CHAMPION 考研辅导丛书

KAO YAN FU DAO CONG SHU

全品图书 CHAMPION

2003年
硕士研究生入学考试数学复习指导全书

胡金德 主编

熟知考纲考点

知识要点串讲

能力·思维·方法

预测试题测试

理工类

LI GONG LEI

學苑出版社

2003年硕士研究生入学考试

数学复习指导全书

（理工类）

主　编　胡金德

（清华大学数学系教授、原考研命题组成员）

编　者　盛祥耀　胡金德　陈　魁

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

2003年硕士研究生入学考试数学复习指导全书(经济类、理工类)/胡金德主编.
-北京:学苑出版社,2002.4

ISBN 7-5077-1184-6

Ⅰ.硕… Ⅱ.胡… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第071166号

2003年硕士研究生入学考试数学复习指导全书

(理工类)

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街11号 100036

三河市长城印刷有限公司印刷

787×1092 16开本 36.625印张 749千字

2002年4月北京第1版 2002年4月北京第1次印刷

印数:3000册 定价:40.00元

前　　言

为了满足国家建设对高层次人才的需要，近年来硕士研究生的教育发展较快，报考研究生的人数逐年增多，这当然是好事，但不少考生的考试成绩并不理想，达不到考试大纲的要求，使有关单位不能在更大范围内挑选人才．如何保证硕士生入学质量，这是当前急需解决的问题．分析其原因，一个重要因素是考生不知道怎样有效地做准备，由于准备不得法，花了不少时间和精力，但收效甚微．因此，有针对性地复习，提高素质是解决这一问题的关键：要针对考生的实际情况；要针对考试大纲及历届考题所反映的要求；要有硕士学习阶段所需要的数学能力．

考生的实际情况是：多数考生已经多年没有系统地接触在本科阶段所学过的数学，特别是考试大纲所规定的内容，不少基本思路、方法和公式遗忘了，准备考研的时间又不多；再有，对考研的要求理解不清，这样就不能有的放矢地进行复习．我们编写此书的目的，就是想解决这些问题，为此从以下几个方面来考虑：

1．为了在较短时间内捡回最基本的思路、方法和公式，我们在每章中安排了**“熟知考纲考点”“知识要点串讲”“能力、思维、方法”“预测试题测试”**四部分内容，其中穿插**能力素质** **激活思维** **真题在线** **真题演练**栏目，尤其设置了一些典型例子，以便帮助读者较快地掌握这些内容．

2．从对考试大纲和多年来考研题目的分析，发现在某些方面和综合性较强的题，证明题和应用题超出了本科的要求，而考生在这些方面过去接触少、练习少，为此我们从多个方面、多个角度和多个层次上让考生较系统地、较全面地、较好地解决这个问题，进入佳境，使大家方法多一些，分析问题能力强一些和思路开扩一些．

3．从多年来的考研辅导和对考生入学试卷阅卷的情况看，对有些常犯的错误，我们有意识地在有关章节安排了相应的题或在题目中设置了错误的做法，以提高考生的识别能力．

4．安排了考纲、考点及考试要求的内容．

5．增加了近年来（包括2002年）的考研真题，以便考生了解考研的命题思路与考核要点．

在此我们愿意提醒读者，有一本较好的考研辅导书固然重要，它能使你少走弯路，但最后的成功还得靠自己的努力．

参加本书编写的是清华大学数学科学系的部分教师，其中多数是有多年参加考研辅导和参加研究生入学考试阅卷的经历，我们还愿意告诉大家，参加编写工作的还有曾多次担任硕士研究生入学考试数学命题组工作的成员，有的曾多届担任“国家教委工科数学课程教学指导委员会”的副主任，这些教师的参加无疑使本书的编写质量更有保证．

由于我们水平有限，错误与不妥之处敬请指正．

编　者

2002年1月于清华园

目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限和连续

一、熟知考纲考点

1. 考纲、考点

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义以及它们性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$$

函数的连续概念　函数间断点类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

2. 考试要求

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

(2) 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

(5) 理解极限概念,理解左极限与右极限的概念,以及极限存在与左、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

(9) 理解函数连续性概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有

界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、知识要点串讲

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y,如果对于变量 x 所考虑范围内的每一个值,变量 y 都对应着一个确定的值,那么称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$ 或 $y = F(x)$,$y = g(x)$,等等.

2. 函数的有界性定义

设存在正数 M,在 x 变化范围 I 内,都有 $|f(x)| \leqslant M$.称函数 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 函数的单调性定义

设在区间 I 内的任意两个数 x_1, x_2.如果当 $x_1 < x_2$(或 $x_1 > x_2$)时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$[或 $f(x_1) > f(x_2)$],则称 $f(x)$ 在 D 内是单调增加的(或单调减小的).

4. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 定义在对称于原点的区间 I 内,如果对于 I 内任意的 x,恒有 $f(x) = f(-x)$[或 $f(x) = -f(-x)$],则称 $f(x)$ 在 I 内为偶函数(或奇函数).

5. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,如果存在正数 T,恒有 $f(x) = f(x+T)$,其中 x 为任意实数,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

6. 极限定义

如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - a| < \varepsilon$.则称当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 以 a 为极限.记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

类似有 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ 的定义:如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $N < 0$,当 $|x| > N$ 时,恒有 $|f(x) - a| < \varepsilon$,则称当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 a 为极限.

7. 单调有界数列必有极限

如果数列 u_n 单调增(或减)而上界 M(或有下界 M)则数列 u_n 有极限,其极限不大过 M(或不小于 M).

8. 夹逼准则

设在 x_0 的一个邻域的内有 $G(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} G(x) = a$,$\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = a$ 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.(也适合当 $x \to \infty$ 时的情形)

9. 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

10. 无穷小量的阶

设 α, β 均为无穷小,且不为 0.如果

(1) $\lim=\frac{\alpha}{\beta}=a\neq 0$，则称 α 与 β 为同阶无穷小．当 $a=1$ 时，称 α 与 β 为等价无穷小，或称相当无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$．

(2) 当 $\lim=\frac{\alpha}{\beta}=0$ 时，则称 α 是 β 的高价无穷小或 β 是 α 的低阶无穷小，记作 $\alpha=0(\beta)$．

11．几个重要的等价无穷小

$$\sin x\sim x\quad(x\to 0)\quad \tan x\sim x\quad(x\to 0)$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\quad(x\to 0)$$

$$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to 0)\quad e^x-1\sim x\quad(x\to 0)$$

12．等价无穷小代换定理

(1) 设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$．如果 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=a$(或 ∞)，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=a$(或 ∞)．

(2) 设 $\alpha\sim\alpha'$，如果 $\lim\alpha'f(x)=a$(或 ∞)，则 $\lim\alpha f(x)=\lim\alpha'f(x)=a$(或 ∞)(或 $\lim\frac{g(x)}{\alpha f(x)}=\lim\frac{g(x)}{\alpha'f(x)}$)，简单讲：在乘积因子中的等价无穷小量可以替换．

例　$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1$．因为当 $x\to\infty$ 时，$\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$．

(3) 设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 α 与 β 不是等价无穷小．如果 $\lim\frac{\alpha'-\beta'}{r}=a$(或无穷)，则

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{r}=\lim\frac{\alpha'-\beta'}{r}$$

简单地讲，分子或分母中遇到两个非等价无穷小之差时，可以各用其等价无穷小代换之．

例　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\mathrm{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x}{x}=1$．因为当 $x\to 0$ 时 $\sin 2x$ 与 $\tan x$ 不是等价无穷小．

13．函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续定义

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处的一个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续．

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处的一个邻域内有定义记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$．如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续．

(1) 与 (2) 两个定义等价．

14．间断点

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域有定义(x_0 也可以没有定义)，如果 $f(x)$ 在 x_0 不连续，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点．

如果 x_0 处是左右极限存在的间断点．则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点．否则称第

二类间断点.例如 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时,左、右极限不存在,故 $x=0$ 是 $\sin\frac{1}{x}$ 的第二类间断点.又如 $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$.左右极限存在但不相等,故 $x=0$ 是 $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ 的第一类间断点.

15. 最值存在定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上必存在最大值和最小值.

16. 介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,记 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$,$m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$,如果 $m\leqslant\mu\leqslant M$,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=\mu$.

堆论:如果 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$

17. 罗必达法则

设 $f(x)$,$g(x)$ 在 x_0 的一个邻域内(x_0 可除外)可微,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,$g'(x)\neq 0$,如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$(或 ∞),则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

此法称为罗必达法则.对于 $f(x)\to\infty$,$g(x)\to\infty$ 时,在相应条件下,上式仍成立.即仍有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

对于 $x\to\infty$,也可使用,即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

18. 泰勒公式

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有 $n+1$ 阶导数,则在 x_0 的一个邻域内至少存在一点 ξ 使

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,其中 ξ 在 x_0 与 x 之间,称 n 阶泰勒公式.或称拉氏余项的泰勒公式.

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有 n 阶导数,则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0[(x-x_0)^n]$

称为皮氏余项的泰勒公式

19. 变上限定积分对上限变量求导公式

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$x\in[a,b]$,则

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)_x^1=f(x)$$

20. 定积分的变量置换法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导函数连续且 $\varphi'(t)\neq 0$.

又 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\rho)=b$（或 $\varphi(\alpha)=b,\varphi(\beta)=a$），则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi dt \quad (\text{或为}\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)$$

三、能力、思维、方法

能力素质

1. 有关复合函数表示式的计算

复合函数表示式的计算大致有下列几类：

(1) 已知 $f(x),g(x)$ 的表达式，求 $f(g(x))$ 或 $g(f(x))$；

(2) 已知 $f(\varphi(x))$ 及 $\varphi(x)$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式；

(3) 已知 $f(\varphi(x))$ 及 $\varphi(x)$ 的表达式，求 $f(\psi(x))$ 表达式；

(4) 已知 $f(x),f(\varphi(x))$ 的表达式，求 $\varphi(x)$ 的表达式；

(5) 已知 $f(x),f(\varphi(x))$ 的表达式，求 $\varphi(\psi(x))$ 的表达式.

下面分别举例.

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 2 & |x|>2\end{cases}$，求 $f(\varphi(x))$ 及 $\varphi(f(x))$.

解 先求 $f[\varphi(x)]$ 的表示式，因为

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1 & |\varphi(x)|\leqslant 1\\ 0 & |\varphi(x)|>1\end{cases}$$

下面找 x 的范围使 $|\varphi(x)|\leqslant 1$ 及 $|\varphi(x)|>1$. 先解 $|\varphi(x)|\leqslant 1$，由 $\varphi(x)$ 的表达式知，在 $|x|\leqslant 2$ 上找使 $|4-x^2|\leqslant 1$ 的 x 值，即解不等式组

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |4-x^2|\leqslant 1\end{cases}$$

容易解得 x 的变化范围:$\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2$ 及 $-2\leqslant x-\leqslant-\sqrt{3}$.

再解 $|\varphi(x)|>1$. 由 $\varphi(x)$ 的表达式知，当 $|x|>2$ 时，$\varphi(x)=2$，又在 $|x|\leqslant 2$ 内也有使 $|\varphi(x)|>1$ 的 x 值. 即解不等式组

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |4-x^2|>1\end{cases}$$

容易解得 x 的变化范围：$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$. 所以

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1 & x \in [\sqrt{3},2] \cup [-2, -\sqrt{3}] \\ 0 & x \in [-\infty, -2] \cup [-\sqrt{3},\sqrt{3}] \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

读者可以从例 1 的解法中体会出，对于求分段函数的复合函数表达式，实质上就是解不等式.

对于(2)(3)情形比较容易，例如由 $f(e^x) = x^2$，求 $f(x)$. 由 $f(e^x) = (\ln e^x)^2$，即可知求 $f(x) = (\ln x)^2$.(3) 易如反掌.(4),(5) 情形是同一类型，只要求得 $\varphi(x)$, $\varphi(\psi(x))$ 就易求了，下面举(4) 的情形.

【例 2】 设 $f(x) = e^x + 2$, $f(\varphi(x)) = x^2$，求 $\varphi(x)$.

解 因为 $f(x) = e^x + 2$，得 $f(\varphi(x)) = e^{\varphi(x)} + 2$. 又 $f(\varphi(x)) = x^2$，所以有下列等式

$$e^{\varphi(x)} + 2 = x^2$$

得

$$\varphi(x) = \ln(x^2 - 2), x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

2. 增减性、周期性的讨论

【例 3】 设 $\varphi(x)$, $g(x)$, $f(x)$ 均为增函数，且满足 $\varphi(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$，证明 $\varphi(\varphi(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant f(f(x))$.

证 将 x 换为 $\varphi(x)$，由 $\varphi(x) \leqslant g(x)$ 得 $\varphi(\varphi(x)) \leqslant g(\varphi(x))$. 又因 $g(x)$ 是增函度及 $\varphi(x) \leqslant g(x)$ 得 $\varphi(\varphi(x)) \leqslant g(g(x))$. 因而有

$$\varphi(\varphi(x)) \leqslant g(g(x))$$

同理可得

$$g(g(x)) \leqslant f(f(x))$$

于是证得

$$\varphi(\varphi(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant f(f(x))$$

【例 4】 设曲线 $y = f(x)$ 对称于直线 $x = a$ 和 $x = b(b > a)$，证明函数 $y = f(x)$ 是周期函数，并求出其周期.

分析一下题目的几何意义. 设 $x = a$ 与 $x = b$ 之间的图形如图 1.1 所示，因其对称于 $x = a$ 及 $x = b$. 可看出 $x \in [a, b]$ 上的图形会重复出现，从而知是周期函数，且其周期为 $2[b - a]$.

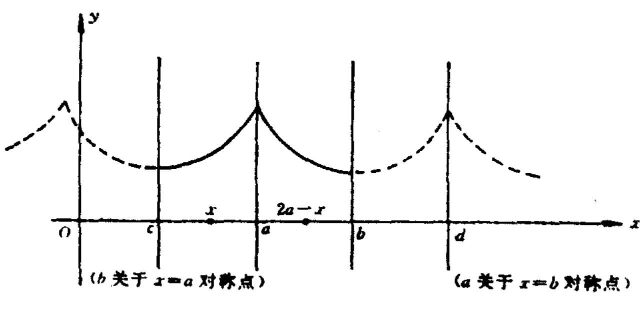

图 1.1

证　关于 $x=a$ 及 $x=b$ 对称可表示为 $f(x)=f(2a-x)$ 及 $f(x)=f(2b-x)$. 于是

$$f(x+2b-2a)=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$$

即 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

【例 5】　证明函数 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

证　用反证法,设 $f(x)=x\cos x$ 是以 T 为周期函数,那么对于任意 x 恒有

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$,得

$$\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$$

即

$$\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\sin T=0 \quad 得\ \sin T=0 \tag{1}$$

再由 $x=0$,得

$$T\cos T=0$$

即

$$\cos T=0 \tag{2}$$

比较(1)式与(2)式,矛盾,所以 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

3. **函数方程**

【例 6】　设 $f(x)$ 满足方程: $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$.

求 $f(x)$　$(|a|=|b|, ab\neq 0)$

解:在方程中令 $\frac{1}{x}$ 为 x,得 $af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$.

联立

$$\begin{cases} af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx \end{cases}$$

由此解得　$f(x)=\dfrac{c(\frac{a}{x}-bx)}{a^2-b^2}), f(\frac{1}{x})=\dfrac{c(ax-\frac{b}{x})}{a^2-b^2}$

【例 7】　设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x)=x$,求 $f(x)$.

分析　只要求出 $\sin f(x)$ 就行了.在已给的方程中将 $\sin f(x)$ 与 $\sin f(\frac{1}{3}x)$ 理解为两个未知数,显然在一个方程中解不出二个确定的未知数,为此需要寻找另一个合适的方程.注意到方程的第二项复合函数内是 $\frac{1}{3}x$,而且 $\sin f(\frac{1}{3}x)$ 的系数正好也有 $\frac{1}{3}$.利用这个特点,将方程写为

$$\sin f(x) = x + \frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x) \tag{1}$$

怎样求 $\sin f(\frac{1}{3}x)$ 呢?可把方程(1) 中的 x 换为$\frac{1}{3}x$,然后两边分别乘$\frac{1}{3}$,就得到

$$\frac{1}{3}\sin f(\frac{x}{3}) = \frac{1}{3^2}x + \frac{1}{3^2}\sin f(\frac{1}{3^2}x)$$

为了求得 $\sin f(\frac{1}{3^2})$,再重复以上步骤,如此下去最后会出现$\frac{1}{3^n}\sin f(\frac{x}{3^n})$,由于函数的连续性当 $n \to \infty$ 时,此项趋于0,即最后在方程中消失,从而得到 $f(x)$

解

$$\sin f(x) - \frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x) = x \tag{1}$$

则

$$\sin f(\frac{1}{3}x) - \frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3^2}x) = \frac{1}{3}x$$

两边乘$\frac{1}{3}$,得

$$\frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x) - \frac{1}{3^2}\sin f(\frac{1}{3^2}x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x \tag{2}$$

用$\frac{1}{3^2}x$ 代x,代入(1),得

$$\sin f(\frac{1}{3^2}x) - \frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3^3}x) = \frac{1}{3^2}x$$

两边乘$\frac{1}{3^2}$,得

$$\frac{1}{3^2}\sin f(\frac{1}{3^2}x) - \frac{1}{3^3}\sin f(\frac{1}{3^3}x) = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}x\cdots \tag{3}$$

不断重复上述步骤,最后得

$$\frac{1}{3^{n-1}}\sin f(\frac{x}{3^{n-1}}) - \frac{1}{3^n}\sin f(\frac{1}{3^n}x) = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}x$$

将以上各式相加,得

$$\sin f(x) - \frac{1}{3^n}\sin f(\frac{x}{3^n}) = x\left(1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{2n-2}}x\right)$$

$$\sin f(x) = \frac{1}{3^n}\sin f(\frac{x}{3^n}) + \frac{x}{1-\frac{1}{9}}\left[1 - \left((\frac{1}{9}\right)^n\right]$$

两边取 $n \to \infty$ 的极限,得

$$\sin f(x) = \frac{9}{8}x$$

从而得

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{9}{8}x\right)$$

【例 8】 设$f(x)$在(a,b)上有定义,且对于任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$,恒有$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant$

$(x_1-x_2)^2$.证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数

证法一 用导数思路来分析.

$$0\leqslant |f(x+\Delta x)-f(x)|\leqslant(\Delta x)^2$$

$$0\leqslant\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\leqslant\frac{(\Delta x)^2}{|\Delta x|}=|\Delta x|\qquad(\Delta x\neq 0)$$

$$0\leqslant\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\leqslant\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$$

由此知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|=0$$

所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0^*$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,故 $y=c$ 为常数.

* 由 $\lim|g(x)|=0$ 可证明 $\lim g(x)=0$.这是因为 $||g(x)|-0|<\varepsilon$,等价 $|g(x)-0|<\varepsilon$.

证法二 在 (a,b) 中任取两点 $x\neq y$,并将 $[x,y]$ 分成 n 等分.其 $n-1$ 个分点分别记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_0=x,\alpha_n=y,(\alpha_{i+1}-\alpha_i)=\frac{y-x}{n}(i=0,1,2,\cdots,n-1)$.

$$0\leqslant|f(x)-f(y)|=|f(\alpha_0)-f(\alpha_1)+f(\alpha_1)-f(\alpha_2)+f(\alpha_2)-\cdots+f(\alpha_{n-1})-f(\alpha_n)|$$

$$\leqslant|f(\alpha_0)-f(\alpha_1)|+|f(\alpha_1)-f(\alpha_2)|+\cdots+|f(\alpha_{n-1})-f(\alpha_n)|$$

$$\leqslant(\alpha_0-\alpha_1)^2+(\alpha_1-\alpha_2)+\cdots+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$

$$=(\frac{y-x}{n})^2+(\frac{y-x}{n})^2+\cdots+(\frac{y-x}{n})^2=n\ \frac{(y-x)^2}{n^2}=\frac{1}{n}(y-x)^2$$

取极限

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}|f(x)-f(y)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(y-x)^2$$

得

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-f(y)|=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-f(y)]=0$$

又因 $f(x),f(y)$ 均与 n 无关,得 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-f(y)]=f(x)-f(y)$,所以有

$$f(x)=f(y)$$

由此知 $f(x)$ 为常数.

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续,且满足 $f(x)=f(x^2)$,证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为常数.

解 将 $f(x)=f(x^2)$,写为

$$f(x)=f(\sqrt{x})\tag{1}$$

(因为 $x>0$,故$\sqrt{x}$有意义)其中 $x\in(0,+\infty)$的任意数.

将(1)式中的 x 换为$\sqrt{x}$,得

$$f(\sqrt{x})=f(x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}})\tag{2}$$

再将(2)式中的 x 换为 $x^{\frac{1}{2}}$,得

$$f(x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}})$$

如此不断下去有

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

即

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

两边取极限,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$,及 $f(x)$连续,所以得到

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$$

4. 利用等价无穷小、罗必达法则求极限

【例 10】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

解 是“$\dfrac{0}{0}$”型. 可用罗必达法则.

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

注意 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 因而式中的 $\sin x,\tan x$ 不能用 x 代替,但下式可以代替

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x-x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x-x}{2x-x}=1$$

【例 11】 求$\lim\limits_{x\to0}(\cot x-\dfrac{1}{x})$.

解 是“$\infty-\infty$”型,将它化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型后,才可用罗必达法则.

$$\lim_{x\to0}(\cot x-\frac{1}{x})=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{2x}=0$$

将分母中 $\sin x$ 用 x 代替后用罗必达就显得方便了.

【例 12】 求$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+\sqrt{x^2-1}})$.

解 是“$(\infty-\infty)$”型,不易化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型,因此用罗必达法则有困难. 用有理化.