

13-26-2007

第 3 篇 电 路

主 编	平 山	博	(早 稻 田 大 学)
执 笔 者	石 井 順 也	(近 畿 大 学)	
	梶 谷 洋 司	(東 京 工 業 大 学)	
	木 田 拓 郎	(東 京 工 業 大 学)	
	岸 源 也	(東 京 工 業 大 学)	
	平 山 博	(早 稻 田 大 学)	
	藤 田 廣 一	(慶 応 大 学)	
	堀 内 和 夫	(早 稻 田 大 学)	
	松 本 隆	(早 稻 田 大 学)	
	森 真 作	(慶 応 義 塾 大 学)	
	柳 沢 健	(東 京 工 業 大 学)	

译 者	夏 承 伦
校 者	蒋 永 顺

目 录

第1章 电路基础和交流电路	3-1	3.3 非正弦波交流	3-22
1.1 电路基本量的定义	3-1	3.4 非正弦波交流的功率	3-23
1.2 电路元件	3-1	3.5 等值正弦波交流	3-23
1.3 正弦波交流	3-2	第4章 多相交流	3-23
1.4 矢量表示 (复数表示)	3-2	4.1 多相制	3-23
1.5 各种电路	3-3	4.2 耦合的多相制	3-23
1.6 矢量轨迹	3-6	4.3 Y联接和△联接间的阻抗换算	3-24
1.7 谐振电路	3-6	4.4 多相交流的功率	3-24
1.8 电抗电路	3-9	4.5 旋转磁场	3-25
1.9 LR 和 RC 电路	3-10	4.6 三相的高次谐波	3-25
1.10 阻抗函数	3-11	4.7 对称坐标法	3-25
第2章 一般线性电网	3-11	4.8 直角坐标法	3-28
2.1 网络图论	3-11	第5章 二端口网络和滤波器	3-29
2.2 电路的基本方程式	3-12	5.1 二端口网络	3-29
2.3 网络函数的图论公式	3-13	5.2 工作函数型滤波器	3-32
2.4 电路分析方法	3-13	5.3 镜像参数滤波器	3-39
2.5 对偶性	3-15	5.4 各种滤波器	3-40
2.6 线性方程式的处理技巧	3-16	5.5 电阻衰减器	3-41
2.7 基尔霍夫定律和变分原理	3-17	第6章 分布参数电路	3-41
2.8 叠加原理	3-17	6.1 基本方程式	3-41
2.9 互易定理	3-17	6.2 特性阻抗和传播系数	3-43
2.10 补偿定理	3-18	6.3 特殊线路	3-43
2.11 电源的等值变换	3-18	6.4 位置角	3-44
2.12 等值电源表示	3-18	6.5 反射和透射	3-45
2.13 最大有功功率	3-19	6.6 线路的谐振	3-46
2.14 LCR 电路的守恒量	3-19	第7章 过渡响应和时域分析	3-48
2.15 电路的灵敏度函数	3-19	7.1 电路的过渡响应和拉普拉斯变换	3-48
2.16 LC 电路的储存能量	3-20	7.2 信号的时间域分析	3-53
2.17 输入阻抗间的从属关系	3-21	第8章 时变电路和非线性电路	3-60
第3章 非正弦波交流	3-21	8.1 时变电路	3-60
3.1 非正弦波的表示	3-21	8.2 非线性电路	3-61
3.2 付里叶级数	3-21	参考文献	3-64

第1章 电路基础和交流电路

1.1 电路基本量的定义

在电路方面所使用的基本量是电压 v 和电流 i ，并采用伏特(V)、安培(A)作为各自的单位。电路中两点间的电位差称为电压。在电路的支路中，电荷 q (Q)对时间的变化率 dq/dt 为电流。在单位方面， $(A) = (Q/s)$ 的关系成立。

根据电位差的定义，在电路中沿着连接的支路所组成的回路取电压的总和，其结果当然为零。此外，因为电流是连续的，所以在电路的一个节点上流进去的电流总和与流出来的电流总和是相等的。因此，若取流进去的电流为正、流出来的电流为负，就可以表作 $\sum i_j = 0$ 。这个电压平衡与电流连续的关系被称为基尔霍夫定律，乃是电路的基本定律(见2.1节)。

电压 v 、电流 i 一般是作为时间 t 的函数而被使用的量，时间函数 $v(t)$ 和 $i(t)$ 常称之为波形。在时间上恒定不变的量称为直流(DC)。就是说，大小和方向都不随时间变化的电压和电流叫做直流电压和直流电流。随时间按正弦波变化的电压和电流称为交流(AC)，并且分别称为交流电压和交流电流。由正弦波畸变而成的周期性波形是作为非正弦波处理的(见第三章)。使用于脉冲波形的电路称为脉冲电路。

在电路的支路中，当给出支路两端的电压 v 和在其中流通的电流 i 时，该支路的功率 P 为：

$$P(t) = v(t) i(t)$$

功率的单位是瓦特(W)；当电压和电流为具有周期 T 的波形时，则对时间的平均值便为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (W)$$

并把 P 称为平均功率，而把 $P(t)$ 称为瞬时功率。有时也把这个平均功率称为有功功率，或简称为功率。

1.2 电路元件

两个端钮的电路元件叫做二端元件。在二端线

性元件方面，有电阻 R 、电感 L 以及电容 C 。当电压和电流成正比、欧姆定律成立时，该比例系数就是电阻。

$$v = Ri, \quad R = v/i \quad (\Omega)$$

在电压用(V)、电流用(A)表示时，电阻 R 的单位用欧姆(Ω)来表示。把这个电压、电流倒过来表示，使其成为下列形式时：

$$i = Gv, \quad G = i/v = 1/R \quad (S)$$

则称 G 为电导，它的单位是西门子(S)，是电阻的倒数。

在磁通 Φ 正比于电流 i 的电路元件中，有：

$$\Phi = Li, \quad L = \Phi/i \quad (H)$$

这个比例系数 L 叫做电感，它的单位是亨利(H)。电感 L 上的电压 v_L 是在电流随时间变化时产生的，即为：

$$v_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2\Phi}{dt^2}$$

电感 L 可以认为是对电流变化的惯性，起着阻碍电流变化的作用。

在电荷 Q 正比于电压 v 的电路元件中，有：

$$Q = Cv, \quad C = Q/v \quad (F)$$

这个比例系数 C 叫做电容，它的单位是法拉(F)。当电容 C 两端的电压随时间变化时，在此电容中便有电流 i_C 流通，且此电流为：

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

电容 C 可以认为是对电压变化的惯性，起着阻碍电压变化的作用。

电感 L 上的电压 v_L 和电容 C 中通过的电流 i_C 在时间上是连续的。并且，由 L 、 R 、 C 构成的电路是互易电路； L 、 R 、 C 全都不是负值时的电路是无源电路。

作为非线性二端元件，有电阻性的、电感性的、电容性的，可分别表示如下：

$$v = f(i), \quad \Phi = \varphi(i), \quad Q = \xi(v)$$

在电阻性的非线性二端元件中，就电压和电流特性来说可分为：不论是从电压还是从电流来看都是单

值函数的特性;从电压来看是单值函数而从电流来看却是多值函数的特性;从电流来看是单值函数而从电压来看却是多值函数的特性。据此,分别把它们称为一对非线性、电压控制型非线性以及电流控制型非线性等。

1.3 正弦波交流

在电压和电流随时间变化的波形中,最基本的的是如图1所示的正弦波交流。正弦波交流可由下式表示:

$$i = I_m \sin(\omega t - \phi), \quad \omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

式中 I_m : 振幅=最大值(A); ω : 角速度=角频率(rad/s); f : 频率(Hz); T : 周期(s); ϕ : 相位角(rad)。

为了表示交流电压、电流的大小,可用最大值、平均值、有效值等等,但在工程上使用有效值。在正弦波交流中:

$$\text{有效值} = (\text{最大值}) / \sqrt{2} = I_m / \sqrt{2}$$

具有同频率的两正弦波的相位之差叫做相位差。例如在

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \phi_2)$$

的两个电流中,根据 $\phi_1 - \phi_2$ 的正负,而称 i_1 比 i_2 在相位上超前或者滞后 $|\phi_1 - \phi_2|$ 。 $\phi_1 = \phi_2$ 时称为同相。 $|\phi_1 - \phi_2|$ 称为相位差。

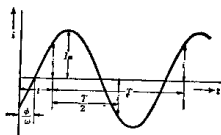


图1 正弦波交流

施加有效值为 V 的正弦波电压 $v = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \phi)$ (V)、流过有效值为 I 的正弦波电流 $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \phi - \varphi)$ (A) 时,其功率为:

瞬时功率

$$p = vi = VI \cos \varphi - VI \cos$$

$$\{2(\omega t + \phi) - \varphi\} \quad (\text{VA})$$

平均功率 (有功功率)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = VI \cos \varphi \quad (\text{W})$$

视在功率 $= VI$ (VA)

无功功率 $= -VI \sin \varphi$ (var)

此处 $\cos \varphi$ 称为功率因数, $\sin \varphi$ 称为无功功率因数。

1.4 矢量表示(复数表示)⁽²⁾

1.4.1 指数函数表示 对某一电路施加电压 $v = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \phi)$ 时有电流 $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \phi - \varphi)$ 流通,可以看做是施加电压 $v = \sqrt{2} V e^{j(\omega t + \phi)}$ 时有电流 $i = \sqrt{2} I e^{j(\omega t + \phi - \varphi)}$ 流通。

1.4.2 矢量表示 $A + jB$ 在图2中, $t = 0$ 时刻用 OA_0 和 OB_0 表示, $t = t_1$ 时刻用 OA_1 和 OB_1 表示。电压 $v = \sqrt{2} V e^{j(\omega t + \phi)}$ 和电流 $i = \sqrt{2} I e^{j(\omega t + \phi - \varphi)}$ 是以一定角速度 ω 旋转的矢量;它们的比值为 $OA_0/OB_0 = OA_1/OB_1 = V/I e^{j\varphi} = Z$, Z 与时间 t 无关。

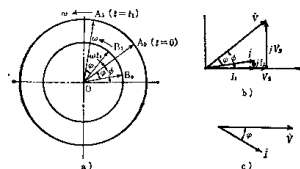


图2 电压、电流的旋转矢量

实际上,由于只要知道电压和电流的相互关系就可以了,所以便把 $e^{j\omega t}$ 省去,并且使用各自的有效值;假若在符号上采用 $\dot{V} = V e^{j\phi}$ 和 $\dot{I} = I e^{j(\phi - \varphi)}$, 则电压和电流便可利用下列复数形式来表示,因而就可以象图2(b)那样用静止的矢量来表示。

$$\dot{V} = V e^{j\phi} = V_1 + jV_2$$

$$\dot{I} = I e^{j(\phi - \varphi)} = I_1 + jI_2$$

而且,这时若以电压为参考矢量,则矢量图如图2(c)所示。

再有,如上所述,在 $\dot{V}$ 和 $\dot{I}$ 中省去了 $e^{j\omega t}$, 因此若对它们取时间 t 的微分或积分,应有:

① ベクトル(Vector) 这里译为矢量,但须注意它代表正弦时间函数,例如正弦交流电压和正弦交流电流等。此处的矢量与通常所说的空间矢量是有区别的,许多「电工原理」的教科书上把表示正弦时间函数的矢量称为相量。——译者注

② 此处 $\dot{I}$ 并非 $I e^{j(\phi - \varphi)}$ 之意,而是指 $I e^{j(\omega t + \phi - \varphi)}$ 之意。——译者注

$$\frac{d\dot{I}}{dt} = j\omega \dot{I}, \quad \int \dot{I} dt = \frac{\dot{I}}{j\omega}$$

1.4.3 阻抗 在电路中施加电压矢量 $\dot{V}$ 、流过电流矢量为 $\dot{I}$ 时, $\dot{V}/\dot{I} = Z$ 叫做该电路的阻抗。 Z 一般是复数, 而且用

$$Z = R + jX$$

的形式表示, R 是这个阻抗的电阻分量, X 是其电抗分量(图3)。阻抗 Z 的大小为 $|Z|$, φ 叫做阻抗角, $\cos \varphi$ 叫做功率因数。

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \tan \varphi = X/R$$

$$\cos \varphi = R/|Z|.$$

图4那样的电感 L 、电阻 R 、电容 C 的串联电路的阻抗 Z 为:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (\Omega)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

ωL 叫做电感电抗, $1/\omega C$ 叫做电容电抗, φ 为电压和电流的相位差。

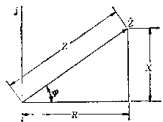


图3 向量阻抗

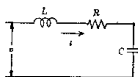


图4 LRC串联电路

1.4.4 导纳 在电路中流过电流 $\dot{I}$ 时, 设在通电流的端点间出现的电压为 $\dot{V}$ 时, 则 $\dot{I}/\dot{V} = Y$ 称为此电路的导纳, 它是阻抗的倒数。 Y 一般用复数来表示:

$$Y = G + jB \quad (S)$$

式中, G 称为电导, B 称为电纳。

$$Y = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

如图5所示, 电感 L 、电阻 R (电导 $G = \frac{1}{R}$) 以

及电容 C 并联电路的导纳为:

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

式中, ωC 称为电容电纳, $\frac{1}{\omega L}$ 称为电感电纳。

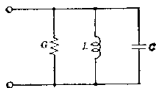


图5 GLC并联电路

1.4.5 电功率的复数表示 作为电功率的复数表示, 是用电压 $\dot{V}$ 的共轭复数 $\overline{\dot{V}}$ 和 $\dot{I}$ 的乘积来表示的, 这个乘积的实部表示有功功率, 虚部表示无功功率。有时也把这样的电功率的复数表示称为电功率复数。

$$\dot{P} = \overline{\dot{V}} \dot{I} = |\dot{V}| |\dot{I}| \cos \varphi - j |\dot{V}| |\dot{I}| \sin \varphi$$

$$= P_a + jP_r$$

若用阻抗 Z 和电流 I 来表示这个复功率, 则有:

$$\dot{P} = \overline{Z} |\dot{I}|^2 = R |\dot{I}|^2 - jX |\dot{I}|^2$$

此外, 若用导纳 Y 和电压 $\dot{V}$ 来表示的话, 则有:

$$\dot{P} = Y |\dot{V}|^2 = G |\dot{V}|^2 + jB |\dot{V}|^2$$

有功功率 P_a 和无功功率 P_r 为:

$$P_a = |\dot{V}| |\dot{I}| \cos \varphi = R |\dot{I}|^2 = G |\dot{V}|^2$$

$$P_r = -|\dot{V}| |\dot{I}| \sin \varphi = -X |\dot{I}|^2 = B |\dot{V}|^2$$

因此, 在电路中由于施加电压 $\dot{V}$ 而有电流 $\dot{I}$ 流通, 若这时的电功率和无功功率各为 P_a 和 P_r 时, 则称 $P_a/|\dot{I}|^2$ 为有效电阻, $-P_r/|\dot{I}|^2$ 为有效电抗, $P_a/|\dot{V}|^2$ 为有效电导, $P_r/|\dot{V}|^2$ 为有效电纳。

1.5 各种电路

1.5.1 串联和并联电路 几个阻抗 $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ 在串联联接情况下的合成阻抗 Z 为:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = \sum_n Z_n$$

而合成的导纳 Y 为:

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \dots + \frac{1}{Y_n} = \sum_n \frac{1}{Y_n} \ominus$$

并联联接情况下的合成阻抗 Z 为:

$$\ominus \text{ 原书误为 } \sum_n Z_n. \text{ ——译者注}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} = \sum_n \frac{1}{Z_n}$$

合成的导纳 Y 为:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = \sum_n Y_n$$

1.5.2 互感耦合电路 初级电路和次级电路用变压器耦合起来的,如图6所示的互感耦合电路,可以得到如图7所示的等值电路。在此电路中,从初级所看到的阻抗 Z 为:

$$Z = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}$$

作为表示初次级电路间耦合程度的量,如下式所示的 k 称为耦合系数:

$$k = M / \sqrt{L_1 L_2}$$

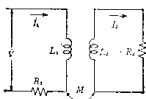


图6 互感耦合电路

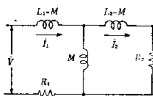


图7 等值电路

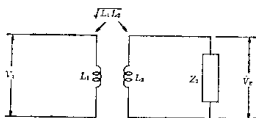


图8 理想变压器

在变压器中,如线圈的直流电阻为零,没有涡流损失,也没有磁滞损失,且漏电感为零,自感无限大,这样的理想器件称为理想变压器。也就是,若初级和次级电路的直流电阻分别为 R_1 、 R_2 , 它们的自感分别为 L_1 、 L_2 , 耦合系数为 k (图8), 则:

$$R_1 = R_2 = 0, \quad |k| = 1, \quad L_1 = L_2 = \infty$$

(但 L_1/L_2 是有限的)

在理想变压器的次级接上阻抗为 Z_2 的负载时,从初级所看到的阻抗 (Z_1) 为:

$$Z_1 = (L_1/L_2) Z_2$$

电压比等于匝数比 n_1/n_2 , 电流比等于匝数比的倒数, 而阻抗比等于匝数比的平方:

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}$$

1.5.3 桥式电路 所谓桥式电路,即如图9所示的电路,其中D是诸如检流计等的检测器。当D中的电流为零时,表明达到了桥式电路的平衡。把达到平衡的条件称为此电路的平衡条件。在ab间施加电压 $\dot{E}$ 时,假定电流如图所示那样流通,则各电流为:

$$\dot{I}_1 = \dot{E} \frac{Z_2(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_1 Z_5}{\Delta}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_2 Z_5}{\Delta}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{E} \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{\Delta}$$

式中

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & 0 & -Z_5 \\ 0 & Z_2 + Z_4 & Z_5 \\ Z_1 & -Z_2 & Z_5 \end{vmatrix}$$

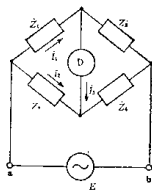


图9 桥式电路

⊖ 式中 Z_5 表示图上检流计D的复阻抗。——译者注

⊖ 原文误为 $Z_2 + Z_3$ 。——译者注

表1 桥式电路和平衡条件

	$\frac{R_4}{R_3} + \frac{C_3}{C_4} = \frac{R_2}{R_1}$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{R_3 R_4 C_3 C_4}}$		$R_1 = \frac{1}{R_4} \left(R_2 R_3 - \frac{L_4}{C_1} \right)$ $\omega = \sqrt{\frac{R_4}{L_4 C_1}} \sqrt{\frac{R_1}{R_2 R_3 - \frac{L_4}{C_1}}}$
	$R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$ $L_4 = \frac{1}{\omega^2 C_4}$		$R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$ $L_4 = \frac{R_2}{R_1} L_3$
	$R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$ $C_4 = \frac{R_1}{R_2} C_3$		$C_4 = \frac{R_2}{R_1} C_3$ $R_4 = \frac{C_1}{C_2} R_3$
	$R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$ $C_4 = \frac{L_1}{R_1 R_3}$		$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}$ $L_4 = C_1 \{ r_1 (R_2 + R_4) + R_2 R_3 \}$
	$R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$ $C_4 = \frac{C_3}{R_2 R_3} \times \{ r_2 (R_1 + R_3) + R_1 R_3 \}$		$R_1 = \frac{R_2 (R_3 + r_1)}{R_4}$ $L_1 = \frac{C R_2 R_3 (r_1 + R_4)}{R_4}$
	$R_4 = \frac{R_2}{R_1} R_3$ $L_4 = \frac{R_2}{R_1} L_3 + M \left(\frac{R_3}{R_1} + 1 \right)$		$C_4 = \frac{M}{R_2 R_3}$ $L_1 = M \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right)$ $R_4 = \frac{L_1 - M}{M} R_3$
	$R_4 = \frac{\omega^2}{R_1} (L_1 L_4 - M^2)$ $M R_5 = R_4 L_1 + R_1 L_4$		$R_1 = \frac{R_2}{R_4} R_3$ $L = C \frac{R_2}{R_4} \times \{ (R_3 + r_2) R_3 + R_3 R_4 + R_3 r_1 + R_4 r_2 - R_2 R_3 \}$

从而可使 $I_3 = 0$, 即电路平衡的条件为

$$Z_2 Z_3 = Z_1 Z_4, \text{ 或 } Z_1/Z_2 = Z_3/Z_4$$

表 1 列出了桥式电路的例子, 可对平衡条件有一个大概的了解。

1.5.4 定电阻电路 在图 10 的电路中, 当 Z_1 和 Z_2 互为反演时, 则二端阻抗 Z 为一定值。也就是, 若 $Z_1 Z_2 = R^2$, 则 $Z = R$ 。

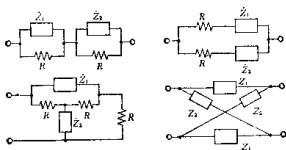


图 10 定电阻电路

1.6 矢量轨迹

若电路状态按一定条件变化, 则电压、电流、阻抗等的矢量也要跟着一起变化。这时, 矢量末端所描出的图形称为矢量轨迹。最普通的图形是圆(圆线图)和直线, 而且多属于下面的例子:

(1) 两矢量 $\dot{Z}$ 、 $\dot{W}$ 间有下列关系:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{A}\dot{W} + \dot{B}}{\dot{C}\dot{W} + \dot{D}} = \frac{\dot{A}}{\dot{C}} + \frac{\dot{B}\dot{C} - \dot{A}\dot{D}}{\dot{C}^2} \cdot \frac{1}{\dot{W} + \dot{D}/\dot{C}}$$

在 $\dot{W} = \dot{W}_c + re^{j\theta}$ 以 θ 为变量而描画出圆的情况下(图 11), Z 成为:

$$\dot{Z} = ae^{j\alpha} + be^{j\beta} \left(\frac{c}{c^2 - r^2} e^{-j\gamma} + \frac{r}{c^2 - r^2} e^{j\theta'} \right)$$

式中

$$\frac{\dot{A}}{\dot{C}} = ae^{j\alpha}, \quad \frac{\dot{B}\dot{C} - \dot{A}\dot{D}}{\dot{C}^2} = be^{j\beta}, \quad \dot{W}_c + \frac{\dot{D}}{\dot{C}} = ce^{j\gamma}$$

画出以 θ' 为变量的圆, 它的圆心位置和半径如下(图 12):

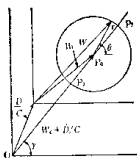
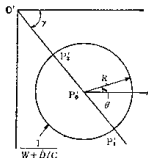
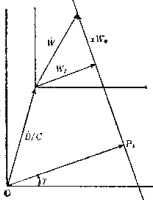
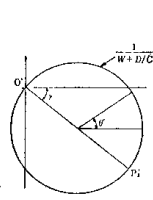
$$Z_c = ae^{j\alpha} + \{bc/(c^2 - r^2)\}e^{j(\beta - \gamma)}$$

$$R = br/(c^2 - r^2)$$

(2) 设 $\dot{W}_p$ 、 $\dot{W}_q$ 为互成直角的矢量, 并设 x 为变量, 在 $\dot{W}$ 描出 $\dot{W} = \dot{W}_p + x\dot{W}_q$ 的直线情况下(图 13), 自原点 O 连接的垂线为:

$$OP_1 = ae^{j\alpha} + be^{j\beta} \{ (1/2c) e^{-j\gamma} + (1/2c) e^{j\theta'} \}$$

画出以 θ' 为变量的圆, 如图 14 所示, 其圆心位置

图 11 $\dot{W} + \dot{D}/\dot{C}$ 的矢量图图 12 $\dot{Z}$ 的矢量轨迹图 13 $\dot{W} + \dot{D}/\dot{C}$ 的矢量图图 14 $\dot{Z}$ 的矢量轨迹

和半径分别如下:

$$\text{圆心位置: } Z = ae^{j\alpha} + \frac{b}{2c} e^{j(\beta - \gamma)}$$

$$\text{半径: } R = b/2c$$

1.7 谐振电路

1.7.1 串联谐振电路 当 LRC 串联电路被称为串联谐振电路时(图 15), 该电路的谐振频率 f_0 为:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振电路的品质因数 Q 为:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \frac{L}{\sqrt{C}} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

此处 f_2 、 f_1 为电流降至 $\omega = \omega_0$ 时的最大电流 $I_0 = E/R$ 的 $1/\sqrt{2}$ 时的频率。而且在谐振时, L 或 C 上的电压 $|E_L|$ 或 $|E_C|$ 为电源电压的 Q 倍。有时也把这个 Q 称为选择度。此串联谐振电路的电流有效值 $|I|$ 和最大电流 I_0 的比为:

$$\frac{|I|}{I_0} = \frac{R}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

以 Q 为参数, 若把频率特性用图形来表示, 则如图 16 那样。此曲线称为谐振曲线。使电源电压 E 一定, 若以 Q 为参数, 描绘出电流有效值 I 的频率特性, 则如图 17 那样。

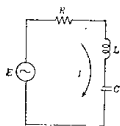


图15 串联谐振电路

此电路的阻抗 Z 的辐角 φ 为:

$$\varphi = \tan^{-1} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

若以 Q 为参数, 描绘辐角 φ 的频率特性, 则如图 18 那样。

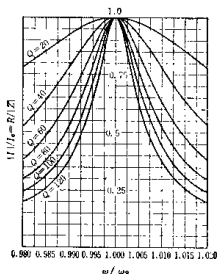
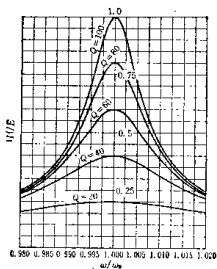
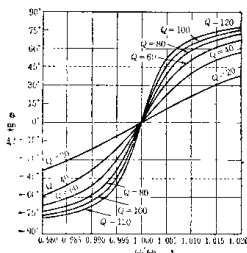


图16 归一化的谐振曲线


 图17 $|Z|$ 的频率特性

 图18 φ 的频率特性

1.7.2 并联谐振电路 因为 LGC 并联电路是 LRC 串联电路的对偶电路, 所以象图 19 那样施加电流源 $\dot{I}$ 时的电压 V 的频率特性, 和 LRC 串联电路施加电压源时的电流 $\dot{I}$ 的频率特性完全相同。

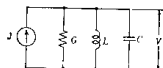


图19 并联谐振电路

这时 Q 为:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G}$$

在谐振情况下, L 或 C 中流过的电流有效值 $|I_L|$ 、 $|I_C|$ 为电流源 I 的 Q 倍。

如图 20 所示的由 LR 串联电路和 C 并联而成的电路, 在 $\sqrt{L/C}/R$ 非常大的时候, 可近似等值于 LGC 并联电路。

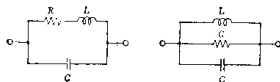


图20 串并联电路

也就是在 $\frac{1}{R} \sqrt{L/C} \gg 1$ 时, $G = RC/L$ 。

这个电路的导纳 Y 为:

$$Y = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L}$$

这个 $Y^{-1} = Z$ 的轨迹如图 21 所示, 在 $R^2 C/L$

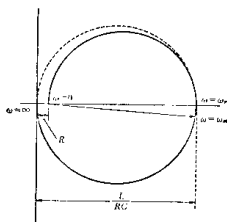


图21 矢量轨迹

很小的时候近似于圆, 近似 LGC 并联电路的 Z 的矢量轨迹。这个电路的 Q 为:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

式中

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

假若这个电抗为零的角频率为 ω_r , 则:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

当这个电路加上电流源、电压为最大时的角频率 ω_m (它和加上电压源、电流为最小时的角频率相同) 为:

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 + 2 \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q}}$$

1.7.3 耦合谐振电路^① 在图 22 的感应耦合谐振电路中:

$$\frac{\dot{I}_1}{E} = \frac{1}{Z_1} = \frac{j\omega \times}{R_1 R_1 \left\{ 1 + j \frac{\omega_1 L_1}{R_1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} \right) \right\} \times \frac{\times M}{\times \left\{ 1 + j \frac{\omega_2 L_2}{R_2} \left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega} \right) \right\} + \omega^2 M^2}}$$

在图 23 的电容耦合的谐振电路中:

$$\frac{\dot{I}_1}{j} = \frac{1}{Y_1} = \frac{j\omega \times}{G_1 G_1 \left\{ 1 + j \frac{\omega_1 C_1}{G_1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} \right) \right\} \times \frac{\times C_2}{\times \left\{ 1 + j \frac{\omega_2 C_2}{G_2} \left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega} \right) \right\} + \omega^2 C_2^2}}$$

若在感应耦合的谐振电路中设:

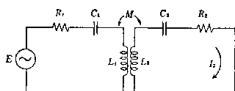


图22 感应耦合的谐振电路

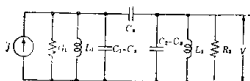


图23 电容耦合的谐振电路

$$Q_1 = \frac{\omega_1 L_1}{R_1}, \quad Q_2 = \frac{\omega_2 L_2}{R_2},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad k = \frac{M}{L_1 L_2}$$

在电容耦合的谐振电路中设:

$$Q_1 = \frac{\omega_1 C_1}{G_1}, \quad Q_2 = \frac{\omega_2 C_2}{G_2},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad k = \frac{C_1}{C_1 C_2}$$

则 Z_1 和 Y_1 可用完全相同的数学公式来表示。

此处, 若令 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, 则:

$$\frac{Z_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{Y_1}{\sqrt{G_1 G_2}} = \frac{\left\{ 1 + jQ_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right\} \left\{ 1 + jQ_2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right\}}{jk\sqrt{Q_1 Q_2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$+ \frac{k^2 Q_1 Q_2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}{jk\sqrt{Q_1 Q_2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

在中心频率 $\omega = \omega_0$ 时,

$$(Z_1)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{j} \sqrt{R_1 R_2} \left(\frac{1}{kQ} + kQ \right)$$

$$(Y_1)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{j} \sqrt{G_1 G_2} \left(\frac{1}{kQ} + kQ \right)$$

式中 $Q = \sqrt{Q_1 Q_2}$,

因而根据 kQ 的值可分类如下:

① 原书在 $\frac{\dot{I}_1}{j}$ 和 $\frac{\dot{I}_2}{E}$ 的公式中有误, 且在文字说明上也

有遗漏, 此处已作了更正。——译者注

(1) 单峰特性 (松耦合)

$$kQ < 1, \text{ 即 } k < \frac{1}{Q}.$$

(2) 平坦特性 (临界耦合)

$$kQ = 1, \text{ 即 } k = \frac{1}{Q}.$$

(3) 双峰特性 (紧耦合)

$$kQ > 1, \text{ 即 } k > \frac{1}{Q}.$$

1.8 电抗电路^{(8)~(15)}

1.8.1 电抗定理 在只由电抗元件构成的网络中选择任意的两个端子, 把由此两端看进去的阻抗考虑为频率的函数, 则电抗网络两端的阻抗 Z 是 $s = j\omega$ 的正实系数有理奇函数。反之, 为了使 Z 的正实系数有理奇函数 $Z(s)$ 成为电抗两端网络的阻抗, 其充分必要条件是:

(i) $Z(s)$ 的极点和零点都是单根, 且它们在虚轴上是交替存在的。

(ii) 在 $Z(s)$ 的极点上的留数是正实数。

(iii) 在 $Z(s)$ 的零点上, $dZ(s)/ds$ 是正实数而不是0。

这个定理称为福斯特 (Foster) 电抗定理⁽¹⁵⁾。

$Z(s)$ 可用下列形式表示:

$$Z(s) = \frac{H(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \cdots (s^2 + \omega_{2n-1}^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \cdots (s^2 + \omega_{2n-2}^2)}$$

$$0 \leq \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1} \leq \infty$$

$$H > 0$$

ω_{2n-1} 表示谐振角频率, ω_{2n-2} 表示反谐振角频率。在 $Z(\infty) = 0$ 的情况下, 取 $\omega_1 = 0$; 在 $Z(\infty) = \infty$ 的情况下, 取 $\omega_{2n-1} = \infty$ 。

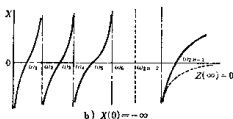
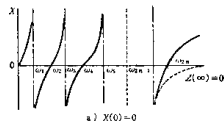


图24 $X(\omega)$ 的频率特性

的情况下, 必须去掉 $(s^2 + \omega_{2n-1}^2)$ 的项。在极点以外, dZ/ds 为正实数, 对于 $\omega \geq 0$, $Z(j\omega)$ 是纯虚数, 它的纯虚数值即电抗 $X(\omega)$ 的频率特性, 如图24所示。

1.8.2 根据并联谐振电路的串联连接所得的合成法

把 $Z(s)$ 展开成部分分式:

$$Z(s) = s \left\{ \frac{A_0}{s^2} + \frac{A_2}{s^2 + \omega_2^2} + \frac{A_4}{s^2 + \omega_4^2} + \cdots + \frac{A_{2n-2}}{s^2 + \omega_{2n-2}^2} + A_m \right\}$$

$$A_k = \left[s^2 + \omega_k^2 \frac{Z(s)}{s} \right]_{s=j\omega_k} \geq 0, \quad A_m = H$$

$$(k = 0, 2, 4, \cdots, 2n-2)$$

则 $Z(s)$ 一般可按图25的并联谐振电路的串联连接来实现。

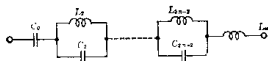


图25 并联谐振电路的串联连接

其元件值各为:

$$C_k = A_k^{-1}, \quad L_k = (C_k \omega_k^2)^{-1}, \quad L_m = H$$

$$(k = 0, 2, 4, \cdots, 2n-2)$$

1.8.3 根据串联谐振电路的并联连接所得的合成法

若把 $Z(s)$ 的倒数展开成部分分式, 则有:

$$\frac{1}{Z(s)} = s \left\{ \frac{B_1}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3}{s^2 + \omega_3^2} + \frac{B_5}{s^2 + \omega_5^2} + \cdots + \frac{B_{2n-1}}{s^2 + \omega_{2n-1}^2} \right\}$$

$$B_k = \left[\frac{s^2 + \omega_k^2}{s} \frac{1}{Z(s)} \right]_{s=j\omega_k}$$

$$(k = 1, 3, 5, \cdots, 2n-1)$$

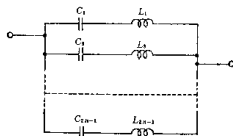


图26 串联谐振电路的并联连接

因而, 可以按图26的串联谐振电路的并联连接来实现。其元件值如下:

$$L_k = B_k^{-1}, \quad C_k = (L_k \omega_k^2)^{-1}$$

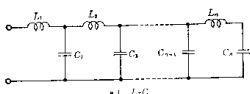
$$(k=1, 3, 5, \dots, 2n-1)$$

1.8.4 根据梯形电路的合成法⁽¹⁾ 若把 $Z(s)$ 写成连分式来表示, 则得:

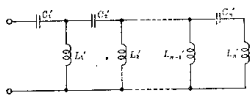
$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{C_2 s + \dots \frac{1}{L_n s + \frac{1}{C_n s}}}}}$$

因而可按图 27(a) 那样的梯形电路来合成。又因 $Z(s)$ 可以变形为如下连分式, 所以就能象图 27(b) 那样来实现。

$$Z(s) = (C'_1 s)^{-1} + \frac{1}{(L'_1 s)^{-1} + \frac{1}{(C'_2 s)^{-1} + \frac{1}{(L'_2 s)^{-1} + \dots \frac{1}{(C'_n s)^{-1} + \frac{1}{(L'_n s)^{-1}}}}}$$



a) L-C



b) C-L

图 27 梯形电路

1.9 LR和RC电路⁽²⁾

1.9.1 LR二端网络的阻抗 在由电感 L 和电阻 R 组成的电网络的任意两端上的二端网络阻抗 $Z(s)$, 是 s 的正实系数有理函数。 $Z(s)$ 可表示为:

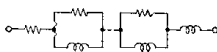
$$Z(s) = H \frac{(s-s_1)(s-s_3)\dots(s-s_{2n-1})}{(s-s_2)(s-s_4)\dots(s-s_{2n})}$$

$Z(s)$ 的零点和极点全都是负实数, 即:

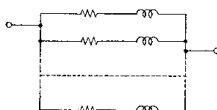
$$0 \geq s_1 \geq s_2 > \dots > s_{2n-2} > s_{2n-1} \geq -\infty$$

若把 $Z(s)$ 分解为部分分式, 则可按图 28(a) 中所示电路来实现; 若把 $\{Z(s)\}^{-1}$ 分解为部分分式, 则可按图 28(b) 所示电路来实现; 此外, 若

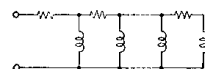
把 $Z(s)$ 展开成连分式, 则可按图 28(c)、(d) 所示电路来实现。



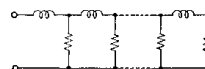
a) L-R 并联电路的串联连接



b) L-R 串联电路的并联连接



c) R-L 梯形电路

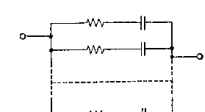


d) L-R 梯形电路

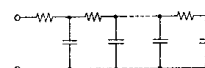
图 28



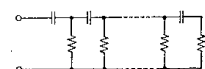
a) R-C 并联电路的串联连接



b) R-C 串联电路的并联连接



c) R-C 梯形电路



d) C-R 梯形电路

图 29

1.9.2 RC 二端网络的阻抗 由电阻 R 和电容 C 组成的电网络,从其任意两端看进去的阻抗 $Z(s)$ 为:

$$Z(s) = H \frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n-1})}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n-2})}$$

s_k 为实数,具有下列关系:

$$0 \geq s_2 > s_1 > s_3 > \cdots > s_{2n-1} > s_{2n-2} > \cdots > -\infty$$

若把 $Z(s)$ 分解为部分分式,则可按图29(a)的电路来实现;若把 $\{Z(s)\}^{-1}$ 展开成部分分式,则可按图29(b)的电路来实现;若把 $Z(s)$ 展开成连分式,则可按图29(c)、(d)那样的梯形电路来实现。

1.10 阻抗函数⁽⁷⁾

由 L 、 R 、 C 组成的电网络,若设其阻抗 Z 的

$s (=j\omega)$ 函数为阻抗函数 $Z(s)$,则对于阻抗函数 $Z(s)$ 来说下列定理成立:

定理1 阻抗函数 $Z(s)$ 是正实函数。

定理2 为使 $Z(s)$ 为集中参数的阻抗函数,其必要充分条件为 $Z(s)$ 是有理正实函数。

有理正实函数 $Z(s)$ 定义如下:

(i) $Z(s)$ 为实系数有理函数。

(ii) 对于 $\operatorname{Re}\{s\} > 0$,有 $\operatorname{Re}\{Z(s)\} > 0$ 。

关于有理正实函数的定理:

定理 为使 $Z(s)$ 为有理正实函数,其必要和充分条件为:

(i) $Z(s)$ 在右半平面为正则函数;

(ii) $\operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} \geq 0$;

(iii) 虚轴上的极点是单重的,且该极点的留数为正。

第2章 一般线性电网络

2.1 网络图论^①

由二端元件互联而成的电路称为二端元件电路。作为二端元件,除了 L 、 C 、 R 元件和电源等外,还要考虑有相互作用的二端元件(作为变压器或晶体管等的等值表现形式)。若二端元件电路的端子用点来表示,元件用线段来表示,就可以得到如图30所示的图形;这种图形称为图,是由线段连接各点构成的。图论对于这类图形性质的研究是有效的工具。

在图论中,称点为节点,称线段为支路。象图30(t)所示的那种电路的图,所有的支路都有方向,称为有向图。支路的方向是对应于元件的电流或电压极性的表现。此处则认为支路方向表示电流的极性。在电路理论中起重要作用的图的概念有以下几点:

(a) 通路(path) 由一系列支路经节点连接而成它包括始点和终点两个节点,并在中途不重复通过一个节点。通路具有从始点指向终点的方向。

(b) 连通、不可分离 图中任意两节点间至

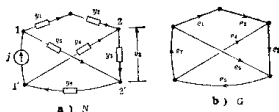


图30 电路 N 及其图 G

少存在着一个通路,这样的图便称为是连通的。图中任意两节点间至少存在着两个非共同的通路,这样的图就称为是不可分离的。图的极大的连通子图称为连通部分,连通部分的个数称为连通数,图的极大的不可分离子图称为不可分离部分,不可分离部分的个数称为不可分离数。

(c) 回路 它是一种始点和终点相重合的通路,具有和通路相一致的方向。

(d) 割集 它是这样一种极小的支路集合,当把它从图中移去时,使图的连通数只增加一个 $\ominus$ 。

① 有关图论中的一些术语,可参见Norman Balaban, Theodore A. Bickart合著的“Electrical Network Theory”(电网络理论)一书第二章有关部分。——译者注

② 原文误为“只减少一个”。——译者注

图的一个的连通部分被割离成两个,并具有从一方指向他方的方向。

(c) 树、补树 不包含回路(割集)且与任意割集(回路)都存在共有支路的支路集合称为树(补树)。在支路集合上,对一个树(补树)的补集合是补树(树)。设图的支路数为 m ,节点数为 n ,连通数为 p ,则树(补树)的支路数是 $p = n - p$ ($\mu = m - p$),这就是所谓图的阶数(圈数)。

(f) 回路矩阵 使电路图中的支路与矩阵的列对应,并使电路图中指定了方向的回路与矩阵的行对应(回路的方向按连支方向指定),且矩阵的第 (i, j) 元素按下述规定,这样所得到的矩阵称为回路矩阵。在对应于第 i 行的回路中含有与第 j 列对应的支路,若它们方向一致(相反)时,则该元素取 $+1(-1)$ 的值;不含有时,则取为零。回路矩阵的各行矢量叫做回路矢量。在实数形式上,线性独立回路矢量的最大集合由 $\mu = m - n + p$ 个矢量构成;把这些矢量作为行的回路矩阵的子矩阵称之为独立回路矩阵。一般的独立回路矩阵的代表例子有如下两种:

(1) 基本回路矩阵 是由对应于恰好只含有一个补树 $\bar{T}$ 中的一个支路的回路(关于 $\bar{T}$ 的基本回路)的全部矢量所构成的矩阵。

(2) 网孔矩阵 这是仅对平面图(见2.5节)才有定义的一个概念,是由对应于可在平面上描绘的图的、具有任意的 μ 个网孔的回路矢量的全体所构成的矩阵。

(g) 割集矩阵 在回路矩阵的定义中,用割集替换回路所定义的矩阵。独立割集矩阵是由 $\rho = n - p$ 行构成的,其代表例有下列两种:

(1) 基本割集矩阵 是由这样的全部矢量所构成的矩阵,其中每个行矢量与只含有一个树 T 中的一个支路的割集相对应(这个割集是关于 T 的基本割集)。

(2) 节点-支路关联矩阵 在图不可分离时,连接在一个节点上的全部支路就成为一个割集。在具有进入节点方向的 n 个割集内,用任意的 $\rho = n - 1$ 个割集作为行矢量的矩阵称为节点-支路关联矩阵。

2.2 电路的基本方程式

就二端元件电路来说,不管元件的种种特性如

何(线性、非线性、时变、常数等等),下列关系都能成立,即所称的基尔霍夫定律⁽¹⁾:

(1) 电流定律 流入各节点的电流的代数和为零。

(2) 电压定律 把各回路的构成支路上的电压沿着回路方向取代数和,其结果为零。

电流定律还具有与(2)相对偶的表达形式(见2.5节)。

(1') 电流定律 把各割集的构成支路的电流沿割集方向取代数和,其结果为零。

依靠点电位的概念,电压定律也可以换成下列所述:

(2') 各支路的电压等于该支路正端点和负端点的点电位之差。

关于基尔霍夫定律和变分原理之间的关系可参考2.7节。

把以电路 N 的电流源的电流值和电压值、电压源的电压值和电流值以及其他元件的电流值和电压值分别作为元素的列矢量,依次设为 i_s, v_s, e, i_r, i, v 。令电路 N 的图的任意独立回路矩阵 B 和独立割集矩阵 C 分别为 $B = [B_1 B_2 B_3]$ 和 $C = [C_1 C_2 C_3]$,并使它们的列的顺序按电流源、电压源、其他元件的次序也和上述诸向量的元素对应于同一顺序。这时有 $B \cdot C^t = 0$ 。

如果是线性电路,则 i 和 v 由 $Y_d \cdot v - i = 0$ 联系起来。 Y_d 是由导纳矩阵的元素构成的矩阵,若电路不含有相互作用的二端元件组,则此矩阵为对角矩阵。把它与基尔霍夫定律(1')、(2)的表达式合并在一起,则有:

$$\begin{bmatrix} 0 & C_s & 0 & C_r \\ B_1 & 0 & -B_2 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_d & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ i_s \\ v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -B_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (1)$$

式(1)是线性电路应该满足的全部条件。它叫做电路的基本方程式。例如,就一般电路来说,假若电源的值已知,要求的是电路中的各支路电压、支路电流,在这方面有2.4节中所用的那些方法,不过结果都是求解线性方程式(1)。

式(1)的系数矩阵是阶数等于 $(2m + \text{电源数})$ 的方阵。当 Y_d 是正定的,在它的各子阵没有特定的代数的从属关系时,那末这个系数矩阵便

是正则的,就是说,为了解答是唯一确定的,其必要和充分条件是:没有只用电流源支路构成的割集、没有只用电压源支路构成的回路。

2.3 网络函数的图论公式

就线性电阻电路而论,发现基本方程式的解答形式与电路图的特定的子图集合有统一的对应关系,并且最先提出称为解的拓扑公式的是基尔霍夫⁽¹⁾。

设不含电源的连通的线性电阻电路(关于用复数表示的LCR电路也相同)为 N ,并设其图为 G 。电路 N 的从端口1-1'到端口2-2'的转移阻抗的图论公式按下述方法给出(当两个端口重合时 Z_{12} 便是二端阻抗)。设对应于 G 的第 k 支路 $e_k(k=1, 2, \dots, m)$ 的元件的导纳为 y_k 。从图的树中去掉一个支路后所剩下的部分叫做2-树。对于 G 的树 t 或者2-树 $t^{(2)}$ 来说,在其中所含的各支路导纳的全部乘积,分别称为 t 或 $t^{(2)}$ 的支路导纳积。 G 的全部树的支路导纳积的总和叫做电路的树支导纳积和,并记为 T_Y 。另一方面,2-树是由两个连通部分构成的,不过两个被指定的节点的子集合 V_α 、 V_β ($V_\alpha \cap V_\beta = \phi$)各自包含在不同的连通部分之中,象这样的全部2-树的支路导纳乘积之和记作 $T_Y[V_\alpha:V_\beta]$ 。这样, Z_{12} 的图论公式为:

$$Z_{12} = \frac{T_Y[\{1, 2\}:\{1', 2'\}] - T_Y[\{1, 2'\}:\{1', 2\}]}{T_Y} \quad (2)$$

给出无源二端口电路的转移阻抗这件事,也就是给出含有一个电源的电路的各部分电流和电压的公式。因而,若使用叠加原理(参考2.8节),就很容易得到含有多个电源的电路的解答。根据这样的考虑,把图论公式(2)作为基础进行电路的分析时,不重复地列举给定图的树和特定的2-树的全部,就成为主要的工作了。在图30(a)的电路中,给定 $v_a = Z_{12} \cdot I$,则 Z_{12} 根据式(2)求之如下:

$$Z_{12} = \frac{y_1 y_2 y_6 - y_4 y_6 (y_1 + y_2) + y_1 y_2 + y_1 y_6 + y_2 y_6}{y_1 y_2 y_6 (y_4 + y_6) + (y_1 y_2 + y_1 y_6 + y_2 y_6)}$$

现在对于含有象变压器等耦合元件的十分一般的线性电路,已经给出诸网络函数的图论公式⁽²⁾。

2.4 电路分析方法

网络函数的图论公式虽然可以认为是直接给出电路基本方程式解的方法,但是在一般情况下,把基本方程式加以变形或分割而进行分阶段求解,这样做看来是合适的并且是有效的,很早以前已采用过各种方法。现在就两端元件电路介绍一些著名的方法。为了说明简单起见,在取作对象的电路 N 和它的图 G 连通方法在内均加上一些限制。但是根据有关电源分布的下列事实,这并不妨碍研究对象范围的一般性。

(1) 即使把任意端子断开而把电压为零的电压源接进去,电路的状态也不会改变;即使在两端子间并联上电流为零的电流源,电路的状态也不会改变。

(2) 当电流源(电压源) $j_1, j_2, \dots, j_\alpha(e_1, e_2, \dots, e_\alpha)$ 构成一个回路 b (割集 c)时,为了使 $j_2 = 0$ ($e_2 = 0$)而把 $j_k(e_k)$ 变为 $j_k + e_{kj_1}(e_k + e_\alpha e_1)$,那对电源部分以外的电路状态也不会有改变($k=2, 3, \dots, \alpha$)。这里,在电流源 j_k (电压源 e_k)的方向与回路 b (割集 c)的方向一致时, e_{kj_1} 取为+1;相反时取为+1。

(3) 把电压源 e 和导纳 y 串联的两端子部分与电流源 $y \cdot e$ 和元件 y 并联的两端子部分相互置换,这对电路其他部分的状态不会有改变(等值电源表示,参考2.12节)。

(4) 割集分析 设在 N 中,电流源支路形成一个树 t_j ,且不存在电压源。

令与 G 的 t_j 有关的基本割集矩阵为 $C = [UC_p]$,其中 U 为单位矩阵。若从基本方程式中消去 v_j 以外的变量,则有:

$$(C_p Y_d C_p^T) \cdot v_j = j \quad (3)$$

由此求出 v_j ,然后再求出其他变量支路电压 $v = C_p^T v_j$ 以及支路电流 $i = -Y_d C_p^T v_j$ 。式(3)称为割集分析方程式。系数矩阵 $Y = C_p Y_d C_p^T$ 称为(原始)割集导纳矩阵。若电路为LCR电路,则该矩阵的第 (i, j) 元素是同属于与树 t_j 有关的第 i 节点和第 j 支路的基本割集的支路导纳之和;在此总和和,对应于两个割集的方向取得是否一致来决定附加+1或-1的符号。

虽然仅仅是本分析方法的特殊情况,但由于使用了点电位的概念以及系数矩阵 Y 和图的对应是简

明的等原因,所以要特别叙述一下称为节点分析的一种常用方法。此处附加了这样一个条件,就是 i_j 是由具有从某一节点 v_r 指向各节点的方向的支路所构成的树(以 v_r 为出发点的星状树)。这样一来, v_j 可以看作是以 v_r 为基准点(点电位为零的点)的点电位矢量。而且,在 LCR 电路中, Y 的第 (i, j) 元素,在 $i = j$ 时是连接 v_i 与 v_r 的支路导纳的总和;在 $i \neq j$ 时则是连接 v_i 和 v_j 的支路导纳的总和和负值。在这种分析中的 Y 特称为节点导纳矩阵。

(b) 回路分析 关于 N , 设电压源支路形成一个补树 $\bar{t}_e$, 而不存在电流源。

设关于 G 的补树 $\bar{t}_e$ 的基本回路矩阵为 $B = [B_p U]$ 。若从基本方程式中消去 i_e 以外的变量, 并令 $Z_d = Y_d^{-1}$, 则有:

$$(B_p Z_d B_p') i_e = e \quad (4)$$

由此求出 i_e , 再求其他的变量 $i = -B_e' i_e$ 和 $v = -Z_d B_e B_p' i_e$ 。式 (4) 被称为回路分析方程式, 系数矩阵 $Z = B_p Z_d B_p'$ 叫做(原始)回路阻抗矩阵。若电路为 LCR 电路, 则其 (i, j) 元素是共属于关于补树 $\bar{t}_e$ 的第 i 和第 j 基本回路的支路阻抗之总和, 对应于两回路方向的是否一致, 而具有 +1 或 -1 的符号。

(c) 混合分析 在电路 N 中作如下的假设。 G 的支路集合 E 可以分割成 $E = E_y \cup E_s$, $E_y \cap E_s = \phi$; 电流源支路在以支路集合为 E_y 的子图 G_y 上并构成树; 电压源支路在子图 G_s 上并构成补树, 而 G_s 则是根据把 E_y 的全部支路都短路而得到的图。在此条件下, 在对应于 G_y 的电路中就能进行割集分析, 令此方程式为 $Y_y \cdot v_y = j$ 。在对应于 G_s 的电路中可以进行回路分析, 令此方程为 $Z_s \cdot i_s = e$ 。还有, 从 G 中将 E_y 电流源以外的全部支路断开, 并使 E_s 电压源以外的全部支路短路, 在由此而得到的图 G' 中, 电流源支路就形成了一个树。令与此树有关的 G' 的基本割集矩阵为 $[UC_p]$ 。这样一来, 在整个电路上

$$\begin{bmatrix} Y_y & -C_p \\ C_p' & Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix} \quad (5)$$

成立。此式称为混合分析方程式。由此求出 v_y, i_s , 然后再求剩下的变量, 这样的步骤与割集分析和回路分析的情况相同。

设定了不含电源的电路 N_0 , 为了分析在 N 。

中施加适当的假想电源的电路 N , 考虑对 N_0 进行分析。在这个立场上, 混合分析包括作为特别情况的割集分析和回路分析在内。让我们来看在各个方法中, 实际必须求解的分析方程式的次数。在割集分析、回路分析中作为 N_0 的阶数 ρ 或者圈数 μ 是唯一确定的。但是, 混合分析的方程式 (5) 的次数却要根据 N_0 的分割 (E_s, E_y) 来确定。对于给定的 N_0 , 决定这个最小值的问题现在已完全解决^[9]。

(d) 状态变量分析 设 N 的电源向量为 u , 要求的输出(各部分的电流、电压)向量为 y 时, 依靠适当选择变量而得到下列形式的分析方程式:

$$\frac{d}{dt} x = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \quad (6)$$

这个方程式(设 u 为输入)叫做状态方程式, x 叫做状态变量。状态方程式在电路的暂态现象等方面的时域分析中是有用的^[10]。

LCR 电路的状态方程式导出如下: 设 N 为满足以下条件的网络。在 N 的图 G 上, 设对应于 L, C 、电流源、电压源的支路集合分别为 E_L, E_C, E_j, E_e 。 E_j 在以 $E_C \cup E_j$ 为支路集合的子图上, 并形成树。 E_e 在把 $E_L \cup E_j$ 以外的全部支路短路后的图上, 并形成补树。根据 E_e, E_j 的分布, G 的全部支路集合 E 的分割 $E = E_s \cup E_y$, $E_s \cap E_y = \phi$ (但 $E_C \subset E_y$, $E_L \subset E_s$), 就能进行混合分析(也就是图 31 的电路)。对这个电路进行混合分析, 令 $x' = [v_j' i_s']$, $u' = [j' e']$, 则得:

$$A_1 \cdot (d/dt x) + B_1 \cdot x = u$$

在图 31 的例中, A_1 和 B_1 如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 + C_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & C_1 + C_3 & 0 \\ -C_3 & 0 & l \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 & 1 \\ -g_2 & g_2 & -1 \\ -1 & 1 & r_3 \end{bmatrix}$$

而且, $x' = (v_1, v_2, i_s)$, $u' = (j_1, j_2, e)$ 。由于 A_1 是正则的, 所以可得所要求的形式为:

$$(d/dt) x = -A_1^{-1} B_1 x + A_1^{-1} u \quad (7)$$

其他任意的变量可用式 (6) 的第二式求得。

在电路不满足最初所述的条件情况下, 除了已经讲过的有关电源分布的办法之外, 还需要在电阻元件中设定多余的变量, 然后消去这些多余变量等

