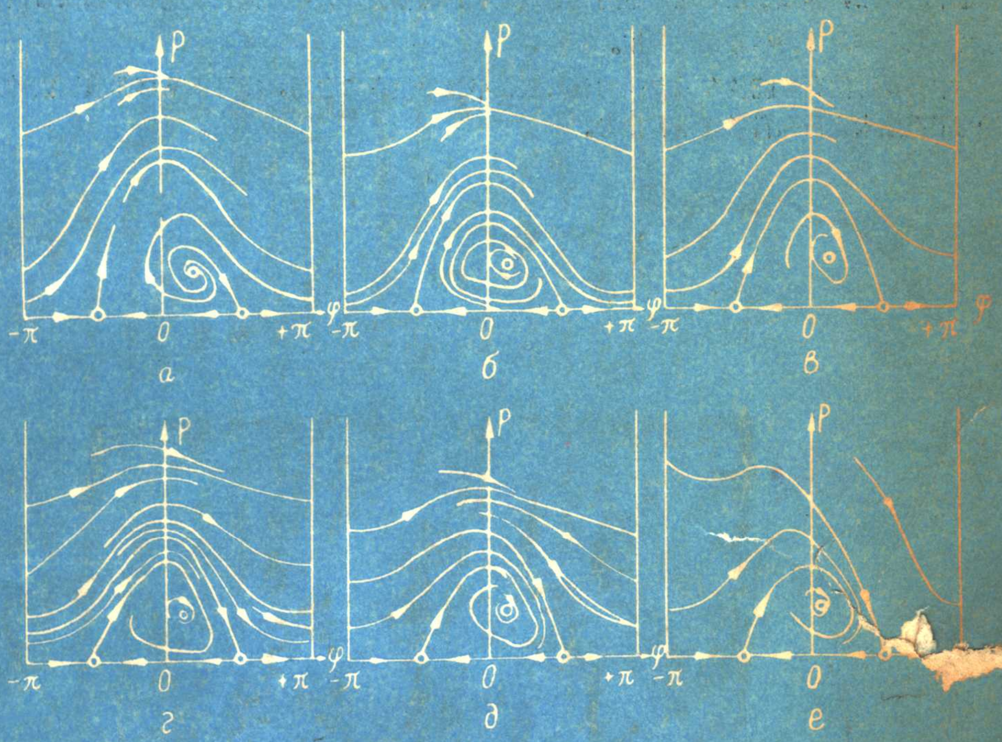
非线性振动论文集



中国科学技术情报研究所重庆分所

非綫性振动論文集

編 輯 者 中国科学技术情报研究所重庆分所
出 版 者 中国科学技术情报研究所重庆分所
重庆市市中区胜利路91号
印 刷 者 重 庆 新 华 印 刷 厂
发 行 处 四 川 省 新 华 书 店 重 庆 发 行 所
訂 購 处 全 国 各 大，中 城 市 新 华 书 店

1964年9月30日出版 定价：0.60元

內 容 簡 介

本文集收集了有关非綫性振动方面的論文五篇。內容为：非綫性振动理論的基本方向及其发展，非綫性力学中的积分流形法，二阶动力系統分支理論及其在振动理論的非綫性問題研究中的应用，非綫性振动理論中的点映象法和1951年至1961年期間意大利在非綫性常微分方程理論和非綫性力学方面的著作。

本文集可供高等院校有关专业的教师和高年級学生参考之用，亦可供从事非綫性振动方面的工程技术人員和科学工作者参考。

編者的話

非綫性振动理論是一般力学、自动控制和无綫电物理等的理論基础之一。随着科学和技术的发展，振动理論的作用愈来愈显著。因此，它不像过去仅限于自然現象，而且广泛地存在于生物界和其它現象中。

有鉴于此，为了配合武汉召开的一般力学会議和向科学工作者提供必需的資料，我們編輯了这本論文集。这本論文集涉及到非綫性振动理論的发展方向和对研究非綫性振动的两种方法——定性方法和定量方法。对我国学术界有一定的参考价值。

本文集在翻譯过程中得到浙江大学蔡承文、費学博、洪嘉智和成都电訊工程学院朱宗麟等同志的大力支持，在此特致以誠摯的謝意。

由于时間追促，在选题、翻譯和編輯方面都存在不少缺点，欢迎讀者提出批評和意見。

編　者　識　1964年9月23日

目　　录

非綫性振动理論的基本方向及其发展*

Ю. А. Митропольский著

可以毫不夸张地說，振动，就其广义来看，在自然現象发生的过程中，以及在技术里利用的过程中，占有突出的地位，并有时居于首要的地位。因此，振动过程的研究对力学、物理学和技术的极不相同的各个部門有着基础的意义。

結构和机器的振动，无綫电工学和光学中的电磁振蕩，声和超声的振动，原子核中的振动現象，天体的周期和概周期运动，生物学中的振动現象——所有这些，虽則看来是各不相同和互不相似的振动过程，都在同一門关于振动的普遍理論中用数学物理方法，用解释这些現象的数学方法統一起来。

現代振动理論明显起源于伽利略、惠更斯、牛頓时代的經典力学——摆的运动問題。在拉格朗日的著作中已有了完整的微振动理論，它的繼續发展形成了綫性振动理論，即用齐次或带有已知时間函数的自由項的常系数綫性微分方程所描述的振动的理論。

在許多科学家的著作中，綫性微分方程是强有力的研究工具。常系数綫性微分方程理論的基本原理的簡明性，决定了对綫性振动理論研究的深透性，决定了它的規律陈述的一般性及其物理明显性。这个理論的一些基本概念，如固有頻率、阻尼减縮率、共振、簡正振子等，具有最广泛的通俗性，并且几乎成为物理和技术所有部門中不可缺少的研究工具。

綫性振动系統中迭加原理的应用，导致了符号法的发展，而在解常系数綫性微分方程时譜波函数所起的特殊作用，促进了对振动过程的頻譜处理方法的拟定和扩展，这种处理方法在振动理論自身之外也有着巨大的意义。

由于綫性振动理論被研究得十分詳尽，而它所用的数学工具又几乎是自动式的，研究者在多数場合下总想把所研究的振动过程归入綫性方案，因而，有时无根据地捨去非綫性項。这越发促进了广泛推行对振动过程的綫性处理方法，而在研究者那里形成了独特的“綫性的”心理作用。由于这种心理作用，在研究本質上是非綫性的問題时，就完全忽略了綫性解释是十分粗略的理想化，它不仅会引起定量上的重大誤差而且也能导致基本定性特性的重大錯誤。

众所周知，力学方程，一般說来，化成为非綫性的微分方程，而可以大胆地說，在物理学、力学和天文学中所碰到的振动过程，只有在第一次近似下才可能(但不总是可能)用常系数綫性微分方程来描述，这些振动过程实質上是非綫性的。

在振动理論发展的第一阶段，只有所观察的現象无論如何也不能用綫性解释来闡明的个别情况下，才不采用綫性化，而研究了像奥斯特罗格拉德斯基、亥姆霍兹和瑞利所研究的非綫性振动。

同时应强調指出，就在上世紀已出現与欧拉、拉格朗日、泊松、提塞朗、林德施特、邦加莱等人的名字分不开的数字工具(如像摄动法，按小参数幕展成級数的方法等)，这数字工具在适当的发展和推广后，在任何情况下可用来研究某些类型非綫性振动。

在此应特别指出，除了天文学家所拟定的并广泛使用的，但在数学方面不够严格的摄动論工具外，还拟定了与保守系統无特殊联系的数学工具——H.邦加莱关于周期解的局部理論和A.M.李雅普諾夫关于具有周期系数的綫性微分方程理論。

这些方法在数学上是严格的且适用于研究在任何情况下接近于綫性的非綫性振动，但在三十年代初以前，尚未把这些方法系統地应用到振动过程的研究中去，甚至也未揭示出这些方法与非綫性振动問題深刻的內在联

*《Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961. Т. I》, Киев, АН УССР, 1963, 15—22. Основные направлений в теории нелинейных колебаний и их развитие.

系。

从1929年开始，以Л.И.曼杰利什塔姆，Н.Д.帕帕列克西，А.А.安德罗諾夫，А.А.維特为首的苏联物理学学派首次成功地把李雅普諾夫—邦加莱精确的方法应用来系統研究非綫性振动并充分地揭示出此方法在非綫性振动領域內的基本意义。

这里应指出，只是从二十年代起，由于电子管的出現，无綫电技术得到迅速发展以后，非綫性振动本身才具有特别的迫切性和引起巨大的兴趣。

在振动理論的发展中，特别是在对非綫性振动的理論解释中，无綫电无疑地起了主要的作用，而在某种意义下还起了决定性的作用。

象非衰减振动稳定激发，頻率的变換，稳定化，强制同步，調制和解調等这些无綫电技术問題，只有在振动系統中引入非綫性元件后才可能解决。因为在純綫性振动系統中，不会存在与初始条件无关的定常振动状态；在某个頻率为ν的外譜波力作用下，激发的强迫振动仍然只具有相同的頻率ν等。而对于建造相应的非綫性元件，电子管就成为异常灵活和方便的工具。

仅在出现了与上述类型問題有关的大量研究之后，才在物理上明确了非綫性振动力学与綫性振动力学間的那种深远的和原则上的差别，这些差别甚至在研究弱非綫性振动系統时也完全保留着，描述弱非綫性振动的微分方程与常系数綫性微分方程只差极小的項。因为在比系統的"固有周期"大得多的时間間隔中，振动的性态是重要的，所以就連这些小项的作用也不可忽視。

鉴于以上所述，有关非綫性振动理論的該領域，作为一門单独的学科——非綫性振动力学，或像現时通常称它为非綫性力学来研究是合适的。

在非綫性力学独創方法的拟定方面，著名的荷兰物理学家范·德·波耳是先驅者之一，他提出了"慢变"系数的独特方法，它类似于拉格朗日早巳在天体力学中应用过的一种方法。范·德·波耳本人首先运用这种方法，曾分析出許多非綫性振动理論的重要問題——振动的建立过程，定常状态，振动的滞后。但在范·德·波耳的該叙述中，"慢变"系数法无数学論証，同时也沒說明該法的适用条件。

А.А.安德罗諾夫和А.А.維特克服了这些困难，他們运用李雅普諾夫—邦加莱方法論証了范·德·波耳所获得的結果，并解决了一系列新的問題。

范·德·波耳方法的数学論証及其适用范围的这些重要問題，巳由Л.И.曼杰利什塔姆和Н.Д.帕帕列克西給出了解答。由Л.И.曼杰利什塔姆的同事和学生(Н.Д.帕帕列克西、А.А.安德罗諾夫、А.А.維特、С.Э.哈伊金、В.В.米古林、И.別尔恩施坦、Г.С.戈列里克、С.М.雷托夫、Н.Н.鮑京、А.Г.迈尔、Л.С.庞特里亚金、К.Ф.狄奥多契克、Ю.Б.柯布扎列夫等人)所組成的莫斯科和高尔基物理学学派，在这些方法的基础上，給非綫性振动理論的发展予以重大的貢献，揭示出如像第二类共振現象，自参量共振和分数(分頻)共振，組合共振这一系列新現象，解决了关于在同步情况时振幅界限的存在問題以及其他諸問題。

可是，应該覚察到，范·德·波耳方法，以及李雅普諾夫—邦加莱方法在它們最初的叙述中，在所需之計算方案的簡单方面是不能滿足实际要求的。所有这些方法，在深刻揭示現象的定性方面是有効的，但在应用这些方法来构成計算方案时，它們却显得过份复杂。因此，为了工程实际的目的，自然发展了更簡单型式的方法，例如具有本身的物理直观性及誘导性之特色的拟綫性法(А.И.別尔格、Ю.Б.柯布扎列夫)和能量法(К.Ф.狄奥多契克)。

由1932年开始，Н.М.克雷洛夫和Н.Н.鮑戈柳鮑夫在基輔开始探討处理非綫性振动的新的途径，此途径是以作漸近展开式为基础并在思想上是对由天文学者在非保守系統情况下所建立的漸近方法的进一步发展。

在克服原则性的困难后，Н.М.克雷洛夫和Н.Н.鮑戈柳鮑夫把摄动理論方法推广到一般的非保守系統中去，并且建立了适用于研究通常是非保守的非綫性振动系統的新的漸近方法。

在拟定漸近方法时，其作者能成功地在两个方向上，即在建立作近似解的形式方法的方向和在对含有小参数的微分方程解性質的理論、定性研究的方向上得到进展。

所拟定的漸近展开式的形式，不仅能得到一次近似的解(如象范·德·波耳方法)，而且可得高次近似的解；能近似地研究周期的、以及拟周期的振动过程；除此之外，在計算方案的簡明性方面也适合实际的要求。

漸近法的概念是非常普遍和灵活的。它适用于极不相同的具有"小参数"的系統，以及具有"大参数"的系統情况，其中包括具有无限自由度的系統。

在拟定这些方法时，側重于作簡单而有效的方法，以使得能根据基本的設想，組成近似公式。在这里所得的結果中应当指出，例如十分有效的等价綫性化原理，符号法等。这些方法可大大地簡化許多非綫性問題的研究。

例如，象等价綫性化的原理就避免了建立精确运动方程而給出建立表征振幅和相位变化規律的方程的可能性。符号法在研究仅有一个非綫性項的多自由度系統的单頻振动时和在分析各种耦合迴路系統，曲軸的振动等情况时显得十分有效。

漸近法亦曾立即由其作者們运用来解决一系列現实的問題。例如，他們获得了确定电子振蕩器平稳振蕩頻率的二次近似公式，从而使得能够确定泛音对頻率稳定性的影响；研究了多自由度系統中分頻共振和內部共振等。由于为消除机械制造中的共振，而使用非綫性元件的問題，从而对共振理論予以极大的重視。用漸近方法，已解决了像飞机縱向稳定性，电机并列运轉的稳定性等問題。

以前曾应用漸近法解决了一系列現实的問題。例如，在杆件、渦輪叶片等振动时內摩擦影响的研究（Г.С.比薩連柯）；非綫性联軸器对曲柄軸扭振的影响（В.Я.納坦佐）；张弛振动和弱非綫性振动的相互影响（В.О.科諾年柯）；自振过程和調节系統的稳定性問題（А.И.魯里叶）；高阶調节系統中的自振（Е.П.波波夫）；无綫电技术和电工学和許多問題；加速器的計算；以及迴轉仪系統等。

最近十年来，克雷洛夫—鮑戈柳鮑夫的漸近法相应于当非綫性系統的頻率和其他参量变化时所产生的不平稳現象的研究而得以成功地推广。

这里，Ю.А.米特罗波利斯基及其学生拟定并在数学上严格論証了极其有效的研究方法，它可以用于种类极其广泛的振动过程。

应用上述的方法成功地解决了一系列新的問題，并闡明了一些有趣的物理現象，例如在非綫性振动系統中共振的通过；迴轉仪系統、加速器中的不平稳过程；曲軸、离心机、渦輪轉子等通过临界值的情形。

与所提过的一些方法的同时，在苏联各地不断发展了而且应用极不相同的方法解决一些实际問題。

例如，在莫斯科和高尔基等地（В.В.涅梅茨基，Н.Н.鮑京等）有成效地継續发展着研究振动系統的拓扑方法。用这些方法成功地发現并闡明許多有趣的現象，这些現象是在非綫性电工和无綫电系統，以及自振系統等方面观察到的。

邦加来方法在И.Г.馬尔金的著作中已得到进一步的发展和推广。Б.В.布尔加科夫提出的方法是实际計算的方便方法。

Л.С.庞特里亚金、А.Н.吉洪諾夫、Е.Ф.米申科、В.М.伏洛索夫得到了与张弛型非綫性振动过程及与具有慢变参量的振动有直接关系的一系列有趣的結果。在研究非綫性力学系統方面在列宁格勒А.И.魯里叶和А.И.捷克馬列夫也曾获得了一些有趣的結果。

近来，由于調节理論的問題，非綫性振动理論得到了显著的发展，在此应当指出А.И.魯里叶、М.А.艾捷尔曼及Ф.Р.甘特馬赫所获得的成果。

在研究具有周期系数（此系数在研究非綫性振动过程中起着相当大的作用）的綫性系統的領域中，应該注意到М.Г.克萊恩（在敖德薩）及И.З.斯托卡罗（在基輔）所得到的一系列重大成果。

我完全沒有涉及到稳定性理論領域的全部工作及其各个不同方向，在某些程度上稳定性理論和振动理論联系在一起，但又有独特的意义。有关調节理論的許多方法也同样未能提到，調节理論对微分方程理論及非綫性振动理論所采用的拓扑方法提出了大量問題。

在一篇报告內完全不可能稍微詳細地講到非綫性振动理論的全部发展阶段。

因而，我簡短介紹近来发展的主要方向及学派，完全不妄想充分包括所有的研究，十分明显，一个报告人在一篇报告里不可能做到这一点。

在美国自1943年以来，許多学者开始异常关心非綫性力学理論問題的发展，这些学者集中于S.利普希茨教授的周围，开始在普林斯頓(Princeton)，而近五年来移到博耳提莫尔(Baltimore)。

以S.利普希茨教授为首的数学家团体（S.迪利貝多、J.拉薩勒、L.塞薩里、J.哈尔、L.馬尔庫斯、A.安托西維茨、R.巴斯等）在发展許多复杂的非綫性微分方程理論問題、非綫性振动系統的定性性态、調节系統和稳定性問題上，作了重大貢献。

在发展与复杂振动过程有关的特殊型式微分方程方面，N.列文松、R.貝尔曼及W.华索夫作出了重大貢献。

在与机械振动和調节問題有关的应用方向的发展上，J.登-哈托格、J.斯托克、S.克伦达尔等的著作起了重大作用。

在研究振动回路的領域內，非綫性力学基础专著的作者N.米諾尔斯基曾获得了一些有意义的結果。他拟定了研究接近于綫性的非綫性振动系統的独創方法，即所謂的“頻閃法”*。

近年来，在非綫性振动理論的发展方面，西德的学者們作出了重大的貢献。H.考德勒及其学生們独特的著作是弹性体靜力学与机械振动理論的非綫性問題在普遍的数学基础上的統一。K.馬格姆斯的論著是致力于系統研究在自动調节理論中应用的克雷洛夫—鮑戈柳鮑夫方法。K.克洛托的許多著作闡述了适合于机械振动系統研究的非綫性振动理論方法的拟定。

在波兰，年青的科学工作者們，在S.泽姆巴領导下从事于現实的而艰巨的問題——具有强非綫性的非綫性振动系統的研究。

近十年来在意大利，获得了許多有关非綫性振动理論問題和非綫性常微分方程的极其有意义的結果。这里許多学者(G.薩桑、D.格拉菲、R.康梯、L.卡普利奧利、G.柯諾姆波等)解决了一系列問題：关于自治系統的定性研究(极限环的存在及其稳定性)，有关拟定近似研究方法，以及非自治系統(解的有界性，周期解和概周期解的存在性；次諧波解的存在性，同步現象和分頻現象等)。

在日本，多年来由林 千尋(C.Hayashi)、占部 実(M.Urabe)、吉沢太郎(T.Yoshizawa)、前沢成一郎(S.Maezawa)等进行了非綫性振动的研究。这些研究包括非綫性振动理論的极不相同的各部分，包括計算和实驗的材料，以及由非綫性所引起的各种新現象的分析。

在英国，由于M.卡特賴特、J.利托伍德、A.朱利刘的工作，以拓扑法为基础对許多类型非綫性微分方程进行了深入的研究，并获得了很多表征解的特性的各种不同結果。

在法国，許多学者(J.哈格、L.高特、T.福格耳、A.布拉奎雷、R.卡勒特等)在非綫性振动理論的拓扑方法的发展和涉及計时表問題的自振系統性态的研究以及在揭示非綫性振动系統許多特殊現象方面作出了重大的貢献。

我簡短地提一下理論的方法和非綫性振动理論的应用領域在現代发展中的若干基本方向。

目前，在理論方法中，广义的“小参数”法(邦加萊-李雅普諾夫方法、克雷洛夫-鮑戈柳鮑夫法)已得到非常广泛的推广。特别是在近十年来，克雷洛夫-鮑戈柳鮑夫漸近法被广泛应用到物理和技术的极不相同的領域中去。現时，此法正繼續发展着，适用于在机械制造、調节理論、电工学和无綫电工学、軌道計算和加速器計算、水力学和气体力学、声学、原子核结构等中所遇到的新型問題。

近来，在繼續发展积分流形法和把它应用到振动系統的研究方面已得到許多有意义的結果。

为了研究张弛振动过程，除了“間断的”解释外，近来，A.A.多諾德尼增、Л.С.庞特里亚金、A.H.吉洪諾夫的方法正在有效地发展着。

在研究非綫性振动系統的性态时，拓扑方法占据着重要的地位。其来源来自A.邦加萊及I.本迪克松卓越的著作的这些方法，在苏联(B.B.涅梅茨基、E.A.安德罗諾娃-列昂托維奇、Ю.И.涅依馬克)，美国(S.利普希茨)，法国(T.福格耳、L.高特)，英国(M.卡特賴特、A.朱利刘)以及其他国家內得到有成效地发展，并被用来分析具体的振动系統。

对于不能有效利用古典方法的复杂非綫性振动系統的研究来說，繼續发展动力程序和統計分析方法具有重大的意义。

由于計算技术的重大发展，为了用机器計算，非綫性問題的算法化問題是迫切的任务。

对于在物理、技术和其他自然科学极不相同的領域內，研究非綫性振动現象愈来愈显得必要。

除了上述的許多領域外，在計算杆件和壳体时，以及在塑性和蠕变的动力問題中，都出現着研究非綫性振动过程的必要性。在研究由于新构造塑料的流变問題时，我們同样遇到非綫性振动过程。

非綫性振动理論在現时是这样广闊的，以致不可能在一次会議上，尤其不能在一次討論会上把当前所有的方向包括无遗。

这次討論会上同样不能提出在許多国家发展的全部方向和学派。

---

*此法是N.米諾尔斯基与M.夏弗合作完成的——譯者注

在会上，苏联、英国、美国、日本代表們广泛地提出了非綫性振动理論的解析方法；法国、苏联、意大利、美国、波兰代表們提出了定性方法；在美国、苏联、罗馬尼亚代表們的报告中，提出了关于研究有滞后系統的理論問題。苏联、美国、塞內戈尔代表們的报告闡述了关于具有周期系数的綫性系統的研究。

相当数量的报告是关于非綫性振动理論在物理和技术問題中的应用。

苏联、美国代表們的一系列报告中，广泛地提出了联系于調节和自动控制过程，人造卫星动力学，以及迴轉仪过程的非綫性振动过程的研究。

苏联、法国、日本、美国、捷克斯洛伐克代表們的报告闡述了非綫性振动的机械系統中的复杂現象。

所提出的这些报告，反映出非綫性振动理論及其应用的現况，毫无疑問，这次会議对这个非常重要的科学領域的发展作出了巨大的貢献。

〔朱宗麟譯　胡席儒校〕

非綫性力学中的积分流形法*

Н. Н. Боголюбов 和

Ю. А. Митропольский 著

1. 积分流形法的一般思想

这篇綜述报告的目的是叙述近来在进一步发展、推广非綫性力学中的积分流形法和把它应用于新型問題等方面所获得的基本結果。积分流形法的思想属于Н.Н. 鲍戈柳鲍夫，早在1945年的专题論文《論数学物理学中的若干統計方法》中已表述过。在这专題論文中研討的是标准型微分方程的解在无限时間間隔中的性質的特殊問題，但是論文的思想和一系列定理的証明方法是十分有效和灵活的，因而可以应用来研究充分广泛的一类問題。

現在，非綫性力学中的积分流形理論的思想获得了重大的发展和推广，并已显著地利用来研究由包含小参数的微分方程描写的各种不同动力系統中所观察到的复杂現象。

在轉到研究那些使用积分流形法能够获得一些揭示积分曲綫一系列普遍性質的重要定理的具体类型方程之前，以及考察积分流形理論的基本方法和分析近来所获得的結果和成就之前，还是先簡短地談談方法的一般思想。

为此，首先引出下型微分方程組的积分流形的解析定义：

$$\frac{dx}{dt}=X(t,\ x,\ \varepsilon), \tag{1.1}$$

式中x，X——n維欧基利德空間E_n的矢量，t——时間，ε——整的小参数。

方程組(1.1)的右边，对于$-\infty<t<\infty$和开集$U_n\in E_n$中所包含的x，滿足若干相当一般的条件。

設对应于区間$(-\infty,\ \infty)$中的每个t，都有点x的某个集合S_t，它可以解析地表成下列参数形式方程：

$$x=f(t,\ C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_S), \tag{1.2}$$

式中$f(t,\ C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_S)$ 关于参数C_1，C_2，……，C_S在它們变化的整个区域中，滿足利普希茨条件。

如果对于方程(1.1)的任何解$x=x(t)$，都能由在某一瞬时$t=t_0$是正确的关系：

$$x(t)\in S_t \tag{1.3}$$

中推出它对任意实值t的正确性，那末我們說：S_t是方程(1.1)的s維积分流形($s\leqslant n$)。

用几何解释积分流形S_t那它就是具有下述性質的超曲面，如果方程組解的任何一个值处在积分流形（超曲

*《Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 1961. Т. I》, Киев, АН УССР, 1963, 93—154. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике.

面)上，那末整个的解全都处在积分流形(超曲面)上。

最初，在著作〔1〕中把积分流形理論的思想应用于下述特殊問題。考察方程(1.1)在其右边与小参数成比例时的特殊情况，即所謂标准型方程：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,\ x). \tag{1.4}$$

在对于任意$x\in U_n$，极限：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}X(t,\ x)dt=X_0(x) \tag{1.5}$$

关于区間$(-\infty,\ \infty)$中的t一致地存在的假定下，与方程組(1.4)的同时考察了平均化方程：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X_0(x). \tag{1.6}$$

就是要对于方程組(1.4)求解下述相当复杂的問題：建立准确解〔方程組(1.4)的解〕和近似解〔平均化方程組(1.6)的解〕的那些与它們在无限区間中性态有关的性質之間的一系列对应关系。

例如，在許多重要情况中(如下面将要指出的)，平均化方程(1.6)容許不变的超环面流形，因而諸如：准确方程(1.4)的积分流形是否位于上述流形的充分小邻域中？它們稳定到什么程度？等等的这样一些問題是很有意义的。

必須指出，借助奇异的变量代换，可以把准确方程(1.4)化成右边和平均化方程(1.6)右边只相差高阶小項的特殊形式。因此，这里所产生的問題和A.邦加莱局部理論中周期解的存在性問題有某种相似。

然而，在A.邦加莱理論中，問題归結为研究包含小参数的有限个未知量的常微分方程組的可解性，且这問題是利用隐函数定理来研究的，但在积分流形理論中，我們碰到了确定表征未知积分流形的函数的泛函方程。

这里特別应当指出，和上述关于方程組(1.4)准确解与近似解之間〔方程組(1.4)的解与方程組(1.6)的解之間〕的对应关系的問題无关，那是論証平均法(一般地講是漸近法)的問題，即使构成方程組(1.4)积分流形的局部理論也是有很大的独立意义，这是因为若方程組(1.4)的一些解位于維数小于原始相空間的流形上，則这些解的定性研究就可大大地簡化。

积分流形法中所发展的思想的特点，乃是微分方程定性理論中的某种新途径。我們在这里考察准确方程(1.4)和近似方程(1.6)两个微分方程組，它們右边的差是漸近小的量。

大家知道，个別的解往往对于方程右边的微小变化非常敏感。

在我們的理論中，处理的不是个別的解而是积分流形(不是曲綫而是超曲面)。

可以发現，积分流形是比个別的解对于方程右边的微小变化更为稳定的构成。在許多情况下可以証明下型定理：如果近似方程(1.6)有某个积分流形，那末准确方程(1.4)也允許有一个积分流形，它位于近似方程組积分流形的漸近狹窄的邻域中。同时，对于个別解的相似的定理，我們只有在对方程(1.4)和(1.6)的右边加上相当强的条件时，才能得到。

在这里还应再一次强調指出，准确方程(1.4)的积分流形存在这一事实，即使对于研究它的个別的解說来也有很大的意义，因为这时我們可不必考察整个相空間，而只要集中注意研究位于积分流形(超曲面)上的解。对稳定积分流形的情况尤其如此。

在初步地說明了积分流形法并針对(1.4)型方程簡短地描述了它的基本特点以后，将轉而研討一些最特殊型式的包含小参数的微分方程組。把积分流形法的思想应用于这些型式的方程組是十分有效的。

2. 非綫性力学中所遇到的一些特殊型式的微分方程

大家知道，若描写振动过程的微分方程包含小参数，并且在小参数取零值时这些方程可准确地积分，則应用非綫性力学的方法来研究这种振动过程是有效的。

这时，所討論包含小参数的非綫性微分方程的形式，以及包含在方程中的小参数本身特性是极为多样的。

但是在許多情况中，可以利用变量代换把振动微分方程化成特殊形式，其中包含小参数的方式使我們不仅能应用漸近法来获得近似解，而且也能給出对于用积分流形法进行定性研究所需要的一系列估計。

下面想談談一系列特殊型式的微分方程以及能把方程組化成便于进一步討論的形式的若干变量代换。

首先考察把振动微分方程化成所謂标准型的熟知方法[1]，由于应用平均化原理，从而使标准型方程的研究变得十分方便。

設N自由度非綫性振动系統用下列动能和势能表达式来描写：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j,\qquad V=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} b_{kj}q_kq_j, \tag{2.1}$$

式中$q_1, q_2, \cdots\cdots, q_N$——广义座标，$a_{kj}$，$b_{kj}$——常量，此外，二次型$T$和$V$是定正的；于是，大家知道，可以利用綫性变换：

$$q_j=\sum_{k=1}^{N} \varphi_j^{(k)} z_k \quad (j=1, \cdots\cdots, N) \tag{2.2}$$

引进正規座标$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_N$，使

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \dot{z}_k^2, \qquad V=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \omega_k^2 z_k^2 \tag{2.3}$$

[$\varphi_j^{(k)}$，ω_k——分別为对应于二次型(2.1)的正規函数和固有頻率]，于是无扰动运动的拉格朗日方程具有下列形式：

$$\frac{d^2z_k}{dt^2}+\omega_k^2 z_k=0 \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots, N). \tag{2.4}$$

現假設在振动系統上作用有下型小扰动：

$$\begin{aligned}\varepsilon Q_k=\varepsilon\Big\{ & Q_k^{(0)}(q_i, \dot{q}_i)+\sum_{\alpha}[Q_{k1}^{(\alpha)}(q_i, \dot{q}_i)\cos\Omega_\alpha t \\ & +Q_{k2}^{(\alpha)}(q_i, \dot{q}_i)\sin\Omega_\alpha t]\Big\} \qquad (i=1, \cdots\cdots, N),\end{aligned} \tag{2.5}$$

式中Ω_α——外力的頻率，ε——正的小参数。于是，在(2.5)中也轉到正規座标，就可得到下列非綫性微分方程組：

$$\frac{d^2z_k}{dt^2}+\omega_k^2 z_k=\varepsilon Z_k(t, z_i, \dot{z}_i) \qquad (k=1, 2, 3, \cdots\cdots, N), \tag{2.6}$$

式中Z_k由功的互等条件按下列公式确定：

$$Z_k=\sum_{j=1}^{N} Q_j\varphi_k^{(j)} \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots, N). \tag{2.7}$$

通过变量代换：

$$\begin{aligned} z_k&=x_ke^{i\omega_kt}+x_{-k}e^{-i\omega_kt}, \\ \dot{z}_k&=i\omega_kx_ke^{i\omega_kt}-i\omega_k x_{-k}e^{-i\omega_kt},\end{aligned} \tag{2.8}$$

容易把方程(2.6)化成标准型方程：

$$\frac{dx_k}{dt}=\varepsilon X_k(t, x_i) \qquad (k=\pm1, \pm2, \cdots\cdots, \pm N), \tag{2.9}$$

式中：

$$X_k=\frac{e^{-i\omega_k t}}{2i\omega_k}Z_k,\tag{2.10}$$

此外，$-\omega_{-k}=\omega_k$，$Z_{-k}=Z_k$。

以后为簡便計，将把方程組(2.9)写成矢量形式：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,\ x),\tag{2.11}$$

式中x，X——n維欧基利德空間E_n的矢量(在我們的情况中，$n=2N$)。方程組(2.11)的右边是t的周期函数或概周期函数，这取决于函数εQ_k和t有怎样的关系。

关于高頻率外力作用于振动系統的許多問題，也可以化成(2.11)型方程組。例如，設这种系統的运动用下型方程来描写：

$$\frac{d^2q_s}{dt^2}=F_s\left(\omega t,\ q_i,\ \frac{dq_i}{dt}\right)\quad(s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N),\tag{2.12}$$

式中 $F_s\left(\omega t,\ q_i,\ \frac{dq_i}{dt}\right)$——$t$的周期(或概周期)函数，$\omega$——《大》参数。

于是，按代换

$$\tau=\omega t,\ q_s=x_s,\ \frac{dq_s}{dt}=y_s\quad(s=1,\ \cdots\cdots,\ N)\tag{2.13}$$

引进新变量，我們得到下列方程組以代替方程組(2.12)：

$$\frac{dx_s}{d\tau}=\varepsilon y_s,\quad\frac{dy_s}{d\tau}=\varepsilon F_s(\tau,\ x_i,\ y_i)\quad(s=1,\ \cdots\cdots,\ N),\tag{2.14}$$

式中 $\varepsilon=\frac{1}{\omega}$——小参数。

比上述更一般的情况也可以化成(2.11)型方程，这时动力系統的状态用角变量α和n个变量x_1，x_2，……，x_n来表征，且用下列方程組描写：

$$\begin{aligned}&\frac{dx_s}{dt}=X_s(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\\&\frac{d\alpha}{dt}=\lambda\omega(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)+A(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n),\end{aligned}\tag{2.15}$$

式中λ——大参数，$X_s(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$和$A(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$—角变量$\alpha$的周期为$2\pi$的周期(或概周期)函数[在研究回轉仪系統时，在加速器理論中等等，都会碰到(2.15)型方程組]。

引进新独立变量$\tau=\lambda t$，可以把方程組(2.15)表成下型：

$$\begin{aligned}&\frac{dx_s}{d\tau}=\varepsilon X_s(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\\&\frac{d\alpha}{d\tau}=\omega(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)+\varepsilon A(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n),\end{aligned}\tag{2.16}$$

式中 $\varepsilon=\frac{1}{\lambda}$——小参数，或者消去$\tau$而表成下型：

$$\frac{dx_s}{d\alpha}=\varepsilon X_s^*(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ \varepsilon)\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\tag{2.17}$$

式中：

$$X_s^*=\frac{X_s(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)}{\omega(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)+\varepsilon A(\alpha,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)}.$$

比(2.6)型更一般的方程，也可以化成(2.11)型方程。

大家知道[3]，当研究非綫性振动系統中的不平稳过程时，我們在許多情况下都会碰到下型微分方程組：

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(\tau)\dot{q}_j\right\}+\sum_{j=1}^{N}b_{ij}(\tau)q_j$$

$$=\varepsilon Q_i(\tau,\ \theta,\ q_1,\ \cdots\cdots,\ q_N,\ \dot{q}_1,\ \cdots\cdots,\ \dot{q}_N,\ \varepsilon)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N),\tag{2.18}$$

式中q_i——广义座标，εQ_i——外扰动力，$\tau=\varepsilon t$——慢时間(与具有固有振动周期量級的自然时間单位相比为緩慢的)，ε——正的小参数，$a_{ij}(\tau)=a_{ji}(\tau)$，$b_{ij}(\tau)=b_{ji}(\tau)$——随时間緩慢变化的慣性系数和拟弹性系数，

$$\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau).$$

借按下列公式进行的变量代換：

$$q_i=\sum_{k=1}^{N}\varphi_i^{(k)}(\tau)z_k\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N),\tag{2.19}$$

式中 $\varphi_i^{(k)}(\tau)$——依賴于参数τ而且滿足正交条件的正規函数，可以把(2.18)型方程組化成下型：

$$\frac{d^2z_k}{dt^2}+\omega_k^2(\tau)z_k=\frac{\varepsilon}{m_k(\tau)}Z_k(\tau,\ \theta,\ z_1,\ \cdots\cdots,\ z_N,\ \dot{z}_1,\ \cdots\cdots,\ \dot{z}_N,\ \varepsilon),\tag{2.20}$$

此后再按下列公式进行一次代換：

$$\begin{aligned}z_k&=x_ke^{i\int\omega_k(\tau)dt}+x_{-k}e^{-i\int\omega_k(\tau)dt},\\ \dot{z}_k&=i\omega_k(\tau)x_ke^{i\int\omega_k(\tau)dt}-i\omega_k(\tau)x_{-k}e^{-i\int\omega_k(\tau)dt},\end{aligned}\tag{2.21}$$

我們就得到下型方程組：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(\tau,\ \theta,\ x,\ \varepsilon),\tag{2.22}$$

式中 $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$，$\tau=\varepsilon t$，方程組的右边与慢时間$\tau$有关，且是$\theta$的周期(或概周期，或拟周期)函数，这取决于函数$Q_i$和$\theta$有怎样的关系。

我們指出，比(2.18)更一般的方程組即描写在无扰动状态下(即$\varepsilon=0$，$\tau=$常量时)用下型拉格朗日函数来表征的多自由度系統振动的方程組也可以化成(2.22)型：

$$L=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(\tau)\dot{q}_i\dot{q}_j+2\sum_{i,j=1}^{N}g_{ij}(\tau)q_i\dot{q}_j-\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}(\tau)q_iq_j\right\},\tag{2.23}$$

式中：

$$g_{ij}(\tau)=-g_{ji}(\tau).$$

除了已討論过的几类包含小参数的微分方程(主要是化成标准型方程的)以外，还可以利用积分流形法的思想有效地研究描写复杂振动系統中动力学过程的几种更一般的微分方程組。

因而，我們还将討論下型接近于自治系統的方程組(ε——正的小参数)，

$$\frac{dx}{dt}=X(x)+\varepsilon X^*(\nu t,\ x,\ \varepsilon),\tag{2.24}$$

和下型接近于非自治系統的方程組：

$$\frac{dx}{dt}=X(t,\ x)+\varepsilon X^*(\nu t,\ x,\ \varepsilon),\tag{2.25}$$

式中ε——正的小参数，x，X，X^*——欧基利德空間E_n的n維矢量。

在下面我們将要談到的一系列假定下，振动理論中的大量問題(多自由度系統的不接近于諧波的单頻振动，张弛型振动等等)都导致(2.24)和(2.25)型方程組。

我們还要研究下型更一般的微分方程組：

$$\frac{dx}{dt}=X(\tau,\ x)+\varepsilon X^*(\tau,\ \theta,\ x,\ \varepsilon),\tag{2.26}$$

$$\frac{dx}{dt}=X(\tau,\ \theta,\ x)+\varepsilon X^*(\tau,\ \theta,\ x,\ \varepsilon),\tag{2.27}$$

式中 $\tau=\varepsilon t$——慢时間，$\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$，它考慮到了振动系統一系列参数慢变的可能性(就前述意义来説是慢的)。

当我們在使以上所列举类型方程时，同时指出，还可以列出在非綫性振动理論中遇到的一系列有趣而且有很大实际意义的微分方程組，对于它們积分流形的研究是有意义的。

在轉到把这里所列举之各类型方程变换成便于进一步研究的形式以前，必須指出，除了用积分流形法研究这里所指出的方程时所获得的，幷在上一节中已經講过的一系列优点以外，由于构成(2.6)，(2.18)和(2.24)—(2.27)型方程組的对应于单频率振动过程的近似解的問題，稳定的二維积分流形的研究有重要的意义。

3. 把微分方程化成便于研究的形式

現在講一講把上面所列举的一些类型的方程变换到新变量的問題，这时我們力求把方程化成这样的形式，即旣考慮到方程的特点，又可以估計在轉到近似方程时(尤其是轉到平均化方程时)所舍去的項(高阶小項)，且又能容易地得到为构成积分流形幷闡明其性質所必需的許多估計。

先着手研究标准型微分方程組的变换。同时指出，因为在研究积分流形的方法中和构成近似解时，广泛而有效地应用了类似的变换，所以在第一种情况下我們把它相当詳細地列出来，幷指出，在Н.Н.鮑戈柳鮑夫和Ю.А.米特罗波利斯基的专題論文[2]中可以找到极其詳尽的全部演算。

因而，考察方程組(2.11)：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,\ x),\tag{2.11}$$

式中x，X-—n維欧基利德空間E_n的矢量。

在研究方程組(2.11)时，同时研究了第一次近似方程：

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)\ .\tag{3.1}$$

首先討論当第一次近似方程(3.1)有关于t的周期为 $\frac{2\pi}{\varepsilon\omega}$ 的周期解：

$$\xi=\xi(\varepsilon\omega t)\tag{3.2}$$

的較一般情况：

$$\xi(\varphi+2\pi)=\xi(\varphi).$$

假設在这周期解的ρ邻域中矢量函数X$(t,\ x)$具有下列性質：

a)X$(t,\ x)$以及它关于x的一阶偏导数在区域

$$-\infty<t<\infty,\qquad x\epsilon D_\rho\tag{3.3}$$

中有界且关于x是一致連續的，其中D_ρ——周期解(3.2)的ρ邻域；

б)在D_ρ的每一点，当$T\to\infty$时，

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}X(t,\ x)dt\to X_0(x)\tag{3.4}$$

关于区間$(-\infty,\ \infty)$中的t一致地成立。

对第一次近似方程(3.1)，来作对应于周期解(3.2)的变分方程。

我們得到有周期系数的齐次綫性微分方程組：

$$\frac{d\delta\xi}{dt}=\varepsilon X'_{0x}(\xi(\varepsilon\omega t))\delta\xi\tag{3.5}$$

根据函数(3.2)的定义，恆有：

$$\omega\xi'_\varphi(\varphi)=X_0(\xi(\varphi)).\tag{3.6}$$

把这恆等式关于φ求导数，不难断定对于任意常量δu_0，表达式

$$\delta\xi=\xi'_\varphi(\varepsilon\omega t)\delta u_0\tag{3.7}$$

是变分方程(3.5)的解。

在轉到变换方程(2.11)以前，先对有周期系数的微分方程的理論作一些有关的熟知說明。

大家知道，根据关于周期系数齐次綫性微分方程的性質的弗洛克-李維普諾夫定理，借助于下型变换：

$$\delta\xi=\xi'(\varepsilon\omega t)\delta u_0+A(\varepsilon\omega t)\delta u, \tag{3.8}$$

可以把周期系数方程(3.5)化成常系数微分方程組：

$$\frac{d\delta u_0}{dt}=0, \qquad \frac{d\delta u}{dt}=H\delta u, \tag{3.9}$$

在(3.8)中$A(\varphi)$——n行$n-1$列的矩陣，它的元素是φ的周期为2π的周期函数且有連續的一阶导数，δu——分量为δu_1，δu_2，……，δu_{n-1}的矢量，而且方程

$$\operatorname{Det}|I_{n-1}p-H|=0 \tag{3.10}$$

的根是方程組(3.5)的特征指数，式中I——$n-1$維单位方陣，H——$n-1$維方陣。

同时应当指出，不論是矩陣$A(\varphi)$和H，还是矢量δu，一般說来都是复值的，虽然方程(3.5)的系数是实的。

这里順便建立一个以后要用到的关系式。为此，把(3.8)代入方程(3.5)，得到：

$$\frac{d\xi'(\varphi)}{dt}\delta u_0+\xi'(\varphi)\frac{d\delta u_0}{dt}+\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\varepsilon\omega\delta u+A(\varphi)\frac{d\delta u}{dt}$$
$$=\varepsilon X'_{0x}(\xi(\varphi))\xi'(\varphi)\delta u_0+\varepsilon X'_{0x}(\xi(\varphi))A(\varphi)\delta u. \tag{3.11}$$

注意到，$\xi'_\varphi(\varepsilon\omega t)\delta u_0$是方程(3.5)的解，以及关系式(3.9)，得到下列恆等式：

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\varepsilon\omega+A(\varphi)H=\varepsilon X'_{0x}(\xi(\varphi))A(\varphi), \tag{3.12}$$

以及：

$$\frac{d\bar{A}(\varphi)}{d\varphi}\varepsilon\omega+\bar{A}(\varphi)\bar{H}=\varepsilon X'_{0x}(\xi(\varphi))\bar{A}(\varphi), \tag{3.13}$$

式中$\bar{A}(\varphi)$和$\bar{H}$分别是与$A(\varphi)$和H共軛的。

現在来把方程(2.11)变换到新变量。

为此，把它写成下列形式：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X_0(x)+\varepsilon Z(t,x), \tag{3.14}$$

式中：

$$Z(t,x)=X(t,x)-X_0(x). \tag{3.15}$$

按下列公式引进新变量φ，$b(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{n-1})$：

$$x=\xi(\varphi)+\frac{1}{2}\left\{A(\varphi)b+\bar{A}(\varphi)\bar{b}\right\}, \tag{3.16}$$

式中b和$\bar{b}$——互为共軛的量。

把(3.16)代入(3.14)，考慮到(3.6)和恆等式(3.12)，(3.13)，求得：

$$\left[\xi'(\varphi)+\frac{1}{2}(A'_\varphi(\varphi)b+\bar{A}'_\varphi(\varphi)\bar{b})\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega\right)+\frac{1}{2}\left[A(\varphi)\left(\frac{db}{dt}-\varepsilon Hb\right)+\bar{A}(\varphi)\left(\frac{d\bar{b}}{dt}-\varepsilon\bar{H}\bar{b}\right)\right]$$
$$=\varepsilon\left[X_0\left\{\xi+\frac{1}{2}(A(\varphi)b+\bar{A}(\varphi)\bar{b})\right\}-X_0(\xi)-\frac{1}{2}X'_{0x}(\xi)\big(A(\varphi)b+\bar{A}(\varphi)\bar{b}\big)\right]+\varepsilon Z\left\{t,\xi(\varphi)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left[A(\varphi)b+\bar{A}(\varphi)\bar{b}\right]\right\}. \tag{3.17}$$

方程組(3.17)可以表成下型：

$$\left[\xi'(\varphi)+\frac{1}{2}(A'_\varphi(\varphi)b+\bar{A}'_\varphi(\varphi)\bar{b})\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega\right)+\frac{1}{2}\left[A(\varphi)\left(\frac{db}{dt}-\varepsilon Hb\right)\right.$$
$$\left.+\bar{A}(\varphi)\left(\frac{d\bar{b}}{dt}-\varepsilon\bar{H}\bar{b}\right)\right]=Y, \tag{3.18}$$

式中Y——实的矢量函数。

从这方程組中求这样的变量：

$$\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega,\quad \frac{db}{dt}-\varepsilon Hb=R, \tag{3.19}$$

使得滿足条件：

$$R=\bar{R}, \tag{3.20}$$

从而有：

$$\frac{d\bar{b}}{dt}-\varepsilon\bar{H}\bar{b}=R.$$

同时注意到，由于b是变值的，选择R时总有一些任意性，此外，附加条件选择为(3.20)的形式显然不是必要的。

考虑到条件(3.20)，由方程組(3.18)得到关于表达式(3.19)的实系数綫性方程組：

$$\left[\xi'(\varphi)+\frac{1}{2}(A'_\varphi(\varphi)b+\bar{A}'_\varphi(\varphi)\bar{b})\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega\right)$$
$$+\frac{1}{2}(A(\varphi)+\bar{A}(\varphi))\left(\frac{db}{dt}-\varepsilon Hb\right)=Y. \tag{3.21}$$

假設这方程組的行列式：

$$D(\varphi,b)=\left|\xi'(\varphi)+\frac{1}{2}(A'_\varphi(\varphi)b+\bar{A}'_\varphi(\varphi)\bar{b}),\quad \frac{1}{2}(A(\varphi)+\bar{A}(\varphi))\right| \tag{3.22}$$

在$b=0$时不等于零[1]。

那末，由于連續性，这行列式在点$b=0$的某个δ邻域内也不等于零。

約定，用U_δ来表示使$D(\varphi,b)\neq0$的点$b=0$的δ邻域，用ΩU_δ来記当$b\in U_\delta$时值(φ,b)的变动区域。

我們看到，总可以找到充分小的正数δ，使得在区域ΩU_δ中成立不等式：

$$\frac{1}{2}\left|A(\varphi)b+\bar{A}(\varphi)\bar{b}\right|<\rho,$$

因而，由表达式(3.16)所确定的x位于区域D_ρ中。

在区域U_δ中关于变量(3.19)解方程組(3.21)，求得：

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=\varepsilon\omega+\varepsilon W(t,\varphi,b),\\ \frac{db}{dt}&=\varepsilon Hb+\varepsilon B(t,\varphi,b),\end{aligned} \tag{3.23}$$

式中函数$W(t,\varphi,b)$，矢量函数$B(t,\varphi,b)$以及它們关于φ,b的一阶偏导数有界且关于φ,b是一致連續的。

此外，在区域

$$-\infty<t<\infty,\ (\varphi,b)\in\Omega U_\delta \tag{3.24}$$

中的任意点，当$T\to\infty$时，

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}W(t,\varphi,b)dt\to W(\varphi,b),\quad \frac{1}{T}\int_t^{t+T}B(t,\varphi,b)dt\to B(\varphi,b) \tag{3.25}$$

关于t一致地成立。

同时，函数$W(\varphi,b)$，$B(\varphi,b)$連同它們的一阶偏导数在$b=0$时变成零，且关于φ和b滿足利普希茨条件，而利普希茨常量$\eta(\sigma)$滿足下列条件：

$$\text{当}\sigma\to0\text{时}\quad \eta(\sigma)\to0\qquad(\sigma<\delta).$$

为了便于进一步研究方程(3.23)起見，适宜引进新变量$g,h(h_1,h_2,\cdots\cdots,h_{n-1})$把这方程变换成下列形式：

---

1)为写法的簡単起見，在这里和以后，将不标明函数与共軛量的相关性。