

高等学校教材

# 微波理论与技术

方大纲 刘次由 编著

兵器工业出版社

**微波理论与技术**

方大纲 刘次由 编著

\*

**兵器工业出版社** 出版

(北京市海淀区车道沟10号)

新华书店北京发行所发行

五三一印刷厂印装

\*

开本: 787×1092 1/16 印张: 18 字数: 440千字  
1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷 印数: 3500  
统一书号: 15471.002 定价: 3.00元

ISBN 7-80038-001-7

## 内 容 简 介

本书详细介绍了电磁理论的基本原理和方法，并紧密联系微波电路和天线两方面的实际，介绍了解析方法和数值方法的具体应用和这方面的一些新进展，其中包括谱域技术、最优化技术、复功率守恒技术等。在介绍分析方法的同时还着重阐明物理意义以及各种方法的本质和相互联系。为便于自学，问题的引入都从最基本地方开始并补充必要的数学知识，力求深入浅出。本书可作为研究生教材和高年级大学生选修教材，也可供具有大学电磁理论基础的科技人员、教师进修和参考之用。

本书由邓次平主审，经原兵器工业部第一教材编审委员会微波技术编审小组于1985年11月召开的全体会议审定，同意作为教材出版。原兵器工业部教材编审室责任编辑：贺白眉。

# 前 言

本教材是在为微波专业研究生和本科生所编写的讲义基础上整理而成的。它可作为研究生教材，经适当删节也可作为微波专业本科生教材。

教材的编写力求做到：

(1) 篇幅尽量小些，因而所选择的内容不求全面，着重于基本概念，介绍基本概念时着眼于融会贯通。例如第一章电磁基本理论部分用格林定理贯穿起来。对于几个辅助位函数和汉森波矢量的关系，波导问题几种解法的一致性以及求解谱域格林函数几种方法的比较等都作了阐明；

(2) 注意突出重点，对于电磁理论中常用的边界条件、边缘条件、等效原理、反应概念等的意义以及在各种情况下的应用，都作了比较详尽的介绍；

(3) 注意理论与实践的结合，在引入理论时同时给出典型的例子，所选习题有些也是来自实际问题。选材时还尽量把近几年来文献上出现的原理和方法，例如最优化技术的应用、复功率守恒技术、谱域技术、反应积分方程等进行了介绍，以减少阅读这方面文献的困难；

(4) 本教材只要求读者具备电专业基础课程的水平，考虑到这个起点，因而对有些数学工具进行了一定的补充，例如最优化一章中，一开始就把这一章所要用到的线性代数的基本内容作了扼要的概括。在其余章节，问题的引进也往往是从最基本的地方开始，以期便于自学。

以上这些尝试是否成功还有待于今后实践的进一步检验。

感谢已经出版的许多很好的电磁理论著作和教材的作者们，这些书是我们的好老师，也是本教材的主要源泉。这些书中，主要的有十几本已列在书末的主要参考文献中（脱稿后新出版的几本书未包括在内）。此外，也感谢我们的学生，他们在学习过程中的积极建议和所提出的问题也给了我们以启示。我们也预先感谢对于本教材的批评指正和评论。

本教材的前四章由方大纲执笔，后两章由刘次由执笔。前五章介绍基本理论和基本方法，最后一章介绍谐振腔。全书由北京工业学院教授邓次平审阅。邓次平同志非常认真地审阅了书稿并且提出了许多宝贵的意见，我们在此表示深切的谢意。在写作过程中，我们还得到了通信工程学院教授沈铁汉，南京电子技术研究所高级工程师方能航，加拿大滑铁卢大学教授Y. L. Chow和拉瓦尔大学教授G. Y. Delisle，华东工学院教务处长、副教授朱逸农的鼓励和帮助。在此一并致谢。

**编著者**

一九八五年七月于南京华东工学院

# 目 录

<b>第一章 电磁理论基础</b> .....	( 1 )
§ 1.1 电磁场的基本规律.....	( 1 )
§ 1.2 电介质和磁介质的宏观特性.....	( 3 )
§ 1.3 导体的宏观特性.....	( 7 )
§ 1.4 电磁能量和功率.....	( 8 )
§ 1.5 边界条件, 边界面上电磁波的反射与折射以及边界面上的功率守恒.....	( 10 )
§ 1.6 辐射条件和边缘条件.....	( 16 )
§ 1.7 波矩阵技术.....	( 19 )
§ 1.8 等效定理和感应定理、磁流和磁荷.....	( 26 )
§ 1.9 矢量位、标量位和赫兹矢量; 二重性原理.....	( 41 )
§ 1.10 巴俾涅 ( Babinet ) 原理.....	( 46 )
§ 1.11 镜象原理.....	( 51 )
§ 1.12 矢量波动方程与汉森 ( Hansen ) 矢量波函数.....	( 57 )
§ 1.13 洛仑兹 ( Lorentz ) 定理和反应概念.....	( 63 )
§ 1.14 反应积分方程; 矩量法概念.....	( 67 )
§ 1.15 最小储能原理.....	( 71 )
§ 1.16 格林定理.....	( 73 )
习题一.....	( 78 )
<b>第二章 柱形波导的一般理论</b> .....	( 83 )
§ 2.1 柱形波导中电磁场的解法.....	( 83 )
§ 2.2 柱形波导中简正波的正交性和完全性.....	( 90 )
一、简正波的正交性.....	( 90 )
二、简正波的完全性.....	( 99 )
§ 2.3 柱形波导的格林函数.....	( 100 )
§ 2.4 小孔耦合的基本概念.....	( 109 )
§ 2.5 柱形波导中的功率和能量.....	( 112 )
§ 2.6 波导不连续性和复功率守恒技术.....	( 114 )
习题二.....	( 122 )
<b>第三章 格林函数</b> .....	( 124 )
§ 3.1 格林函数的意义.....	( 124 )
§ 3.2 格林函数和等效定理.....	( 127 )
§ 3.3 格林函数的对称性和互易定理.....	( 136 )
§ 3.4 利用格林定理求解格林函数的简正波法.....	( 138 )

一、柱形波导两端终接任意负载时的格林函数	(138)
二、矩形微带谐振腔的格林函数	(140)
三、用格林定理求传输线问题的格林函数	(141)
四、利用格林定理求静场问题的格林函数	(142)
§ 3.5 求解格林函数的谱域导抗 (SDI) 法	(147)
§ 3.6 求解格林函数的谱域反射系数 (SDRC) 法	(153)
§ 3.7 近似格林函数	(158)
附录 用柱面波展开的并矢格林函数	(162)
习题三	(166)
<b>第四章 最优化技术在电磁理论中的几个应用</b>	(169)
§ 4.1 线性代数引论	(169)
一、线性矢量空间	(169)
二、矢量的正交化	(169)
三、本征值问题	(170)
四、二次型和矩阵的对角线化	(170)
五、把两个矩阵同时化为对角矩阵以及广义本征值问题	(173)
六、约束条件下的二次型	(174)
七、雷利 (Rayleigh) 商及其极值性质	(175)
八、柯西-施瓦兹 (Cauchy-Schwarz) 不等式及由此导出的两个重要不等式	(176)
九、函数空间	(178)
§ 4.2 可化为雷利商的极值问题	(180)
§ 4.3 天线阵方向系数的雷利商形式	(180)
§ 4.4 调节激励的优化	(182)
§ 4.5 调节间隔的优化	(187)
§ 4.6 调节相位的优化	(189)
§ 4.7 有约束情况下的优化	(190)
§ 4.8 优化在综合问题中的应用	(191)
一、本征矢法	(191)
二、伽辽金 (Galerkin) 法	(193)
§ 4.9 优化模拟镜象 (OSI) 法	(194)
§ 4.10 优化方法在时域电磁场中的应用	(200)
附录 式 (4.9—12) 的推导	(202)
习题四	(204)
<b>第五章 变分法与微扰法</b>	(205)
§ 5.1 变分法基础	(205)
§ 5.2 变分法与本征值问题	(208)
§ 5.3 变分问题的近似解法	(209)
§ 5.4 电磁场问题中直接建立变分方程的方法	(211)

§ 5.5	谐振腔的变分式	( 216 )
§ 5.6	天线阻抗的变分式	( 221 )
§ 5.7	用变分法求特性阻抗	( 225 )
§ 5.8	用变分法求带线的特性阻抗	( 229 )
§ 5.9	谐振腔外形的微扰	( 236 )
§ 5.10	谐振腔内介质特性的微扰	( 238 )
§ 5.11	波导的微扰	( 242 )
	习题五	( 243 )
<b>第六章</b>	<b>空腔谐振器</b>	( 245 )
§ 6.1	亥姆霍茨 ( Helmholtz ) 定理	( 245 )
§ 6.2	一般谐振腔中场的波型展开	( 247 )
§ 6.3	谐振腔中的自由振荡与阻尼振荡	( 255 )
§ 6.4	谐振腔的输入阻抗 ( 导纳 ) 与等效电路	( 261 )
§ 6.5	混合边界条件的谐振腔中的场	( 265 )
§ 6.6	谐振腔的激励 ( 耦合 )	( 267 )
	习题六	( 275 )
<b>主要参考文献</b>		

# 第一章 电磁理论基础

在传输线、波导和波导元件的分析中，有许多问题都要用电磁理论来解决。例如带状线特性阻抗的求取，波导不连续性的分析，用同轴线激励波导或微带天线输入阻抗的计算等比较复杂的边值问题的分析，都要求更多有关电磁理论的知识。电磁理论所研究的核心问题是在特定的介质中，有源麦克斯韦方程（或简称麦氏方程），满足边界条件的解。因此，除了麦氏方程外，还要求对于电介质、磁介质和导体的特性以及对于边界条件有更深入的了解。此外，为了求解麦氏方程，还要求我们掌握有关的等效定理和辅助手段。在实际中，很多复杂的问题往往难以求得严格解，而只能求近似解，或者使用数值方法，但这些方法仍是以经典的电磁理论为基础的。虽然本书所分析的都是已经解决了的问题，但是可以从对这些问题的分析过程中，掌握处理问题的方法，从而有可能去处理遇到的新问题。因此本书的重点是阐明问题的物理本质和基本的方法，以及各种概念和各种方法之间的内在联系。

本书所采用的单位制是SI制，振荡形式是简谐的，时间相位因子采用 $\exp(j\omega t)$ 。应注意，有些书中时间相位因子采用 $\exp(-j\omega t)$ ，则相应的与相位有关的 $j$ 都要差一个负号。

## §1.1 电磁场的基本规律

在宏观的范畴里，麦氏方程表达了电磁场最基本的规律，因此，研究电磁场理论必须从麦氏方程开始。

积分形式的麦氏方程为

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (\text{法拉第电磁感应定理}) \quad (1.1-1a)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a} \quad (\text{安培全电流定理}) \quad (1.1-1b)$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \rho dv \quad (\text{高斯定理}) \quad (1.1-1c)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (\text{磁通连续定理}) \quad (1.1-1d)$$

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (\text{电荷不灭定理}) \quad (1.1-1e)$$

式中 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 为电场和磁场强度； $\vec{D}$ 为电通量密度（或称电位移）； $\vec{B}$ 为磁通量密度（或称磁感应密度，磁位移等）； $\rho$ 为电荷密度； $\vec{J}$ 为传导电流密度。



另外，还有反映介质特性的三个关系式

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_{ext} \quad (1.1-1f)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.1-1g)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1-1h)$$

式中 $\sigma$ 、 $\mu$ 和 $\epsilon$ 分别为电导率、导磁率和介电系数。对于各向同性介质，这些量都是标量；

$\vec{J}_{ext}$ 为外加传导电流密度，它是由外加电动势（例如电池或其它源的电动势）所产生。

麦氏方程包含了丰富的内容，它是反映电磁场基本规律的几个定理的数学描述，表达了变化的电场与变化的磁场之间的相互联系。麦氏方程加上反映介质特性的三个方程，在满足一定边界条件下求解，就是电磁理论所要研究的问题。

积分形式的麦氏方程可以用来研究介质不连续的情况。例如在两种介质的边界上，可以用积分形式的麦氏方程导出电磁场应遵循的规律，也即边界条件。除了边界以外，其它各处都是连续介质，为了描写连续介质中某一点附近的特性，上述积分形式的麦氏方程组可以化成微分形式。为此，让式(1.1-1a)和(1.1-1b)中封闭回路所包含的开表面的面积缩小成一个微分面积 $\Delta S$ ，然后在方程的两边除以 $\Delta S$ ，并求取 $\Delta S \rightarrow 0$ 时的极限；此外，让式(1.1-1c)和(1.1-1d)中封闭面所包含的体积缩小成一个微分体积 $\Delta V$ ，然后在方程两边除以 $\Delta V$ ，并求取 $\Delta V \rightarrow 0$ 时的极限。于是，根据旋度和散度的定义，在连续介质里，微分形式的麦氏方程可写为

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1-2a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (1.1-2b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1-2c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1-2d)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1-2e)$$

前面已经指出，本书所研究的是简谐振荡即时间函数是 $\exp(j\omega t)$ 。这样做并不失去普遍性，因为对于其它的振荡形式，可以用简谐振荡的傅氏级数来表示，或者可以用简谐振荡的傅氏积分来表示。在简谐振荡情况下，连续介质中的麦氏方程为

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (1.1-3a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (1.1-3b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1-3c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1-3d)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho \quad (1.1-3e)$$

这样表示时，各矢量和标量 $\rho$ 都只是空间的函数。一般来说，这些量都是复量。

共轭麦氏方程写为

$$\nabla \times \vec{E}^* = j\omega\vec{B}^* \quad (1.1-4a)$$

$$\nabla \times \vec{H}^* = \vec{J}^* - j\omega\vec{D}^* \quad (1.1-4b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}^* = \rho^* \quad (1.1-4c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}^* = 0 \quad (1.1-4d)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}^* = j\omega\rho^* \quad (1.1-4e)$$

在线性介质里，电磁场服从线性规律，麦氏方程是线性的，因此可以应用叠加原理。

## §1.2 电介质和磁介质的宏观特性

要了解电介质的特性，就要分析电介质的极化过程。电介质在外加电场作用下，各原子和分子的电子轨道受到扰动产生电矩（也有的物质虽具有永久电偶极化强度，但只有当外施电场后，这些杂乱的电偶极子，才能形成净合成场，产生电矩）。在无限小的体积里，单位体积的电矩称为电极化强度 $\vec{P}$ 。电矩产生的电场使外加场减弱，从而使介质内的合成电场不同于外加电场。为此，引进了电通量密度 $\vec{D}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.2-1)$$

式中 $\epsilon_0$ 为真空中的介电系数，它的数值是 $(1/36\pi) \times 10^{-9} \text{ F/m}$ 。在空气中也可以近似认为是这个数值。引进 $\vec{D}$ 后，可以大大便利于电介质里电场的计算。

在各向同性的电介质里，极化强度 $\vec{P}$ 的方向是与电场强度的方向相同的，所以令

$$\vec{P} = X_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.2-2)$$

$X_e$ 称为电极化率，是无量纲的量。对于各向同性的电介质它是一个标量，此时有

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + X_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.2-3)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + X_e) \quad (1.2-4)$$

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + X_e \quad (1.2-5)$$

式中 $\epsilon$ 为介电系数， $\epsilon_r$ 为相对介电系数。

由式(1.2-1)，电通量密度的散度为

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho$$

也可写为

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho - \nabla \cdot \vec{P}$$

式中  $\rho$  为自由电荷密度;  $-\nabla \cdot \vec{P}$  是电极化的电荷密度, 即极化电荷密度, 记作  $\rho_p$ 。因而有

$$-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_p \quad (1.2-6)$$

由式 (1.2-1) 可知, 位移电流密度  $e\vec{D}/\partial t$  包括两项

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.2-7)$$

式中  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  为真空中的位移电流密度, 它与电荷无关;  $\partial \vec{P} / \partial t$  为极化电流密度, 它可以看作是极化电荷的运动或电矩的运动所产生的电流。这两项合起来仍称为位移电流密度。

在高频电场作用下, 电极化强度  $\vec{P}$  将滞后于外加电场, 这使得电通量密度  $\vec{D}$  滞后于合成电场  $\vec{E}$ , 此时介电系数  $\epsilon$  为复数

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (1.2-8)$$

电通量密度  $\vec{D}$  滞后于电场强度  $\vec{E}$ , 使得在一个周期内  $\vec{D}$  和  $\vec{E}$  构成电滞回线, 造成损耗, 所以  $\epsilon$  的虚数部分  $\epsilon''$  代表损耗。对于一般介质, 在不高的频率下, 损耗很小,  $\epsilon''$  可以略去不计。

对于各向异性的电介质,  $\vec{D}$  和  $\vec{E}$  之间不再可以写成如式 (1.2-3) 那样的简单形式。两个矢量  $\vec{D}$  和  $\vec{E}$  之间, 最广义的线性关系应该是

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \right\} \quad (1.2-9)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (1.2-10)$$

引进并矢后, 可以将式 (1.2-10) 写成更简洁的形式

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (1.2-11)$$

式中  $\vec{\epsilon}$  定义为并矢介电系数 (或称张量介电系数)。其中

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_x &= \epsilon_{xx} \hat{i}_x + \epsilon_{yx} \hat{i}_y + \epsilon_{zx} \hat{i}_z \\ \vec{\epsilon}_y &= \epsilon_{xy} \hat{i}_x + \epsilon_{yy} \hat{i}_y + \epsilon_{zy} \hat{i}_z \\ \vec{\epsilon}_z &= \epsilon_{xz} \hat{i}_x + \epsilon_{yz} \hat{i}_y + \epsilon_{zz} \hat{i}_z \end{aligned}$$

或者, 将  $\vec{\epsilon}$  写为

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_{xx} \hat{i}_x \hat{i}_x + \epsilon_{xy} \hat{i}_x \hat{i}_y + \epsilon_{xz} \hat{i}_x \hat{i}_z$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_{yx} \hat{i}_y \hat{i}_x + \epsilon_{yy} \hat{i}_y \hat{i}_y + \epsilon_{yz} \hat{i}_y \hat{i}_z \\
& + \epsilon_{zx} \hat{i}_x \hat{i}_x + \epsilon_{zy} \hat{i}_y \hat{i}_z + \epsilon_{zz} \hat{i}_z \hat{i}_z
\end{aligned} \tag{1.2-12}$$

可见，式(1.2-12)右边的 $\epsilon_{ij}$ 和式(1.2-10)的矩阵 $(\epsilon)$ 的元素是完全相对应的。

为了与矩阵的乘法运算法则相对应，应该这样来规定 $\vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$ （并矢和矢量的后标积）的运算规则，即当式(1.2-12)中 $\vec{\epsilon}$ 的九项和 $\vec{E}$ 的三项两两相乘时，紧靠标积号两边的单位矢量，按照矢量的标积来运算。例如

$$\vec{\epsilon} \cdot E_x \hat{i}_x = \epsilon_{xx} E_x \hat{i}_x + \epsilon_{yx} E_x \hat{i}_y + \epsilon_{zx} E_x \hat{i}_z$$

按照这样运算法则，并矢 $\vec{\epsilon}$ 和矢量 $\vec{E}$ 后标积的结果是一个矢量，对照式(1.2-10)可知，这个矢量就是 $\vec{D}$ 。因而，式(1.2-10)就可写成如下简洁的形式

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} \tag{1.2-13}$$

类似地，也可以定义并矢与矢量的前标积，其运算规则与矩阵运算类似。一般说，前标积和后标积结果不相同，即不符合交换律。并矢前后矢量的次序也不能颠倒。

对于磁介质， $\vec{H}$ 定义为

$$\vec{H} = (\vec{B}/\mu_0) - \vec{M} \tag{1.2-14}$$

式中 $\vec{M}$ 为单位体积的磁矩，称为磁化强度； $\mu_0$ 为真空中的导磁系数，其数值为 $4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。空气中也取此值。对于各向同性磁介质，磁化强度 $\vec{M}$ 正比于 $\vec{H}$ ，它们之间的关系可以写成

$$\vec{M} = \kappa \vec{H} \tag{1.2-15}$$

式中 $\kappa$ 称为磁化率，它是无量纲的量。式(1.2-15)规定了 $\vec{M}$ 和 $\vec{H}$ 成正比，而不是和 $\vec{B}$ 成正比，因而和电介质的情况不能完全相对应，这是由于历史的原因。当 $\kappa$ 为标量时，得到

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \kappa \vec{H}) \tag{1.2-16}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \kappa) \tag{1.2-17}$$

$$\mu_r = \mu / \mu_0 = 1 + \kappa \tag{1.2-18}$$

式中 $\mu_r$ 称为相对导磁率。

由式(1.2-14)， $\vec{B}$ 的散度可写为

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\
&= \mu_0 \nabla \cdot \vec{H} + \mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0
\end{aligned}$$

或者

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = 0 + (-\nabla \cdot \vec{M})$$

上式右边第一项可设想为自由磁荷密度，在自然界中自由磁荷是不存在的，所以代表自由磁荷密度的第一项为零。上式中第二项 $(-\nabla \cdot \vec{M})$ 可以设想为由介质磁化引起的磁化磁荷密度 $\rho_m$ ，即

$$-\nabla \cdot \vec{M} = \rho_m \quad (1.2-19)$$

实际上，磁化磁荷也只是与电介质类比而设想的人为的定义。

由式(1.2-14)可知，位移磁流密度 $\partial \vec{B} / \partial t$ 将包括两项，它们是

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \quad (1.2-20)$$

式中 $\mu_0 \partial \vec{H} / \partial t$ 为真空中的位移磁流密度； $\mu_0 \partial \vec{M} / \partial t$ 代表磁矩运动所产生的磁流密度，它可以设想为磁化磁荷的贡献。

与电介质情况相同，在高频磁场作用下，由于惰性，磁化强度 $\vec{M}$ 将滞后于外加磁场，这就使磁通量密度 $\vec{B}$ 滞后于合成磁场强度 $\vec{H}$ 。于是导磁率 $\mu$ 为复数

$$\mu = \mu' - j\mu'' \quad (1.2-21)$$

由于 $\vec{B}$ 后于 $\vec{H}$ ，使 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 在一个周期内构成磁滞回线，造成损耗，所以导磁率的虚数部分 $\mu''$ 代表损耗。对于大多数磁介质，虚数部分是很小的，可以略去不计。

在各向异性的磁介质里，导磁率不再是个标量。 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 的最广义的线性关系同样可以用并矢表示。与式(1.2-13)类似，可以写出

$$\vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{H} \quad (1.2-22)$$

在介质中，麦氏方程要写为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= \rho_m \end{aligned} \right\} \quad (1.2-23)$$

式中 $\rho_p^j = -\nabla \cdot \vec{p}$ ， $\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}$ 。

或者，也可以不去管介质极化和磁化的物理过程，而利用 $\epsilon$ 和 $\mu$ 将麦氏方程写为和真空中相同的简洁形式

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{或 } \nabla \cdot \vec{D} = \rho) \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \quad (\text{或 } \nabla \cdot \vec{B} = 0) \end{aligned} \right\} \quad (1.2-24)$$

初看起来, 式(1.2-24)中最后两个方程与方程式(1.2-23)中的最后两个方程似乎有矛盾。例如当 $\rho = 0$ 时, 按照式(1.2-24)应有 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 。但是, 按照式(1.2-23)却有 $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_p / \epsilon_0$ 。事实上, 仔细考察一下就可以知道, 对于均匀介质, 作散度运算时,  $\epsilon$ 可以看成是常数, 因而有 $\rho = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = (\epsilon_0 / \epsilon) \nabla \cdot \vec{D} + \nabla \cdot \vec{P}$ 由此可得 $\rho_p = \rho (\epsilon_0 - \epsilon) / \epsilon$ 。所以当 $\rho = 0$ 时 $\rho_p$ 也必为零。类似的论证表明, 在均匀介质中应该有 $\rho_m = 0$ 。因此, 式(1.2-24)和(1.2-23)是一致的。当处理两个不同介质界面时, 极化电荷或磁化磁荷的影响就要考虑在内。在下面考察两种不同介质分界面上的边界条件时, 就会看到即使分界面上没有自由电荷, 在介质两边, 电场的通量也不会相等, 而电场的散度正是极化电荷的贡献。

### §1.3 导体的宏观特性

一般导体导磁率的数值都接近于真空中的数值, 即 $\mu = \mu_0$ 。为了分析方便, 导体的电导率可以包括介电系数, 而成为等效介电系数的虚数部分。如果没有外加电源, 即 $\vec{J}_{ext} = 0$ , 则由式(1.1-1f)和(1.1-3b)可得

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} = j\omega \epsilon \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon}\right) \vec{E} = j\omega \epsilon_{eq} \vec{E} \quad (1.3-1)$$

式中 $\epsilon_{eq}$ 为等效介电系数, 由式(1.3-1)有

$$\epsilon_{eq} = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) = \epsilon (1 - j \text{tg} \delta)$$

式中 $\delta$ 称为损耗角, 它代表损耗的大小;  $\epsilon \text{tg} \delta$ 为等效介电系数 $\epsilon_{eq}$ 的虚数部分。如果介电系数本身也有虚数部分 $\epsilon''$ , 则两个虚数应该相加, 从而得出总的虚数部分和总的损耗角。

在导体里如果存在自由电荷就会产生电场并形成电流, 这些电荷将会往表面跑, 体积内部的电荷就会迅速减少。解以下联立方程

$$\left. \begin{aligned} \vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot \epsilon \vec{E} &= \rho \end{aligned} \right\}$$

就可得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$

所以有

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

式中 $\rho_0$ 为 $t=0$ 时的电荷密度;  $\tau = \sigma / \epsilon$ , 对于金属材料 $\tau$ 为 $10^{-19}$ s数量级。可见, 电导愈大电荷减少得愈快。对于一般良导体, 导体内部的自由电荷很快就会消失, 这就说明在导体内部 $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ 。此外, 如果 $\epsilon$ 和 $\sigma$ 是常数, 即与位置无关, 则有 $\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$ 以及 $\nabla \cdot \vec{J} =$

$\nabla \cdot \sigma \vec{E} = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = 0$ , 也就是说,  $\vec{E}$  和  $\vec{J}$  的散度也都是零。

## §1.4 电磁能量和功率

能量守恒是一个普遍规律, 电磁场也是一种物质, 它具有能量, 也必然遵守能量守恒定律。能量或功率都正比于场量的乘积, 在应用复量法时, 不可将场量直接相乘, 而是要将其

中之一取共轭再乘。设有任意两个交变的瞬时量  $\vec{A}$  和  $\vec{B}$

$$\vec{A} = \text{Re}\{A e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{A_m e^{j\varphi_A} e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{B} = \text{Re}\{B e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{B_m e^{j\varphi_B} e^{j\omega t}\}$$

今后, 为了简便, 不对实数量和复数量在表示上加以区别, 读者可以从表达式本身区分出来。例如  $A = A_m e^{j\varphi_A}$ , 就可知道  $A$  为复数量,  $A_m$  为实数量。可以证明

$$\frac{1}{2} \text{Re}(AB^*) = \frac{1}{2} A_m B_m \cos(\varphi_A - \varphi_B) = \vec{A} \vec{B} \quad (1.4-1)$$

$$\frac{1}{2} \text{Im}(AB^*) = \frac{1}{2} A_m B_m \sin(\varphi_A - \varphi_B) \quad (1.4-2)$$

式中  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  分别表示取实部和取虚部, 上面加横线表示取时间的平均值, \* 表示取共轭。

如果将  $\vec{A}$  和  $\vec{B}$  分别看作电流和电压, 对照电路理论可知, 式 (1.4-1) 代表的是随时间平均的功率即有功功率, 式 (1.4-2) 则代表无功功率。

对于简谐振荡, 引进共轭相乘后, 也可以定义复量的坡印廷 (Poynting) 矢量  $\vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (1.4-3)$$

$\vec{S}$  的实数部分可解释为流出每单位表面的时间平均的实功率, 它的虚数部分可以解释为流出每单位表面的时间平均的虚功率。作这种解释虽然不是十分严格, 多少带有一些假设的色彩, 但是在处理各种实际的问题时, 至今还没有遇到过任何问题<sup>(1)</sup>。

按照式 (1.4-1), 时间平均的磁能密度  $\omega_h$  和电能密度  $\omega_e$  表示为

$$\omega_h = \frac{1}{4} \text{Re}(\vec{B} \cdot \vec{H}^*) = \frac{1}{4} \text{Re}(\vec{B}^* \cdot \vec{H}) \quad (1.4-4)$$

$$\omega_e = \frac{1}{4} \text{Re}(\vec{D} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{4} \text{Re}(\vec{D}^* \cdot \vec{E}) \quad (1.4-5)$$

如果  $\epsilon$  和  $\mu$  都是实数, 则

$$\omega_h = \frac{1}{4} \mu |\vec{H}|^2 \quad (1.4-6)$$

$$\omega_e = \frac{1}{4} \epsilon |\vec{E}|^2 \quad (1.4-7)$$

(1) 为专题参考文献号码, 以下同。

式中所有场量 $\vec{D}$ 等都代表复数场矢量的峰值。

能量守恒关系可以从麦氏方程出发导出，先把复量坡印廷矢量取散度，并应用矢量代数的关系式得到

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \Delta \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \nabla^* \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}^*) \quad (1.4-8)$$

考虑包含外电源 $\vec{J}_{ex}$ 的区域，此时，麦氏方程可写为

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H}^* = -j\omega \vec{D}^* + \sigma \vec{E} + \vec{J}_{ex}^*$$

将上面的式子代入式(1.4-8)，得

$$-\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} j\omega (\vec{H}^* \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{D}^*) + \frac{1}{2} \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}_{ex}^*$$

设 $\epsilon$ 和 $\mu$ 为实数，则由式(1.4-6)和(1.4-7)得到

$$-\nabla \cdot \vec{S} = p_r + p + j2\omega(\omega_h - \omega_e) \quad (1.4-9)$$

式中 $p_r = \sigma |\vec{E}|^2 / 2$ ； $p = \vec{E} \cdot \vec{J}_{ex}^* / 2$ 。

对于一个由闭合面 $S$ 所包围的体积 $V$ ，式(1.4-9)的两边要作积分，在等式左边再利用高斯定理，将体积分变成面积分，就可得到对于一个区域的能量守恒或功率平衡的关系式

$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} = P_r + P + j2\omega(W_h - W_e) \quad (1.4-10)$$

式中 $P_r$ 、 $P$ 、 $W_h$ 和 $W_e$ 分别表示 $P_r$ 、 $P$ 、 $\omega_h$ 和 $\omega_e$ 的体积分。 $d\vec{a}$ 的方向指向体积 $V$ 的外部。

式(1.4-10)也可改写为

$$-P = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} + P_r + j2\omega(W_h - W_e) \quad (1.4-11)$$

式(1.4-11)的实数部分代表时间平均的功率值，虚数部分同能量的时间平均值有关，并称为无功功率，以便和电路理论中的命名法一致。

当 $\epsilon$ 和 $\mu$ 都是复数时，式(1.4-11)右边第三项包含有实数部分，它们分别对应于电滞损耗和磁滞损耗。

式(1.4-11)是一个很有用的关系。这里仅举一个求天线输入阻抗的例子，来说明它的应用。阻抗的概念虽然是在电路理论中引入的，但是计算天线的输入阻抗是一个磁场问题。这里功率可以作为沟通场和路的桥梁。因而在计算中就可使用式(1.4-11)。

图1-1所示为一圆柱天线，圆柱面为 $S_0$ ，上下底面分别为 $S_t$ 和 $S_b$ 。在距离天线很远的地方作一个面 $S_\infty$ ，则封闭面 $S_0 + S_t + S_b + S_\infty$ 围成了一个体积 $V$ 。假设体积 $V$ 内无源，并且假定天线很细，因此， $S_t$ 和 $S_b$ 上的面积分可以近似地略去不计，则由式(1.4-11)可得

$$\iint_{S_0 + S_\infty} \vec{S} \cdot d\vec{a} + P_r + j2\omega(W_h - W_e) = 0$$

或者写为



$$\iint_{S_0} \vec{S} \cdot \hat{n} da = \iint_{S_\infty} \vec{S} \cdot \hat{n} da + P_r + j2\omega(W_h - W_e)$$

式中  $\hat{n}$  是单位法线矢量其方向如图1-1所示。将式(1.4-3)代入上式得

$$\frac{1}{2} \iint_{S_0} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{n} da = \frac{1}{2} \iint_{S_\infty} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{n} da + P_r + j2\omega(W_h - W_e) \quad (1.4-12)$$

在天线理论中可以证明,当观察点和天线之间的距离和波长的比值足够大,也就是说,当远区场的条件得到满足时,  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  的相位相同,因而等式右边第一项实数,这一项代表了天线的辐射功率。式(1.4-12)的物理意义是:流出天线表面  $S_0$  的实功率变成了天线的辐射功率,  $V$  中介质的电阻损耗功率以及介质的磁滞和电滞损耗;流出天线表面  $S_0$  的虚功率,则与天线周围的储能有关。天线导体表面的电阻损耗通常很小,在上面的计算中未考虑在内。式(1.4-12)的左边实际上就是电源输入的复功率。假设天线馈电端的电流幅值为  $|I|$ , 馈电端的输入阻抗为  $Z_{in}$ , 则由电路理论可知,电源输入的复功率为  $Z_{in}|I|^2/2$ , 于是得

$$\text{到关系式} \quad \frac{1}{2} Z_{in} |I|^2 = \frac{1}{2} \iint_{S_0} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{n} da$$

或者写为

$$Z_{in} = \frac{\iint_{S_0} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{n} da}{|I|^2} \quad (1.4-13)$$

将式(1.4-12)代入,并且把式(1.4-12)右边的所有实部都归并在一起记作  $P_r$ , 就得到

$$Z_{in} = \frac{2P_r}{|I|^2} + j \frac{4\omega(W_h - W_e)}{|I|^2} \quad (1.4-14)$$

式(1.4-13)提供了通过场量计算天线输入阻抗的公式,式(1.4-14)表明了天线输入阻抗的实部来源于辐射功率和损耗功率,虚部则与天线周围的储能有关。

## §1.5 边界条件,边界面上电磁波的反射

### 与折射以及边界面上功率守恒

在所研究的区域里,如果有两种或两种以上的介质相邻,或者存在源层(例如电流层),这时就要研究界面两侧电磁场的相互关系,也就是边界上电磁场应服从的规律,这就是边界条件。

两种介质相邻,在那里发生了介质参量的突变,直接求解这类问题是很困难的,为了简

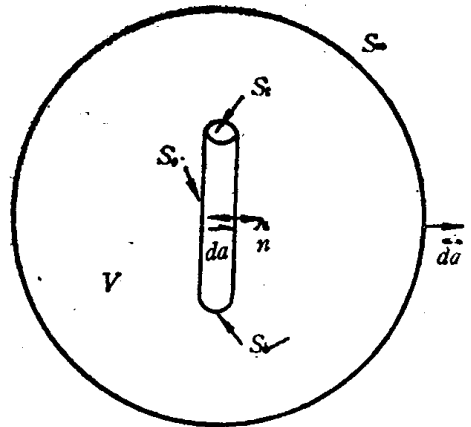


图1-1 求圆柱天线输入阻抗时所用的封闭面