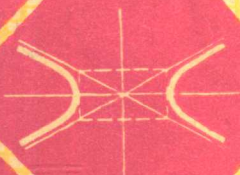


中学数学基础  
ZHONGXUE SHUXUE JICHU

$$y=f(x)$$



33.6

1

2/2

代数 下册  
习题解答  
史素任学

人民教育出版社

中学数学基础

# 代数下册习题解答

史 素 任 学

人民教育出版社

## 内 容 提 要

本书是《中学数学基础》代数下册(1980年6月第一版)的习题解答。为了便于查找,在练习、习题和复习题的标题下和题号前面的括号内列出了原书上的页次。

### 中学数学基础 代数下册习题解答

史 素 任 学

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

文物出版社印刷厂印装

\*

开本  $787 \times 1092$  1/32 印张 4.75 字数 97,000

1980年6月第1版 1981年3月第3次印刷

印数 1,075,001—1,210,000

书号 7012·0121 定价 0.37 元

# 目 录

|                              |                     |
|------------------------------|---------------------|
| <b>第九章 数集</b> .....1         |                     |
| 第一节 集合.....1                 | 第四节 循环小数.....12     |
| 习题(第 10 页).....1             | 习题(第 30 页).....12   |
| 第二节 记数法.....5                | 习题(第 38 页).....14   |
| 习题(第 18 页).....5             | 第五节 实数集合.....15     |
| 第三节 整数的整除性.....8             | 习题(第 51 页).....15   |
| 习题(第 27 页).....8             | 复习题(第 54 页).....18  |
| <b>第十章 矩阵与行列式</b> .....27    |                     |
| 第一节 矩阵.....27                | 习题(第 78 页).....33   |
| 习题(第 63 页).....27            | 第四节 用行列式解线性         |
| 第二节 矩阵的初等变换...30             | 方程组.....37          |
| 习题(第 70 页).....30            | 习题(第 87 页).....37   |
| 第三节 行列式.....33               | 复习题(第 90 页).....41  |
| <b>第十一章 多项式与高次方程</b> .....57 |                     |
| 第一节 一元多项式.....57             | 第三节 多项式的根.....67    |
| 习题(第 104 页).....57           | 习题(第 115 页).....67  |
| 第二节 多项式的既约                   | 第四节 高次方程.....72     |
| 因式分解.....62                  | 习题(第 123 页).....72  |
| 习题(第 108 页).....62           | 复习题(第 127 页).....75 |
| <b>第十二章 排列和组合</b> .....86    |                     |
| 第一节 数学归纳法.....86             | 第三节 组合.....94       |
| 习题(第 132 页).....86           | 习题(第 152 页).....94  |
| 第二节 排列.....90                | 第四节 二项式定理.....97    |
| 习题(第 144 页).....90           | 习题(第 157 页).....97  |

|             |                      |                      |
|-------------|----------------------|----------------------|
| 第五节         | 概率·····100           | 复习题(第 174 页)·····103 |
|             | 习题(第 170 页)··100     |                      |
| <b>第十三章</b> | <b>初等函数</b> ·····120 |                      |
| 第一节         | 函数概念·····120         | 第三节 初等函数的一般          |
|             | 习题(第 193 页)··120     | 概念·····140           |
| 第二节         | 基本初等函数····136        | 习题(第 237 页)··140     |
|             | 习题(第 211 页)··136     |                      |

## 第九章 数 集

### 第一节 集 合

#### 习 题 (第 10 页)

[10] 1. 用特征法表示下列各集合:

$$(1) S = \{1, 4, 9, 16, 25\}, (2) P = \{1, 4, 7, 10, 13\}.$$

答: (1)  $S = \{x^2 | x \text{ 是不大于 } 5 \text{ 的正整数}\},$

$$(2) P = \{3x+1 | x \text{ 是不大于 } 4 \text{ 的非负整数}\}.$$

[11] 2. 写出集合  $A = \{a, b, c\}$  的所有子集合.

答:  $A$  的子集有八个:  $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\},$   
 $\{c, a\}, \{a, b, c\}.$

[11] 3. 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{2, 4, 5\}$ , 下面哪一个是正确的?

$$(1) A \subset B \quad (2) A \subset C \quad (3) B \subset C \quad (4) C \subset A$$

$$(5) C \subset B \quad (6) \phi \subset B \quad (7) B \subset A \quad (8) B = C$$

答: (1) 不正确 (2) 不正确 (3) 不正确 (4) 正确

(5) 不正确 (6) 正确 (7) 正确 (8) 不正确

[11] 4. 设  $D = \{0, 4, 7\}$ , 下面的哪一个是正确的?

$$(1) 4 \in D \quad (2) 4 \subset D \quad (3) 0 \in D \quad (4) \phi \in D$$

$$(5) \phi \subset D \quad (6) 0 \subset D \quad (7) 4 \in \{4\} \quad (8) 0 = \phi$$

答: (1), (3), (5), (7) 是正确的.

[11] 5. 证明:

$$(1) A \cap A = A, A \cup A = A;$$

$$(2) A \cap A' = \phi, A \cup A' = U;$$

$$(3) A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A;$$

$$(4) A \cap U = A, A \cup U = U.$$

证: (1) 设  $\alpha \in A \cap A$ , 则  $\alpha \in A$ , 所以  $A \cap A \subseteq A$ ;

若  $\alpha \in A$ , 则  $\alpha \in A \cap A$ , 所以  $A \subseteq A \cap A$ ;

因此,  $A \cap A = A$ .

又设  $\alpha \in A \cup A$ , 则  $\alpha \in A$ , 所以  $A \cup A \subseteq A$ ;

若  $\alpha \in A$ , 则  $\alpha \in A \cup A$ , 所以  $A \subseteq A \cup A$ .

因此,  $A \cup A = A$ .

(2) 设  $\alpha \in A \cap A'$ , 即  $\alpha \in A$ , 且  $\alpha \in A'$ . 这是不可能的, 因为  $A'$  是  $A$  的补集, 所以  $A \cap A'$  中无元素, 因此,  $A \cap A' = \phi$ .

又设  $\alpha \in A \cap A'$ , 则  $\alpha \in A$  或  $\alpha \in A'$ , 但  $A \subseteq U$ , 且  $A' \subseteq U$ ,

所以  $\alpha \in U$ , 于是  $A \cup A' \subseteq U$ .

若  $\alpha \in U$ , 则  $\alpha \in A$  或  $\alpha \in A'$ . 若  $\alpha \in A$  则  $\alpha \in A'$ , 所以  $\alpha \in A \cup A'$ , 于是  $U \subseteq A \cup A'$ .

$$\therefore A \cup A' = U.$$

(3) 因为  $\phi$  是空集, 所以  $A \cap \phi$  中无元素, 即

$$A \cap \phi = \phi.$$

设  $\alpha \in A \cup \phi$ , 但  $\phi$  中无元素, 所以  $\alpha \in A$ , 故

$$A \cup \phi \subseteq A;$$

又若  $\alpha \in A$ , 同理也有  $\alpha \in A \cup \phi$ , 故  $A \subseteq A \cup \phi$ .

$$\therefore A \cup \phi = A.$$

(4) 设  $\alpha \in A \cap U$ , 则  $\alpha \in A$ , 所以  $A \cap U \subseteq A$ ;

又设  $b \in A$ , 由  $A \subseteq U$ , 所以  $b \in U$ ,  $b \in A \cap U$ ,  
 $A \subseteq A \cap U$ ,

$\therefore A \cap U = A$ .

设  $a \in A \cup U$ , 则  $a \in A$  或  $a \in U$ , 但  $A \subseteq U$ , 所以  
 $a \in U$ ,  $A \cup U \subseteq U$ ;

又设  $b \in U$ , 则  $b \in A \cup U$ , 所以  $U \subseteq A \cup U$ ;  
因而  $A \cup U = U$ .

[11] 6. 证明:

(1)  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cup B = B \cup A$ ;

(2)  $(A \cup B) \cap A = A$ ,  $(A \cap B) \cup A = A$ .

证: (1) 设  $a \in A \cap B$ , 则  $a \in A$  且  $a \in B$ , 所以  $a \in B \cap A$ ,  
 $A \cap B \subseteq B \cap A$ ; 同理可得  $B \cap A \subseteq A \cap B$ ,

$\therefore A \cap B = B \cap A$ .

又设  $a \in A \cup B$ , 则  $a \in A$  或  $a \in B$ , 所以  $a \in B \cup A$ ,  
 $A \cup B \subseteq B \cup A$ ;

同理可得  $B \cup A \subseteq A \cup B$ ,

$\therefore A \cup B = B \cup A$ .

(2) 设  $a \in (A \cup B) \cap A$ , 则  $a \in A$ , 所以  $(A \cup B) \cap A$   
 $\subseteq A$ ; 又设  $b \in A$ , 则  $b \in A \cup B$ , 因而  $b \in (A \cup B)$   
 $\cap A$ . 所以  $A \subseteq (A \cup B) \cap A$ ;

$\therefore (A \cup B) \cap A = A$ .

又设  $a \in (A \cap B) \cup A$ , 则  $a \in A \cap B$  或  $a \in A$ , 所  
以  $(A \cap B) \cup A \subseteq A$ ; 又若  $b \in A$ , 则  $b \in A \cap B$ , 因  
而  $b \in (A \cap B) \cup A$ , 所以  $A \subseteq (A \cap B) \cup A$ ;

$\therefore (A \cap B) \cup A = A$ .

[11] 7. 证明:

$$(1) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(2) \text{ 若 } A \subseteq C, B \subseteq D, \text{ 则 } A \cup B \subseteq C \cup D.$$

证: (1) 设  $a \in (A \cap B)'$ , 则  $a \notin A \cap B$ , 即  $a \notin A$  或  $a \notin B$ , 由  $a \notin A$ , 得  $a \in A'$ , 同理  $a \in B'$ , 所以,  $a \in A' \cup B'$ , 因而  $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$ ;  
又设  $b \in A' \cup B'$ , 则  $b \in A'$  或  $b \in B'$ , 即  $b \notin A$  或  $b \notin B$ , 所以,  $b \notin A \cap B$ , 所以  $b \in (A \cap B)'$ , 因而  $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$ ;

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

(2) 设  $a \in A \cup B$ , 则  $a \in A$  或  $a \in B$ , 当  $a \in A$ , 又  $A \subseteq C$ ,  $\therefore a \in C$ . 当  $a \in B$ , 又  $B \subseteq D$ ,  $\therefore a \in D$ ,  $\therefore a \in C \cup D$ ;

$$\therefore A \cup B \subseteq C \cup D.$$

[11] 8. 证明:

$$(1) (A \setminus B)' = A' \cup B; \quad (2) A \setminus B = A \cap B';$$

$$(3) (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

证: (1) 设  $a \in (A \setminus B)'$ , 则  $a \notin A \setminus B$ ,  $\therefore a \in A'$  或  $a \in B$ , 因而  $a \in A' \cup B$ ,

$$\therefore (A \setminus B)' \subseteq A' \cup B;$$

又设  $b \in A' \cup B$ , 则  $b \in A'$  或  $b \in B$ ,  $\therefore b \notin A$  或  $b \in B$ , 因而  $b \notin A \setminus B$ ,  $\therefore b \in (A \setminus B)'$ ,  $\therefore A' \cup B \subseteq (A \setminus B)'$ ;

$$\therefore (A \setminus B)' = A' \cup B.$$

(2) 设  $a \in A \setminus B$ , 则  $a \in A$  且  $a \in B'$ ,  $\therefore a \in A \cap B'$ ,  $\therefore A \setminus B \subseteq A \cap B'$ ; 又设  $b \in A \cap B'$ , 则  $b \in A$  且  $b \in B'$ , 即  $b \in A$  但  $b \notin B$ ,  $\therefore b \in A \setminus B$ ,  $\therefore A \cap B' \subseteq A \setminus B$ ;

$$\therefore A \setminus B = A \cap B'.$$

(3) 设  $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , 则  $a \in A \setminus B$ , 或  $a \in B \setminus A$ , 即  $a \in A$  但  $a \notin B$ , 或  $a \in B$  但  $a \notin A$ .  $\therefore a \in A \cup B$  且  $a \notin A \cap B$ ,  $\therefore a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

$$\therefore (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

又设  $b \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ , 则  $b \in A \cup B$  但  $b \notin A \cap B$ ,

$\therefore b \in A$  或  $b \in B$ , 但  $b \notin A$  或  $b \notin B$ , 即  $b \in A$  但  $b \notin B$  或  $b \in B$  但  $b \notin A$ ,  $\therefore b \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

$$\therefore (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

由上可知,  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

## 第二节 记 数 法

### 习 题 (第 18 页)

[18] 1. 把下列十进位数换算成二进制数:

(1) 871

(2) 13.57

解: (1)

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 871} \\
 \underline{2 \ 4 \ 3 \ 5} \dots 1 \\
 2 \overline{) 217} \dots 1 \\
 \underline{2 \ 1 \ 0 \ 8} \dots 1 \\
 2 \overline{) 54} \dots 0 \\
 \underline{2 \ 2 \ 7} \dots 0 \\
 2 \overline{) 13} \dots 1 \\
 \underline{2 \ 6} \dots 1 \\
 \underline{2 \ 3} \dots 0 \\
 \underline{2 \ 1} \dots 1 \\
 0 \dots 1
 \end{array}$$

$$\therefore (871)_{10} = (1101100111)_2$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad 2 \overline{) 13} \\
 \underline{2 \overline{) 6} \dots 1} \\
 2 \overline{) 3} \dots 0 \\
 \underline{2 \overline{) 1} \dots 1} \\
 0 \dots 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0. \overline{) 57} \\
 \underline{1 \overline{) 14}} \\
 \underline{0 \overline{) 28}} \\
 \underline{0 \overline{) 56}} \\
 \underline{1 \overline{) 12}} \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\therefore (13.57)_{10} \approx (1101.1001)_2$$

[18] 2. 把下列十进位数换算成八进位数:

(1) 713

(2) 0.277

解: (1)  $8 \overline{) 713}$

$$\begin{array}{r}
 8 \overline{) 713} \\
 \underline{8 \overline{) 89} \dots 1} \\
 8 \overline{) 11} \dots 1 \\
 \underline{8 \overline{) 1} \dots 3} \\
 0 \dots 1
 \end{array}$$

$$\therefore (713)_{10} = (1311)_8$$

(2)  $0. \overline{) 277}$

$$\begin{array}{r}
 0. \overline{) 277} \\
 \underline{2 \overline{) 216}} \\
 1 \overline{) 728} \\
 \underline{5 \overline{) 824}} \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\therefore (0.277)_{10} \approx (0.215)_8$$

[18] 3. 把下列十进位数换算成五进位数:

(1) 1878

(2) 0.32

解: (1)  $5 \overline{) 1878}$

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 1878} \\
 \underline{5 \overline{) 375} \dots 3} \\
 5 \overline{) 75} \dots 0 \\
 \underline{5 \overline{) 15} \dots 0} \\
 5 \overline{) 3} \dots 0 \\
 0 \dots 3
 \end{array}$$

(2)  $0. \overline{) 32}$

$$\begin{array}{r}
 0. \overline{) 32} \\
 \underline{1 \overline{) 60}} \\
 \underline{3 \overline{) 00}} \\
 \underline{0 \overline{) 00}} \\
 \vdots
 \end{array}$$

$$\therefore (1878)_{10} = (30003)_5, \quad \therefore (0.32)_{10} = (0.13)_5.$$

[18] 4. 把 1—3 题算得的数换算成十进位数.

$$\begin{aligned} \text{解: } (1101100111)_2 &= 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 \\ &\quad + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = (871)_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1101.1001)_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-4} \\ &= (13.5625)_{10}, \end{aligned}$$

$$(1311)_8 = 1 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 1 \times 8 + 1 = (713)_{10},$$

$$(0.215)_8 = 2 \times 8^{-1} + 1 \times 8^{-2} + 5 \times 8^{-3} = (0.275)_{10},$$

$$(30003)_5 = 3 \times 5^4 + 3 = (1878)_{10},$$

$$(0.13)_5 = 1 \times 5^{-1} + 3 \times 5^{-2} = (0.32)_{10}.$$

[18] 5. 设  $a = (11110)_2$ ,  $b = (101010)_2$ , 求  $a+b$ ,  $a \times b$ .

解:

$$\begin{array}{r} \phantom{+)} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ +) \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

$$\therefore a+b = (1001000)_2.$$

$$\begin{array}{r} \phantom{\times)} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \times) \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array}$$

$$\therefore a \times b = (10011101100)_2$$

[18] 6. 仿照二进位数加、乘规则表, 写出八进位数的加法与乘法规则表(取 0, 1, 2, ..., 7 为八进数码).

答: 八进位数的加法规则表

| + | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 1 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 10 |
| 2 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 5  | 6  | 7  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 5 | 6  | 7  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 6 | 7  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

八进位数的乘法规则表

| × | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 0 | 2 | 4  | 6  | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 3 | 0 | 3 | 6  | 11 | 14 | 17 | 22 | 25 |
| 4 | 0 | 4 | 10 | 14 | 20 | 24 | 30 | 34 |
| 5 | 0 | 5 | 12 | 17 | 24 | 31 | 36 | 43 |
| 6 | 0 | 6 | 14 | 22 | 30 | 36 | 44 | 52 |
| 7 | 0 | 7 | 16 | 25 | 34 | 43 | 52 | 61 |

### 第三节 整数的整除性

#### 习 题 (第 27 页)

[27] 1. 证明: 若  $a|b$ , 则  $a|bc$ .

证: 因为  $a|b$ , 所以有整数  $q$  使  $b=aq$ , 两边乘以任意整数  $c$ , 得  $bc=aqc$ ,  $qc$  也是整数, 所以  $a|bc$ .

[27] 2. 证明: 若  $a|b, a|c$ , 则  $a|b \pm c$ .

证:  $\because a|b, \therefore b=aq_1$ , 又  $a|c, \therefore c=aq_2$ , ( $q_1, q_2$  为整数), 两式相加, 得  $b+c=a(q_1+q_2)$ ,  $q_1+q_2$  为整数,

$$\therefore a|b+c$$

同理可证  $a|b-c$

(在非负整数集内, 须有  $b>c$  的条件.)

[27] 3. 求(816, 323)和(353430, 530145).

$$\begin{array}{l} \text{解: } \begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 2 \\ & 1 & 7 & 0 & 6 & 4 & 6 & \\ \hline 9 & 1 & 5 & 3 & 1 & 7 & 0 & 1 \\ & 1 & 5 & 3 & 1 & 5 & 3 & \\ \hline & & & 0 & & 1 & 7 & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 353430 & 530145 & 1 \\ & 353430 & 353430 & \\ \hline & 0 & 176715 & \end{array}$$

$$\therefore (816, 323)=17. \quad \therefore (353430, 530145)=176715.$$

[27] 4. 求(64, 512, 216)和(90, 243, 5, 12).

$$\begin{array}{l} \text{解: } \begin{array}{r|rr} 8 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ & 5 & 1 & 2 & & \\ \hline & & & 0 & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ & 1 & 9 & 2 & 4 & 8 & \\ \hline 1 & & 2 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ & & 1 & 6 & 1 & 6 & \\ \hline & & & 8 & & 0 & \end{array}$$

$$\therefore (64, 512, 216)=8.$$

$$\therefore (5, 12)=1, \quad \therefore (90, 243, 5, 12)=1.$$

[27] 5. 求[64, 216]和[720, 675, 500, 450].

$$\begin{array}{l} \text{解: } \begin{array}{r|rr} 2 & 6 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \\ \hline 2 & 8 & 2 & 7 & & \\ 4 & & 2 & 7 & & \end{array} \end{array}$$

$$\text{或 } 64=2^6$$

$$216=2^4 \times 3^3$$

$$\therefore [64, 216]=2^6 \times 3^3=1728.$$

$$\therefore [64, 216]=2^6 \times 3^3=1728$$

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 5 | 720 | 675 | 500 | 450 |
| 5 | 144 | 135 | 100 | 90  |
| 3 | 144 | 27  | 20  | 18  |
| 3 | 48  | 9   | 20  | 6   |
| 2 | 16  | 3   | 20  | 2   |
| 2 | 8   | 3   | 10  | 1   |
|   | 4   | 3   | 5   | 1   |

$$\therefore [720, 675, 500, 450] = 2^4 \times 3^3 \times 5^3 = 54000$$

或

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$675 = 3^3 \times 5^2$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\therefore [720, 675, 500, 450] = 2^4 \times 3^3 \times 5^3 = 54000$$

[27] 6. 证明:

(1) 两个相邻的奇数必互素.

(2)  $a$  是大于 3 的素数, 则  $24 | a^2 - 1$ .

证: (1) 设  $a$  是奇数, 则  $a+2$  是与  $a$  相邻的奇数.

假定  $(a, a+2) = d > 1$ , 则  $d | a, d | a+2$ , 因而  $d | 2$ , 但  $a$  为奇数, 此不可能, 所以  $(a, a+2) = 1$ .

(2)  $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ . 因为  $a$  是大于 3 的素数,  $(a-1)$  与  $(a+1)$  是两个连续偶数, 必有一个是 2 的倍数, 另一个是 4 的倍数, 所以  $8 | a^2 - 1$ .

以下证  $3 | (a-1)(a+1)$  即可.

若  $(a-1)$  是 3 的倍数, 则  $3 | (a-1)(a+1)$ .

若  $(a-1)$  除以 3 余 1, 则  $3 | a+1$ , 所以

$$3 | (a-1)(a+1).$$

若  $(a-1)$  除以 3 余 2, 则  $3 | a$ , 此不可能.

$\therefore 3|a^2-1$ , 于是  $3 \times 8|a^2-1$ , 即  $24|a^2-1$ .

[27] 7. 求 968 和 750750 的正约数的个数.

$$\begin{array}{r} \text{解: } 2 \overline{) 968} \\ 2 \overline{) 484} \\ 2 \overline{) 242} \\ 11 \overline{) 121} \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} 968 = 2^3 \times 11^2 \\ \therefore 968 \text{ 的正约数有 } (3+1)(2+1) \\ = 12 \text{ 个.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 750750} \\ 3 \overline{) 375375} \\ 5 \overline{) 125125} \\ 5 \overline{) 25025} \\ 5 \overline{) 5005} \\ 7 \overline{) 1001} \\ 11 \overline{) 143} \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} 750750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13 \\ \therefore 750750 \text{ 的正约数的个数为 } (1+1) \\ (1+1)(3+1)(1+1)(1+1) \\ (1+1) = 128. \end{array}$$

[28] 8. 写出 16500 和 51425 的标准分解式.

$$\text{解: } 16500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11, \quad 51425 = 5^2 \times 11^2 \times 17.$$

[28] 9.  $n$  是自然数, 求证:

$$(1) 6|n^3-n \quad (2) \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ 是整数}$$

证: (1)  $n^3-n = (n-1)n(n+1)$ , 当  $n=1$  时,  $n^3-n=0$ , 就有  $6|n^3-n$ . 当  $n>1$  时, 右式是三个连续整数, 至少有一个是偶数, 而且有一个是 3 的倍数, 故有

$$6|(n-1)n(n+1)$$

$$\text{即} \quad 6|n^3-n$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) \\ &= \frac{1}{6}[2(n^3-n) + 3n(n+1)] \end{aligned}$$

右边括号内第一项可被 6 整除, 第二项中  $n(n+1)$  是两个连续整数, 必有一个是 2 的倍数, 因而第二项  $3n(n+1)$  也可被 6 整除, 所以括号内是 6 的倍数, 于是右式是整数.

$$\therefore \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ 是整数.}$$

[28] 10. 证明:  $39 \mid 2^{12n+9} - 5^{4n+1}$  ( $n$  是自然数).

$$\begin{aligned} \text{证: } 2^{12n+9} - 5^{4n+1} &= 2^9 \times (2^6)^{2n} - 5 \times 25^{2n} \\ &= 512 \times 64^{2n} - 5 \times 25^{2n} \\ &= (39 \times 13 + 5) 64^{2n} - 5 \times 25^{2n} \\ &= 39 \times 13 \times 64^{2n} + 5(64^{2n} - 25^{2n}) \\ &= M(39) + 5(64 - 25)(64^{2n-1} + 64^{2n-2} \\ &\quad \times 25 + \cdots + 25^{2n-1}) \\ &= M(39) + 5 \times 39(64^{2n-1} + 64^{2n-2} \times 25 \\ &\quad + \cdots + 25^{2n-1}). \end{aligned}$$

此处,  $M(39)$  表示 39 的倍数的数, 第二项括号内是整数,

$$\therefore \text{原式} = M(39) + M(39) = M(39)$$

$$\therefore 39 \mid 2^{12n+9} - 5^{4n+1}$$

## 第四节 循环小数

### 习 题 (第 30 页)

确定下列各题中, 第一个命题是第二个命题成立的充分条件? 必要条件? 充分必要条件? (字母表示实数)