与 y 轴正半轴交于点 C，$\triangle ABC$ 为直角三角形，A、B 两点的横坐标 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2-2(m-1)x-m^2+1=0$ 的两个根，且 $(x_1-x_2)^2=16$.求这条抛物线的解析式及顶点坐标.

4. 已知二次函数 $y=x^2+ax+a-2$.
(1)求证：无论 a 为何实数，此函数的图象与 x 轴总有两个交点；
(2)当两个交点间的距离为 $\sqrt{29}$ 时，求 a 值；
(3)求出函数的最大值或最小值.

5. 已知抛物线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴交于 A、B 两点，交 y 轴负半轴于 C 点，$\angle ACB=90°$，且 $\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}=\frac{2}{OC}$.求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积.

6. 在直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx+2-m$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，其中点 A 在点 B 的左边，若 $\angle ACB=90°$，$\frac{CO}{AO}+\frac{BO}{CO}=1$.
(1)求点 C 的坐标及这个二次函数的解析式；
(2)试设计两种方案：作一条与 y 轴不重合，与 $\triangle ABC$ 的两边相交的直线，使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，并且面积是 $\triangle AOC$ 面积的四分之一.求所截得的三角形三个顶点的坐标（说明：不要求证明）.

7. 直线 $y=kx+b$ 经过点 $P(m,2m)$（其中 $m>0$），该直线又分别与 x 轴、y 轴正半轴交于 B、C 两点，且 $S_{\triangle OCB}=4m^2$.抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 B、C 两点，与 x 轴的