1979年日本全国各大学

数学入学试题汇解

浙江科学技术出版社

1979年日本全国各大学

数学入学试题汇解

张明樑　王兴华编译

浙 江 科 学 技 术 出 版 社

封面设计　盛元富

1979年日本全国各大学
数学入学试题汇解
张明樑　王兴华编译
*
浙江科学技术出版社出版
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本：787×1092　1/32　印张4.625　字数112,000
1980年4月第一版
1980年4月第一次印刷
统一书号：13221·2
定　价：0.45元
（杭州大学印刷厂排版）

出版说明

本书根据日本圣文社编的《一九七九年度全国大学数学入试问题详解》及其续编，选译其中有关初等数学的试题，按其内容分类汇编而成。编译时，在不影响题意的前提下，对题文作了适当更动，使之前后比较连贯，自成系统。在题解上，更作了较大的删改，力求精炼扼要，突出主干，别具一格。

本书可供中学数学教师、高中学生以及数学爱好者参考。

目　录

试题汇编

试 题 汇 编

一、数 与 式

有理数和无理数

1. 设 a 与 b 为正有理数，满足

$(\sqrt{3}a+\sqrt{2})a+(\sqrt{3}b-\sqrt{2})b-\sqrt{2}-25\sqrt{3}=0.$

求 a 与 b 之值. 〔215〕*)

2. 设 a，b 为有理数，已知 $A=\dfrac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$，$B=(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2})$

满足 $B=\dfrac{8A}{(1+A)^2}$ 的关系，试根据"$\sqrt{2}$ 为无理数"，推导 a 与 b 的关系. 〔147〕

3. 分别就 （1） m 为正整数；（2） m 为负整数 这两种情形，求满足

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^m+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^m=4$$

的 m 之值. 〔152〕

4. 证明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数. 〔121〕

整 式 的 计 算

5. 因式分解 $x^2y+xy^2+x^2+2xy+y^2+x+y.$ 〔214〕

6. 因式分解 $-2x^2+xy-5x+y^2-y-2.$ 〔165〕

---

*）每题后面方括号内的数字依照附录的排列顺序对应着一个大学，表示本题是从该大学的入学试卷中选来的.

7. 因式分解　$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. 〔173〕

8. 在实系数的范围内分解 a^6+b^6 的因式. 〔157〕

9. 证明：不可能选择这样的实数 a，b，c，d，使 x 的二次式 $3x^2+2x+1$ 因式分解为 $(ax+b)(cx+d)$. 〔168〕

10. 求 x^2+2x+1 和 x^2+3x+2 的最大公因式与最小公倍式. 〔225〕

11. 为使 $2x^3+3x^2-2x-3$ 与 $x^3-2x^2+(1-a)x+a$ 这两个整式有二次最大公因式，试求 a 的值. 〔179〕

12. 为使 x^3+4x^2+x-6 与 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$ 这两个整式有二次最大公因式，试求 a 的值. 〔171〕

13. 设　$x^2-x+1=0$，求 $1+x^3+\dfrac{1}{1-x^3}$ 的值. 〔197〕

14. 设 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$，求 x^7+y^7 的值. 〔90〕

15. 设　$P=x^3+4x^2+x-6$，$Q=x^3+2x^2-5x-6$，求 P 和 Q 的最大公因式 G，并将 G 用 P 和 Q 加以表示. 〔75〕

16. 设正整数 $n\geqslant3$，

$$P_n=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,$$
$$Q_n=x^{3n-1}+x^{3n-2}+\cdots+x^{2n+2}+x^{2n+1}+1.$$

(1) 化简 $(x-1)P_n$.

(2) 证明 Q_n 能被 P_n 整除，并求商式.

(3) 若 $x^n-1=0$，试求 P_{3n} 之值. 〔149〕

整式的整除问题

17. 求 x^4 被 $x^2+\sqrt{2}x+1$ 除的商和余式. 〔221〕

18. 若 x^3+ax^2+6x-4 能被 $x+2$ 整除，求 a 的值. 〔225〕

19. 若 $2x^3+ax^2+bx+4$ 能被 $2x^2-5x+2$ 整除，求 a 与 b 的值. 〔83〕

20. 若 x^3-px^2+3x+q 能被 $(x+1)^2$ 整除，求 p 和 q 之值. 〔79〕

21. 设整式 $f(x)$ 用 $x-2$ 除余 1，用 x 除余 -1. 试求 $f(x)$ 用 $x(x-2)$ 除的余式. 〔73〕

22. 设整式 $f(x)$ 用 $x-1$ 除余 3，用 $x-2$ 除余 4. 试求 $f(x)$ 用 x^2-3x+2 除的余式. 〔76〕

23. 设自然数 $n\geqslant 2$，实数 $a\neq -2$. 若 x^n 用 $x^2+ax-(a+1)$ 除余 a_nx+b_n，试求 a_n 与 b_n. 〔78〕

24. 设 a，b，c 为相异的三个数. 若整式 $f(x)$ 被 $x-a$，$x-b$，$x-c$ 除的余式分别是 a^2+b+c，$a+b^2+c$，$a+b+c^2$，试求 $f(x)$ 被 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除的余式. 〔154〕

25. 设 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+9x+7$，$g(x)=dx+e$，$h(x)=dx-e$，$g(1)=0$. 又设 $f(x)$ 被 $\{h(x)\}^2$ 除的商为 $a(x-2)^2$，余式为 $g(x)$. 试求其中的常数 a，b，c，d，e 的值. 〔207〕

26. 设有二次式 $g(x)=x^2-4x+a$，这里 a 是常数. 假如有唯一的三次项系数为 1 的三次整式 $f(x)$ 存在，它既是 $g(x)$ 的倍式，又是 $\{g(x)\}^2$ 的因式，试于此时求 a 和 $f(x)$. 〔206〕

分式与无理式的计算

27. 已知 $a:b:c=2:3:4$，求 $\dfrac{a-b-c}{a+b+c}$. 〔145〕

28. 计算或化简： 〔90，225，229〕

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$； (2) $\dfrac{a^2-ab}{a+b}\div\dfrac{a-b}{ab+b^2}$；

(3) $\dfrac{2x+3y}{x^2-x+1}-\dfrac{3x-2y}{x^2+x+1}$； (4) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}$.

29. 对正整数 p，q 与 r，$q<r$，定义

$$S\left(p+\frac{q}{r}\right)=\begin{cases}p+1, & \text{当 } p \text{ 为偶数时；}\\ p, & \text{当 } p \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

试求 $S\left(5+\frac{1}{2}\right)-S\left(2+\frac{3}{4}\right)$之值. 〔95〕

30. 如果 a 与 b 都是整数，$a<b$，p 是自然数.

(1) 求在 a 与 b 之间分母为 p 的所有不是整数的分数之和 S.

(2) 试证，S 为整数的充分且必要条件是，$(-1)^a=(-1)^b$ 或者 $(-1)^p=-1$. 〔45〕

31. 设 $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$，求 x^2+2x-1 之值. 〔73〕

32. 设 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求 $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}$ 之值. 〔74〕

33. 设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b. 试求 a，b 和 $a^2+\frac{1}{2}ab+b^2$. 〔215〕

34. 化简： 〔225, 228〕

(1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$； (2) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{2}{7-4\sqrt{3}}}$.

整 数 问 题

35. 试求满足方程 $2xy-4x-y-4=0$ 的自然数 x 和 y. 〔216〕

36. 求联立方程

$$\begin{cases} x^2-2xy+4yz-4z^2=5, \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

的整数解. 〔206〕

37. 已知 $n!$ 的末三位是 000，试求最小的 n. 〔169〕

38. 设 M 是这样的数的全体所成的集合，这种数能表示成不少于两个的相继自然数之和（例如 $5=2+3$，$12=3+4+5$）.

(1) 试证对任意 $n\in M$，总存在自然数 l 和 m，使 $n=l(2m+1)$.

(2) 证明对任意自然数 l 和 m，都有 $l(2m+1)\in M$.

(3) 把不属于 M 的一切自然数从小到大排成数列 $\{a_n\}$，试求其通项. 〔129〕

39. (1) 试证，在形如 aba 的三位数中，若 $a+b$ 是 7 的倍数，则 aba 也是 7 的倍数（例如161，595）. 并且，请把这种偶数全部写出来.

(2) 类似地，在形如 abb 的三位数中，7 的倍数有怎样的规则？试推测这个规律并加以证明，再把这种奇数全部写出来. 〔223〕

40. 设以 p 进制表示的整数 M_p 的各位数码之和为 m_p，但 p 是适合 $2\leqslant p\leqslant 10$ 的整数.

(1) 试证 M_{10} 和 m_{10} 被 9 除时有相同的余数，并且被 3 除时也是这样.

(2) M_p 为偶数的条件，当 p 为偶数时是 M_p 的个位数码为偶数；当 p 为奇数时是 m_p 为偶数. 〔118〕

41. 设 m，n 为自然数，满足 $10\leqslant m<100$，$10\leqslant n<100$，$m+n=100$. 试就十进制表示法而言：

(1) 证明 m^2 和 n^2 的最末二位数码（即个位和十位数码）是相同的.

(2) m^3 和 n^3 的最末二位数码之间有怎样的关系？试推测这个关系并加以证明. 〔198〕

42. (1) 正 n 边形的一个内角多少大？

(2) 把许多同样大小的正 n 边形铺在平面上而做到不留间隙，求 n 所有可能的值. 〔35〕

二、方 程 式

二 次 方 程

43. 设 α 和 β 为二次方程 $t^2+2t+3=0$ 的两个解.

(1) 求 $\alpha^2+\beta^2$ 之值.

(2) 求满足 $\alpha x+\beta y+3=0$ 的实数 x 与 y. 〔90〕

44. 试求一个二次方程，它的两个解各是方程 $2x^2-3x+2=0$ 的两个解的 2 倍加 1. 〔72〕

45. (1) 试决定满足关系式 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的整数 a 与 b.

(2) 若 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 是二次方程 $x^2+sx+t=0$ 的解，试求有理数 s 与 t. 〔229〕

46. 若 $x=1+\sqrt{3}$ 满足 $x^2+px+q=0$,试求有理数 p 与 q.〔157〕

47. 二次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 时有最小值 -1，方程 $f(x)=0$ 的两个解 α 与 β 满足关系式 $\alpha^3+\beta^3=4$. 试求常数 a, b 与 c. 〔166〕

48. 设 $a>b>0$，关于 x 的二次方程

$$x^2-(\log_2 b+\log_a 2)x+\log_a b=0$$

的两个解为 -1 与 2，试求 a 与 b. 〔171〕

49. 试求满足 $x^2+(y-3+i)x-3(y+2)+(y-2)i=0$ 的实数 x 与 y. 〔189〕

50. 设二次方程 $x^2-(a+i)x+(-2+2i)=0$ 对某实数 a 有实数解，求此 a 并求方程的实数解. 〔186〕

51. 设 $\alpha+\beta i$ 是实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个解，这里 α 与 β 为实数.

(1) 当 $\alpha>0$, $\beta\neq 0$ 时，试求点 (a, b) 存在区域，并以

图示之.

(2) 添设 $(\alpha+\beta i)^3$ 为实数的假定，点 (a,b) 应在怎样的曲线上？用式子表示. 〔214〕

52. 设 a 是大于 1 的常数. 若二次方程 $x^2-\dfrac{4}{\sqrt{a}}x+5-a=0$ 有两个相异的实根，试求 a 的范围；又若有重根，试求 a 的值，并求此时重根的值. 〔228〕

53. 设 a 为实常数，试求二次方程 $x^2+2ax+a^3+5a^2+5a+2=0$ 有实数解的充分且必要条件. 〔177〕

54. 设方程 $ax^2-x+1=0$（a 为实数）的解皆为实数，试证其中必有一个不大于 2 的正数解. 〔97〕

55. 在下列两命题 (A) 与 (B) 之中，要使其一成立而另一不成立，试求 a 的变化范围.

(A) 方程 $x^2+ax+1=0$ 有二相异负根；

(B) 方程 $4x^2+4(a-2)x+1=0$ 无实根. 〔222〕

56. 设二次方程 $x^2-2px+1=0$ 的一个解比 1 大，另一个解比 1 小，试求实数 p 的变化范围. 〔73〕

57. 设二次方程 $x^2-px+1=0$ 有两个相异的实数解 α 与 β，且满足 $\alpha^2+\beta^2\leqslant 3$，试求实数 p 的变化范围. 〔165〕

58. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为实系数的二次函数，它使关于 x 的方程 $f(x)+t(x-k)=0$ 对任意实数 t 都有实数解.

(1) 试证方程 $f(x)=0$ 必有实数解.

(2) 试求 k 与 $f(x)=0$ 的解之间的关系. 〔167〕

59. 对整系数的二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$，方程 $f(x)=0$ 的解 α 与 β 满足不等式 $\alpha>1$，$-1<\beta<1$.

(1) 写出 a 与 b 所满足的不等式.

(2) 当 a 固定时，在（1）的关系满足时求使 α 为最小的 b，把它用 a 表示出来.

(3) 在 (1) 的关系满足时，求使 α 为最小的 a 与 b 之值，并求此 α 的最小值. 〔82〕

60. 整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个解 α 与 β 满足不等式 $\alpha>1$，$-1<\beta<0$. 若已知此方程的判别式等于 5，试求 α 与 β. 〔25〕

61. 设实系数二次方程 $x^2+px+q=0$ 的实数解 α 与 β 满足不等式 $|\alpha+p|+|\beta+p|\leqslant 1$.

(1) 试求 p 与 q 之间的关系，并且图示点 (p,q) 的存在区域.

(2) 求 p^2+2q 的最大值和最小值. 〔73〕

62. 设二次方程 $x^2+4ax+3a+1=0$ 的两个根为 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

(1) 试求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 之值.

(2) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，求 a 的变化范围. 〔226〕

63. 设二次方程 $(x^2+1)(1+\cos\alpha)+2x(1+\sin\alpha)=0$ 有实数解，试求 α 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ 的变化范围. 〔154〕

64. 设二次方程 $x^2-\frac{3}{2}x+a=0$ 的两个解为 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$，试求 a 的变化范围. 〔150〕

65. 设方程 $2\cos 2x+4(a-1)\sin x-4a+1=0$ 在 $0\leqslant x<2\pi$ 中有两个相异实根，试求 a 的变化范围. 〔126〕

66. 在二次方程

$$ax^2-\sqrt{2}bx+c=0 \qquad ①$$

中，a,b,c 为一钝角三角形的三边长，且以 b 为最长.

(1) 证明①有两相异实根.

(2) 证明这两个实根 α，β 都是正的.

(3) 若 $a=c$，试求 $|\alpha-\beta|$ 的变化范围. 〔143〕

67. 假定三个二次方程 $x^2-3x+a=0$，$2x^2+ax-4=0$ 和

$ax^2+bx-3=0$ 有公共解，试求整数 a 与 b. 〔181〕

68. 设 θ 为满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的常数. 假定方程

$x^3-3x-2\cos\theta=0$ 与 $x^2+x\sin\theta-1=0$ 有公共解.

(1) 求 θ 的最小值 θ_1，并求此时的公共解 x_1.

(2) 求 θ 的最大值 θ_2，并求此时的公共解 x_2. 〔176〕

69. 对正整数 n，设使方程 $2x^2+2nx+m=0$ 有实数解的正整数 m 一共有 a_n 个. 试就 n 为偶数与奇数两种情形，写出 a_n 的表示式；并对偶数 N，求 $\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$. 〔78〕

70. 设 n 为自然数，试求一个二次方程，它的两个解是二次方程 $x^2+2(n+1)x+6n-5=0$ 的两个实数解的整数部分（所谓一个实数的整数部分，是指不超过此实数的最大整数）. 〔72〕

71. 设以 $a,b,c(a>b\geqslant c)$ 为三边长的一个三角形并非直角三角形，假如将 a,b,c 都伸长或都缩短同一长度，使得它们成为一个直角三角形的三边之长.

(1) 试将伸长或缩短的长度用 a,b,c 表示.

(2) 如果原来的三角形是一个钝角三角形，试判断实际可能的是伸长还是缩短，并说明理由. 〔189〕

复数的计算

72. 求下列复数的实部和虚部： 〔99,153,228〕

(1) $\dfrac{2+i}{(1+i)^2}$； (2) $\left(i-\dfrac{1}{i^2}\right)^6$； (3) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1979}$.

73. (1) 对于复数 $a+bi$ (a,b 为实数)，要使适合 $a+bi=\dfrac{x+i}{x-i}$ 的实数 x 存在，求 a 与 b 的关系.

(2) 若 $\dfrac{1}{3}+bi=\dfrac{x+i}{x-i}$，求实数 b 与 x. 〔179〕

74. 设 $z=x+yi$ 使 $z^2+\frac{9}{z^2}$ 取实数，试描绘所有这种点 $P(x,y)$ 所形成的平面图形. 〔206〕

75. 试求适合下式的正数 a 和 b：

$$(a-bi)(ai-b)-2(3i+1)+b=0.$$ 〔215〕

76. 把 x^4+x^2-2 分解成四个一次式的积. 〔79〕

77. 设 x 和 y 是实数，$z=x+yi$，当 $|z|=1$ 时，求

$$u=|z^2-z+1|$$

的最大值和最小值. 〔75〕

高 次 方 程

78. 解方程 $x^4+4=0$. 〔227〕

79. 解方程 $x^3-8x^2+25x-26=0$. 〔198〕

80. 设 a,b,c 为实数，p,q,r 为正数.

(1) 证明方程 $(x-a)(x-b)=r$ 有两个实根.

(2) 设 (1) 中的两个实根为 α 与 β $(\alpha<\beta)$，如置

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)-(p+q+r)x+(ap+bq+cr),$$

试检查 $f(\alpha)$ 的正负号.

(3) 对 (2) 中的函数 $f(x)$，讨论方程 $f(x)=0$ 的实数解的个数. 〔170〕

81. 对实数 k，研究方程 $x^4+2x^3+(k-1)x^2-2x-k=0$ 的实数解的个数（重根算作一个解）. 〔200〕

82. 设关于 x 的方程

$$(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$$

有四个相异的实数解，试图示点 (a,b) 的存在范围. 〔22〕

83. 为使由实参变量 a 给出的曲线

$$\begin{cases}x=a^2-2a,\\ y=a^4-4a^3-4a^2+7a+12\end{cases}$$

与 x 轴不相交，试确定 a 的变化范围. 〔179〕

84. 设方程 $2x^4+bx^2+8=0$ 的四个解都是整数，求这些解和 b 之值. 〔190〕

85. 整系数三次方程 $x^3-ax^2+ax+2a+1=0$ 的三个解中正好有两个是正数，并且两两之和成比例，求这三个解与 a 之值. 〔75〕

联 立 方 程

86. 解联立方程

$$\begin{cases} x-2y+8z=7, \\ 2x+3y-5z=14, \\ 3x+4y+19z=-29. \end{cases}$$

〔192〕

87. 解联立方程

$$\begin{cases} x+2y+2z=\dfrac{k+3}{2}, \\ x+3y+z=k, \\ x-y=\dfrac{k(k-1)}{2}; \end{cases}$$

此外，若要解 x,y,z 取正值，求这种 k 的变化范围. 〔189〕

88. 为使联立方程

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2=5, \\ y=2x+m \end{cases}$$

只有一组解，试求 m 的值. 〔178〕

89. 求联立方程

$$\begin{cases} ax+3y=0, \\ (b+3)x+ay=0 \end{cases}$$

有 $(x,y)=(0,0)$ 以外的解存在的充分且必要条件. 〔29〕

90. 求联立方程