数学释疑解难系列丛书

概率论与数理统计

释疑解难

刘 群 石辅天 王福海 王学理 主编

- 大学生同步辅导佳作
- 考研者强化训练精品
- 例题经典——为大学生释疑
- 习题精萃——为考研者解难

NEUPRESS
东北大学出版社

概率论与数理统计释疑解难

主　编　刘　群　石辅天　王福海　王学理

副主编　岳晓宁　铁　军　张　薇

东　北　大　学　出　版　社

内 容 提 要

本书将"概率论与数理统计"诸多内容进行系统地归类分析，通过典型问题的解答帮助读者释疑解难，同时，也向读者介绍方便快捷的解题方法.

全书共七讲.第一讲至第六讲均包含内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、单元统测和答案等六部分内容，第七讲为模拟试题.

本书可作为理工科高等院校学生"概率论与数理统计"课的学习辅导用书，对于准备"考研"的朋友，也是一本内容翔实的参考书

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计释疑解难/刘群等主编 .—沈阳：东北大学出版社，2001.9（2002.3 重印）

ISBN 7-81054-624-4

Ⅰ. 概… Ⅱ. 刘… Ⅲ. ①概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 048680 号

©东北大学出版社出版

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　　邮政编码 110004）

电话.（024）23890881（社务室）　（024）23892538（传　真）

93687331（发行部）　83687332（出版部）

网址:http://www neupress com　E-mail.neuph@neupress com

北宁市印刷厂印刷　　新华书店总店北京发行所发行

开本:787mm×1092mm　1/16　　字数.227 千字　　印张.9. 25

2001 年 9 月第 1 版　　2002 年 3 月第 2 次印刷

责任编辑:刘宗玉　孟　颖　　责任校对:米　戎

封面设计:唐敏智　　责任出版:杨华宁

定价:15 00 元

序　　言

“概率论与数理统计”既是高等学校理工科专业学生的一门数学课，也是大部分理工科专业学生的必修课，更是全国硕士研究生入学统一考试数学试题的重要组成部分。它不但是其他更高深数学课的基础，也是解决许多实际问题的有力工具。

“概率论与数理统计”内容多，理论体系抽象，难以掌握，其思维方式与解题思路也有别于“高等数学”和“线性代数”，因此初学者不易入门，更不好深入。

编写本书的目的就是要帮助读者理清“概率论与数理统计”诸多内容的脉络，介绍一些方便快捷的解题方法，培养读者掌握其特殊的思维方法和解题思路。本书将诸多内容进行归类分析，选取颇具典型性的例题让读者耳目一新，书中还精选了一些练习题，希望读者能独立完成。

本书主编为刘群、石辅天、王福海、王学理，副主编为岳晓宁、铁军、张薇，参加编写的还有郭亚君、丁韫、牟桂彦、黄光、潘东升、张弢。由于编者水平所限，难免会有不妥之处，恳请读者与同仁不吝赐教。

编　者

2001年6月18日

目　录

第一讲　随机事件与概率

一、内容提要

(一)主要定义

1. 随机试验　具有以下特点的试验称为随机试验：试验可以在相同条件下重复进行；事先确切地知道试验的所有可能结果；进行一次试验前不能确定哪个结果会发生．

随机试验也简称为试验，常用 E 表示．

2. 随机事件　在一次试验中，可能发生也可能不发生，但在大量的重复试验中具有某种统计规律性的试验结果称为随机事件，简称事件，常以 A，B，C 等表示．

(1) 基本事件　随机试验的每一个不可再分解的结果称为基本事件或样本点，常以 ω 表示．

(2) 必然事件　每次试验中必然发生的事件称为必然事件，记做 Ω.

(3) 不可能事件　每次试验中都不可能发生的事件称为不可能事件，记做 $\varnothing$.

3. 样本空间　在随机试验 E 中，由所有样本点组成的集合称为 E 的样本空间，常用 Ω 表示．

4. 事件间的关系　设 E 是随机试验，Ω 是 E 的样本空间，也表示必然事件；$\varnothing$ 既表示空集，也表示不可能事件；而 A，B，$A_i(i=1, 2, \cdots)$等表示 E 的事件．

(1) 事件的包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 或事件 B 包含事件 A，记做 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

(2) 相等事件　若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记做 $A = B$.

(3) 和事件　事件 A 与 B 至少有一个发生的事件叫做事件 A 与 B 的和事件，记做 $A \cup B$ 或 $A + B$.

一般地，事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生的事件叫做事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，记做 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(4) 积事件　事件 A 与 B 同时发生的事件叫做事件 A 与 B 的积事件，记做 $A \cap B$ 或 AB.

一般地，事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件叫做事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，记做 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(5) 差事件　事件 A 发生而 B 不发生的事件叫做事件 A 与 B 的差事件，记做 $A - B$.

(6) 互不相容事件　若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容事件(或互斥事件).

注　在一个实验中，基本事件都是两两互不相容的事件．

(7) 对立事件　若事件 A 与 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 B 是事件 A 的对立事件(或称事件 A 与 B 是互逆事件). A 的对立事件常记做 $\overline{A}$.

注　显然，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件却不一定是对立事件

5. 事件的概率

(1) 概率的公理化定义　设 E 是随机试验，Ω 是其样本空间．给 E 的每一随机事件 A 赋予一实数 $P(A)$，若它满足如下三个条件：

① 对于每一个事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$(非负性)；

② $P(\Omega)=1$(规范性)；

③ 对于两两互不相容的事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$，有

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$(可列可加性)，

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率．

(2) 概率的统计定义　在一组不变的条件 S 下重复做 n 次试验，若随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 附近摆动，且一般说来，随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈来愈小，则称 A 为随机事件，而称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，并将其记做 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

注　该定义是以大数定律为理论基础的．

6. 古典概型　设 E 是随机试验，Ω 是 E 的样本空间．若 Ω 中只含有有限个基本事件，且每个基本事件的发生又是等可能的，则称 E 为古典概型．

注　将古典概型中的有限性推广到无限性，但保留等可能性，可得到几何概型．

7. 几何概型　若 Ω 是一个可度量(如长度、面积、体积等)的几何图形，而试验 E 是在 Ω 中等可能地随机取一点，则称 E 为几何概型．

8. 条件概率　在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率叫做条件概率，记做 $P(A|B)$

9. 事件的独立性　对于事件 A 与 B，若 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件 A 与 B 是相互独立的．

一般地，对于事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$，总有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot\cdots\cdot P(A_{i_k})(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的．

10. n 重伯努里试验　只有两个可能结果的试验叫做伯努里试验．独立地重复进行的 n 次伯努里试验叫做 n 重伯努里试验，或称独立试验序列概型．

注　n 重伯努里试验是结论补充中 n 重独立试验的特殊情形．

这里的只有两个可能结果的试验是指能把所有可能的结果归为某个事件的发生或不发生的随机试验．

11. 完备事件组　对于事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若 $A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j)$，$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件组．

(二)主要定理与公式

1. 事件间的运算

(1) $A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；(交换律)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；(结合律)

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；(分配律)

(4) $A\cup\Omega=\Omega$，　$A\cup\varnothing=A$，　$A\cap\Omega=A$，　$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(5) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；（德·摩尔根定律）

一般地，有 $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i}$，　$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}$；

显然，还有

(6) $A\subset A\cup B$，　$A\cap B\subset A$；

(7) $A\cup A=A$，　$A\cap A=A$；

(8) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$；

(9) $A-B\subset A$；　$A-B=A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$；

(10) $(A-B)\cap B=\varnothing$；

(11) 若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\supset\overline{B}$；

(12) 若 $A\subset B$，则 $B=A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$.

2. 概率的性质

(1) 对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 对于任意事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$；特别地，$P(\varnothing)=0$；

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$，$P(B-A)=P(B)-P(A)$；

(5) 对于任意两个事件 A 与 B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$；

一般地，对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$$

3. 古典概型概率的计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

其中 k 表示事件 A 包含的基本事件数，n 表示样本空间 Ω 所包含的基本事件总数.

4. 几何概型概率的计算公式

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)},$$

其中 $L(A)$ 表示事件 A 的度量，$L(S)$ 表示样本空间 Ω 的度量.

注　古典概率、几何概率满足概率定义中的条件，且具有概率的一般性质.

5. 条件概率的计算公式

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

乘法公式　若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

　　　　　若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$.

一般地，对于任意正整数 $n\geqslant 2$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

6. 事件的独立性　由事件的独立性定义及条件概率公式可知：

(1) 事件 A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$或$P(A\mid B)=P(A)$；

(2) 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立；

注　事件的独立性常常不是根据定义判断，而是根据实际问题本身加以判断，然后利用定义式简化计算.

7. 全概率公式　若事件 A_1，A_2，…，A_n 是样本空间 Ω 的一个完备事件组，且 $P(A_i)$

$>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则对于任意一个事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

注　全概率公式的意义在于把复杂事件概率的计算转化为若干不相容的简单事件的概率和的计算

8. 逆概率公式(贝叶斯公式)　在全概率公式的条件下，对于任意一个事件 $B(P(B)>0)$，都有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

注　逆概率公式的意义在于它反映了导致一个事件发生的若干"因素"对这个事件的发生究竟分别产生多大的影响．

9. 二项概率公式　在 n 重伯努里试验中，事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad (k=0, 1, \cdots, n).$$

(三)结论补充

1. n 次独立试验　设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 n 次随机试验，$\mathscr{A}_k$ 表示与第 k 次试验有关的事件全体．若对于任意的 $A_1\in\mathscr{A}_1, A_2\in\mathscr{A}_2, \cdots, A_n\in\mathscr{A}_n$，总有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots P(A_n)$，则称试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为 n 次独立试验．

2. n 次重复独立试验　若 n 次独立试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 的样本空间 $\Omega_1=\Omega_2=\cdots=\Omega_n$，且所有有关事件的概率在 n 次试验中保持不变，则称 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 n 次重复独立试验，简称 n 重独立试验．

3. 乘法原理　若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再进行 A_2 过程共有 $n_1\times n_2$ 种方法(见图 1-1)

4. 加法原理　若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，假定 A_1 过程与 A_2 过程是并行的，则进行 A_1 过程或 A_2 过程的方法共有 n_1+n_2 种(见图 1-2)．

注　这两条原理可推广到多个过程情形．

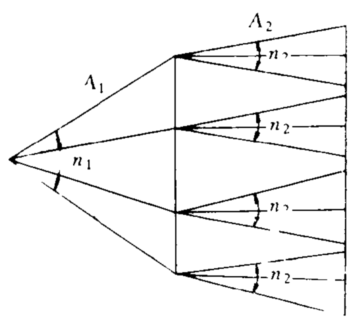

图 1 1

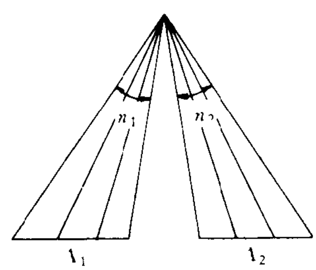

图 1 2

5. 排列

(1) 在有放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个进行排列称为有重复的排列，其总数共有 n^r 种．

(2) 在不放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个进行排列称为选排列，其总数共有 $P_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种．特别地，当 $r=n$ 时，称为全排列，并简记为 P_n．

6．组合

(1) 从 n 个元素中取出 r 个元素而不考虑其顺序称为组合，其总数共有 $C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$ 种．

(2) 若 $r_1 + r_2 \cdots + r_n = n$，把 n 个不同的元素分成 k 个部分，第一部分 r_1 个，第二部分 r_2 个，…，第 k 部分 r_k 个，则不同的分法有 $\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_k!}$ 种．

(3) 若 n 个元素中有 n_1 个带足标 "1"，n_2 个带足标 "2"，…、n_k 个带足标 "k"，且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，从这个 n 个元素中取出 r 个，使得带足标 "i" 的元素有 r_i 个 $(1 \leqslant i \leqslant k)$，而 $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = r$，则不同的分法有 $C_{n_1}^{r_1} C_{n_2}^{r_2} \cdots C_{n_k}^{r_k}$ $(r_1 \leqslant n_1,\ r_2 \leqslant n_2,\ \cdots,\ r_k \leqslant n_k)$ 种．

二、客观题归类分析

（一）填空题

【例 1-1】 观察1h中落在地球某一区域的宇宙射线数，则其样本空间可取为______．

【解】 该试验的可能的结果一定是非负整数，且很难指定一个数作为它的上界，故该试验的样本空间可取为 $\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$．

【例 1-2】 设 A，B 为随机事件，若事件 A 发生必导致事件 B 发生，且 $P(A)=0.6$，则 $P(AB)=$________．

【解】 因为事件 A 发生必导致事件 B 发生，所以 $A \subset B$，从而 $AB = A$，$P(AB) = P(A) = 0.6$．

【例 1-3】 设 A，B 为相互独立的随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，则 $P(A|(A+B))=$________．

【解】 因为事件 A 与 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，于是

$$P(A|(A+B)) = \frac{P(A(A+B))}{P(A+B)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)} = \frac{3}{4}.$$

【例 1-4】 若随机事件 A 与 B 及其和事件 $A+B$ 的概率分别是 0.4，0 3 和 0.6，那么 $P(A\bar{B})=$________．

【解】 因为 $A = A(B+\bar{B}) = AB + A\bar{B}$，$(AB)(A\bar{B}) = \varnothing$，
所以 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$，即 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$．

又因为 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$，
所以 $P(A\bar{B}) = 0.4 - 0.1 = 0.3$．

注　利用 $A = A(B+\bar{B}) = AB + A\bar{B}$ 的方式，可将任意一个事件分解成两个互斥事件的和，并在已知 $P(A)$，$P(AB)$，$P(A\bar{B})$ 中任意两个的情况下，可求出另一个的概率．

【例 1-5】 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，今从中不放回地任意抽取 2 次，则第 2 次抽出的是次品的概率为________．

【解】 设 $A=\{$第2次抽出的是次品$\}$，则 A 包含的基本事件数为 $C_{10}^1C_2^1+C_2^1C_1^1=22$，又样本空间 Ω 中的基本事件总数为 $C_{12}^1C_{11}^1=12\times 11$，所以 $P(A)=\dfrac{22}{12\times 11}=\dfrac{1}{6}$.

【例 1-6】 某射手在3次射击中至少命中1次的概率为0.875，则其在1次射击中的命中率为________.

【解】 设射手的命中率为 p，由于射手至少命中1次的事件是其1次都未中事件的对立事件，所以该射手至少命中1次的概率 $P=1-(1-p)^3=0.875$，得 $p=0.5$.

练 习 1-1

1. 给定 $P(A)=p$，$P(B)=q$，$P(A+B)=r$，则 $P(A\bar{B})=$________，$P(\bar{A}\bar{B})=$________.

2. 设 A，B，C，D 是4个随机事件，试用它们表示下列各事件：

(1) A，B 都发生而 C，D 都不发生：________；

(2) A，B，C，D 都不发生：________；

(3) 恰好发生2个：________；

(4) 至少发生1个：________；

(5) 至多发生1个：________.

3. 某市有50%的住户订阅日报，65%的住户订阅晚报，85%的住户至少订阅这2种报纸中的1种，则同时订阅这2种报纸的住户所占的百分比是________.

4. 任取两个正整数，则它们之和为偶数的概率为________.

5. 甲从2，4，6，8，10中任取一数，乙从1，3，5，7，9中任取一数，则甲取的数大于乙取的数的概率为________.

6. n 个人排成一队，已知甲总排在乙的前面，则乙恰好紧跟在甲后面的概率为________.

7. 已知在4次重复独立试验中事件 A 至少发生1次的概率为0.59，则在1次试验中事件 A 发生的概率为________.

(二)选择题

【例 1-7】 对于任意两个事件 A 和 B，有 $P(A-B)=$[　　].

(A) $P(A)-P(B)$；　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$；

(C) $P(A)-P(AB)$；　　(D) $P(A)+P(\bar{B})+P(B)-P(A\bar{B})$.

【解】 因为 $A-B=A-AB$，$AB\subset A$，
所以 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，
故应选(C).

【例 1-8】 设 A 与 B 为两个随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子中正确的是[　　].

(A) $P(A+B)=P(A)$；　　(B) $P(AB)=P(A)$；

(C) $P(B|A)=P(B)$；　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

【解】 因为 $B\subset A$，
所以 $A+B=A$，$P(A+B)=P(A)$，
故应选(A).

【例 1-9】 已知 $P(A)=0.8$, $P(B)=0.7$, $P(A|B)=0.8$, 则下列结论中正确的是[ ].

(A) 事件 A 与 B 相互独立； (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$；

(C) $P(C)=P(AB)$； (D) $P(C)=P(A+B)$.

【解】 因为 $P(A)=P(A|B)=0.8$, 所以事件 A 与 B 相互独立 . 故应选(A).

【例 1-10】 设 A 与 B 为两个随机事件, 且有 $P(C|AB)=1$, 则下列结论中正确的是 [ ].

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$； (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$；

(C) $P(C)=P(AB)$； (D) $P(C)=P(A+B)$.

【解】 因为 $P(C|AB)=\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}=1$,

所以 $P(ABC)=P(AB)$,

又因为 $ABC\subset AB$,

所以 $AB\subset C$, 从而 $P(C)\geqslant P(AB)$,

另外, $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$,

所以 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$,

故应选(B).

【例 1-11】 设 A 与 B 为两个互斥事件, 且 $P(B)>0$, 则下列结论中正确的是[ ].

(A) $P(B|A)>0$； (B) $P(A|B)=P(A)$；

(C) $P(A|B)=0$； (D) $P(AB)=P(A)P(B)$.

【解】 因为 A 与 B 互斥, 即 $AB=\varnothing$, 所以 $P(AB)=0$. 又 $P(B)>0$, $P(AB)=P(B)P(A|B)=0$, 所以 $P(A|B)=0$. 故应选(C).

练 习 1-2

1. 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$, 则[ ].

(A) A 是必然事件； (B) $P(B|\bar{A})=0$； (C) $A\supset B$； (D) $A\subset B$.

2. 设 $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$, 则 $P(A\bar{B})=$[ ].

(A) $a-b$； (B) $c-b$； (C) $a(1-b)$； (D) $b-a$.

3. 设 A 和 B 是任意两个不相容的事件, 并且 $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$, 则下列结论中一定正确的是[ ].

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容； (B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$； (D) $P(A-B)=P(A)$.

4. 用火车运送两类产品, 其中甲类 n 件, 乙类 m 件 . 已知运输中有 2 件产品损坏, 则损坏的是不同类产品的概率为[ ].

(A) $\dfrac{C_n^2}{C_{n+m}^2}$； (B) $\dfrac{C_m^1C_n^1}{C_{n+m}^2}$； (C) $\dfrac{C_m^2C_n^1}{C_{n+m}^2}$； (D) $\dfrac{C_{m+n}^2}{C_n^1C_m^1}$.

5. 一副扑克牌去掉大、小王后还剩 52 张, 从这 52 张牌中一张一张有放回地取 4 张, 则恰有 3 张是黑桃的概率为[ ].

(A) $\dfrac{C_{13}^3C_{39}^1}{C_{54}^4}$； (B) $C_4^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)$； (C) $\dfrac{C_4^3C_{13}^3C_{39}^1}{P_{52}^4}$； (D) $\dfrac{C_4^3P_{13}^3C_{39}^1}{P_{52}^4}$.

三、主观题归类分析

(一)计算题

【例 1-12】 已知 12 个产品中有 2 个次品，从这些产品中任意抽取 4 个产品，求(1)恰有 1 个次品的概率；(2)至少有 1 个次品的概率．

【解】 (1) 方法一 假设从 12 个产品中随机地抽取 4 个而不考虑其顺序，这时，样本空间 Ω 含有 C_{12}^4个基本事件．又事件 $A=\{$恰有 1 个次品$\}$包含 $C_{10}^3C_2^1$ 个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{C_{10}^3C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{240}{495}=0.485.$$

方法二 假设从 12 个产品中随机地抽取 4 个且考虑其顺序，这时，样本空间 Ω 含有 P_{12}^4个基本事件，而事件 A 包含 $C_{10}^3C_2^1P_4$ 个基本事件，于是 $P(A)=\dfrac{C_{10}^3C_2^1P_4^1}{P_{12}^4}=0.485.$

(2) 方法一 设事件 $B=\{$至少有 1 个次品$\}$，并考虑抽取产品方式与先后次序无关，则样本空间 Ω 含有 C_{12}^4个基本事件，易知 B 的对立事件$\bar{B}$ 包含 C_{10}^4个基本事件，于是，由概率的性质可知 $P(B)=1-P(\bar{B})=1-\dfrac{C_{10}^4}{C_{12}^4}=0.58.$

方法二 考虑抽取产品方式与先后次序有关，则样本空间 Ω 含有 P_{12}^4个基本事件，易知 B 的对立事件$\bar{B}$ 包含 P_{10}^4个基本事件，于是 $P(B)=1-P(\bar{B})=1-\dfrac{P_{10}^4}{P_{12}^4}=0.58.$

注 (1) 考虑次序要一致，即样本空间中的元素考虑了次序，则事件中的元素也要考虑次序．反之亦然．

(2) 所求中有“至少”的问题，用“对立事件”解答往往比较简单．

【例 1-13】 某人有 5 把钥匙，其中有 2 把房门钥匙，但他忘记了开房门的是哪 2 把，只好逐次试开．问此人在 3 次内能打开房门的概率是多少?

【解】 本题是从 5 把钥匙中任选 3 把试开房门(每次 1 把，试后不放回)的试验．样本空间 Ω 包含的基本事件个数为 P_5^3.

设 $A=\{$3 次内打开房门$\}$．因为 5 把内有 2 把房门钥匙，因此，3 次都打不开房门的方式共有 $C_3^1C_2^1C_1^1$ 种，除去打不开房门的种数就是能打开房门的种数，故事件 A 含有 $P_5^3-C_3^1C_2^1C_1^1$ 个基本事件，于是 $P(A)=\dfrac{P_5^3-C_3^1C_2^1C_1^1}{P_5^3}=\dfrac{54}{60}=0.9.$

注 例 1-12、例 1-13 都是应用乘法原理计算基本事件的个数．

【例 1-14】 将张三、李四、王五 3 人等可能地分配到 3 个房间中去，试求每个房间恰有 1 人的概率．

【解】 先求样本空间包含的基本事件总数，即把 3 个人等可能地分配到 3 个房间中去的总的分法．

首先，将张三分配到 3 间房中的任意 1 间去，有 3 种分法；然后，将李四分配到 3 间房中的任意 1 间去，也有 3 种分法；最后，分配王五仍有 3 种分法。从而，由乘法原理知，样本空间 Ω 含有 3^3 个基本事件．

设 $A=\{$每个房间恰有 1 人$\}$. 首先分张三，有 3 种分法，再分李四时只有 2 间空房了，故只有 2 种分法，最后剩 1 间空房分给王五，只有 1 种分法。同样，由乘法原理知，事件 A 含有 $3\times2\times1$ 个基本事件．于是 $P(A)=\frac{3\times2\times3}{3^3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

注　分房问题中的人与房子一般都是有个性的，必须将人一个一个地往房间里面分配．处理类似问题时，要分清什么是“人”，什么是“房子”，一般不可颠倒　常见问题有：几个人的生日问题，几封信装入几个信封的问题，掷几颗骰子的问题等．

【例 1-15】　一学生寝室有 6 名学生，试求下列事件的概率：

(1) 至少有 1 人的生日是星期天；

(2) 6 个人的生日不都在星期天；

(3) 至少有 2 人的生日是星期天．

【解】　因为每个人的生日都可能是 7 天中的任何 1 天，且是等可能的，因此，样本空间 Ω 包含的基本事件总数为 7^6.

(1) 设 $A=\{$至少有 1 人的生日是星期天$\}$，则 $\bar{A}=\{$没有人的生日是星期天$\}$包含 6^6 个基本事件，故 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{6^6}{7^6}\approx0.6$.

(2) 设 $B=\{$6 个人的生日不都在星期天$\}$，则 $\bar{B}=\{$6 个人的生日都在星期天$\}$包含 1 个基本事件，故 $P(B)=1-\frac{1}{7^6}$.

(3) 设 $C=\{$至少有 2 人的生日是星期天$\}$，注意到 $\bar{C}=\{$至多有 1 人的生日是星期天$\}$包含有 $6^6+C_6^1 6^5$ 个基本事件，因此 $P(C)=1-\frac{2\times6^6}{7^6}\approx0.21$.

【例 1-16】　在$[0,1]$中随机地取出两个数，则这两数之和小于 1.2 的概率为________．

【解】　设两数分别为 x 与 y，则 $0<x<1$，$0<y<1$ 为样本空间 Ω 的变化区域，而所讨论事件的区域为图 1-3 中阴影部分，于是，所求事件的概率为

$$P=\frac{1-\frac{1}{2}\times0.8\times0.8}{1}=0.68.$$

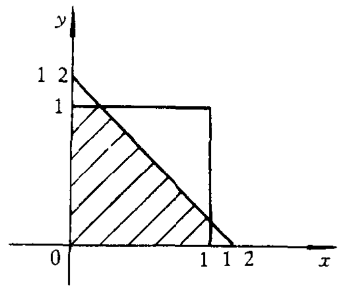

图 1-3

【例 1-17】　甲，乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的．如果甲船停泊的时间是 1h，乙船停泊的时间是 2h，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少？

【解】　设甲乙两船到达码头的时刻分别为 x，y，则 $0\leqslant x\leqslant24$，$0\leqslant y\leqslant24$ 为样本空间 Ω 的变化区域，它是边长为 24 的正方形．

由题意知，若甲船先到，乙船应晚来 1h 以上，即 $y-x\geqslant1$；若乙船先到，甲船应晚来 2h 以上，即 $x-y\geqslant2$.

两船不需要等候码头空出的充要条件是 x，y 同时满足上面两个不等式．图 1-4 中阴影部分就是所讨论事件发生的区域 G. 于是，

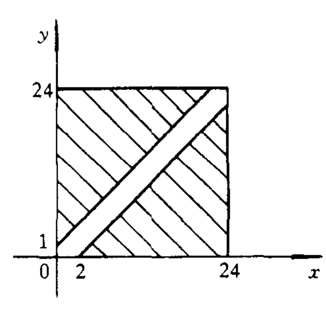

图1-4

$$P(G)=\frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2}{24^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 1013}{576}\approx 0.88.$$

【例 1-18】 1 批灯泡共 100 只，次品率为 10%．不放回地抽取 3 次，每次 1 只，求第 3 次才取得合格品的概率．

【解】 由题意知，第 1 次与第 2 次均取得的是次品，而第 3 次取得了合格品，这是 3 件事同时发生的事件，故本题是积事件的概率计算问题．

设 $A_i=\{$第 i 次取得合格品$\}(i=1,2,3)$，则 $P(\bar{A}_1)=\frac{10}{100}$，$P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)=\frac{9}{99}$，$P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{90}{98}$. 于是，由条件概率公式，得

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.008.$$

【例 1-19】 从一、二、三等品各占 60%，30%，10% 的一批产品中随意地取出 1 件，结果不是三等品，问取到的是一等品的概率是多少?

【解】 设 $A_i=\{$取出的产品为第 i 等品$\}(i=1,2,3)$，显然，事件 A_1，A_2，A_3 是互不相容的．于是，所求事件的概率为

$$P(A_1|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1\cup A_2)}$$

$$=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}.$$

【例 1-20】 假设有同种零件 2 箱：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品．现从 2 箱中随意地取出 1 箱，然后再从该箱中不放回地任取 2 个零件，试求

(1) 先取出的零件是一等品的概率；

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的概率．

【解】 设 $H_i=\{$取出第 i 箱$\}(i=1,2)$，

$A_i=\{$第 i 次取出的零件是一等品$\}(i=1,2)$，

则 $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$，　$P(A_1|H_1)=\frac{10}{50}$，　$P(A_1|H_2)=\frac{18}{30}$.

(1) 由全概率公式，有

$$P(A_1)=P(H_1)P(A_1|H_1)+P(H_2)P(A_1|H_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5};$$

(2) 由贝叶斯公式，有

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{P(A_1)}[P(H_1)P(A_1A_2|H_1)+P(H_2)P(A_1A_2|H_2)]$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)\approx 0.49.$$

【例 1-21】 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只．假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率相应

为0.8，0.1和0.1.1名顾客欲购1箱玻璃杯．在购买时，售货员随意地取1箱，而顾客随机地查看4只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回．试求

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α；

(2) 在顾客买下的1箱中，确实没有残次品的概率 β.

【解】 设$A=\{$顾客买下所查看的1箱$\}$,

$B_i=\{$箱中恰好有 i 只残次品$\}(i=0, 1, 2)$,

则 $P(B_0)=0.8,\quad P(B_1)=0.1,\quad P(B_2)=0.1;$

$$P(A|B_0)=1,\quad P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},\quad P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}.$$

(1) 由全概率公式，有

$$\begin{aligned}\alpha &=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)\\ &=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94;\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式，有

$$\beta=P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8}{0.94}\approx0.85.$$

【例 1-22】 甲、乙两人独立地对同一目标射击1次，命中率分别为0.6和0.5. 现已知目标被射中，求它是甲射中的概率．

【解】 设 $A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，则 $A\cup B$ 表示目标被射中，从而

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\ &=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\ &=0.6+0.5-0.6\times0.5=0.8,\end{aligned}$$

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6}{0.8}=\frac{3}{4}.$$

注　本题的关键在于知道目标被击中这一事件就是和事件 $A\cup B$ 以及事件A 与B 相互独立．

【例 1-23】 1名工人看管3台机床，在1h内甲、乙、丙3台机床需要工人照看的概率分别是0.9，0.8和0.85，求在1h内

(1) 没有机床需要照看的概率；

(2) 至少有1台机床不需要照看的概率；

(3) 至多只有1台机床需要照看的概率．

【解】 因为机床工作是相互独立的，故本题是相互独立事件的概率计算问题．

设$A_1=\{$甲台机床需要照看$\}$，$A_2=\{$乙台机床需要照看$\}$，$A_3=\{$丙台机床需要照看$\}$,

$A=\{$没有机床需要照看$\}$, $B=\{$至少有1台机床不需要照看$\}$,

$C=\{$至多只有1台机床需要照看$\}$.

(1) $$\begin{aligned}P(A)&=P(\bar A_1\bar A_2\bar A_3)=P(\bar A_1)P(\bar A_2)P(\bar A_3)\\ &=(1-0.9)(1-0.8)(1-0.85)=0.003;\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\bar B)=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\ &=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388;\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}P(C)&=P(\bar A_1\bar A_2\bar A_3+A_1\bar A_2\bar A_3+\bar A_1A_2\bar A_3+\bar A_1\bar A_2A_3)\\ &=P(\bar A_1\bar A_2\bar A_3)+P(A_1\bar A_2\bar A_3)+P(\bar A_1A_2\bar A_3)+P(\bar A_1\bar A_2A_3)\end{aligned}$$

$=0.003+0.9\times0.2\times0.15+0.1\times0.8\times0.15+0.1\times0.2\times0.85=0.059.$

【例 1-24】 某型号高射炮每发射一发炮弹击中敌机的概率为 0.6. 现有若干门同型号的高射炮同时各发射一发炮弹，今欲以 99% 以上的把握击中来犯的一架敌机，问至少需要配置几门高射炮?

【解】 设需要配置 n 门高射炮，且 $A=\{$一架敌机被击中$\}$，$A_i=\{$第 i 门炮击中敌机$\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，于是 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$，$\bar{A}=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$

因为 n 门高射炮是各自独立发射的，所以

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$
$$=1-(1-0.6)^n=1-0.4^n,$$

令
$$1-0.4^n\geqslant 0.99,$$
由此解得
$$n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}\approx 5.026.$$

因此，至少需要配置 6 门高射炮才能以 99% 以上的把握击中来犯的敌机 .

练　习　1-3

1. 袋中有白球 5 只，黑球 6 只，陆续取出 3 球，求顺序为黑白黑的概率 .

2. 把 1，2，3，4，5 诸数各写在一张小纸片上，任取其三而排成自左向右的次序，求所得数是偶数的概率 .

3. 甲袋中有白球、红球、黑球各 3 只，7 只和 15 只，乙袋中有白球、红球、黑球各 10 只，6 只和 9 只 . 从两袋中各取一球，求两球颜色相同的概率 .

4. 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只，求下列事件发生的概率(1)没有成对的鞋子；(2)只有 1 对鞋子；(3)恰有 2 对鞋子；(4)有 r 对鞋子 .

5. 袋中有 n 只球，记有号码 1，2，…，n，求下列事件的概率(1)任意取出 2 球，号码为 1，2；(2)任意取出 3 球，没有号码 1；(3)任意取出 5 球，号码 1，2，3 至少出现一个 .

6. 袋中装有 1，2，…，N 号球各一只，采用(1)有放回；(2)不放回方式摸球，试求在第 k 次摸球时，首次摸到 1 号球的概率 .

7. 甲有 $n+1$ 枚硬币，乙有 n 枚硬币，双方投掷之后进行比较，求甲掷出的正面比乙掷出的正面多的概率 .

8. 一颗骰子投 4 次至少得到一个六点与两颗骰子投 24 次至少得到一个双六这两件事哪一件有更多的机会遇到?

9. 两人约定于 9 点至 10 点间在公园门前见面，试求一人要等另一人半小时以上的概率.

10. 从(0，1)中随机地取两个数，求下列事件的概率：(1)两数之和小于 1.2；(2)两数之积小于$\frac{1}{4}$.

11. 已知考试时共有 N 张考签，n 个学生参加考试($n\geqslant N$). 假定抽过的考签立刻被放回，求在考试结束之后，至少有一张考签没有被抽到的概率 .

12. 在有 3 个孩子的家庭中，已知有 1 个是女孩，求至少有 1 个男孩的概率 .

13. 袋中有 a 只黑球，b 只白球，甲，乙，丙 3 人依次从袋中取出 1 球(取后不放回)，