上海市普通高校“九五”重点教材　上海市教育委员会 组编

数理金融

——资产定价与金融决策理论

叶中行 林建忠 编著

科学出版社

上海市普通高校"九五"重点教材
上海市教育委员会 组编

数理金融

——资产定价与金融决策理论

叶中行 林建忠 编著

科学出版社
1998

内 容 简 介

本书主要内容包括:数理金融预备知识,资产组合均值-方差分析与资本资产定价模型,Ross 套利定价理论,log-最优投资组合理论,有风险控制的 log-最优资产组合,连续时间资产组合选择,期权定价理论,利率期限结构理论,公司资本结构理论,等等.

本书可供高校金融、管理,应用数学系师生作教材之用.

图书在版编目(CIP)数据

数理金融——资产定价与金融决策理论/叶中行,林建忠编著.-北京:科学出版社,1998.12
ISBN 7-03-007024-0

Ⅰ.数… Ⅱ.①叶… ②林… Ⅲ.金融-经济数学-方法 Ⅳ.F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 27555 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998 年 12 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1998 年 12 月第一次印刷 印张:9 7/8
印数:1—3000 字数:251 000

定价:15.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

金融，英文为“finance”，在不同场合有不同译法，corporate finance（公司财务或理财）和 financial market（金融市场）.“金融”通常仅仅被理解为后者，但这实际上是很不科学的，因为两者在本质上是紧密联系的，因此广义的“金融”应包括财务的含义，因为现代企业的兼并、收购和合并所涉及的财务重组和建构问题，也是金融研究的对象.

金融理论涉及所有资金融通方面的内容，包括对融资主体、融资市场的研究，一般分为三部分：

1. 金融市场理论(money and capital market theory)，如证券（包括期权）定价，利率结构，汇率等.

2. 投资学（investment），专门研究投资者如何投资以取得最佳收益，如最优投资决策理论，风险管理理论等.

3. 公司财务管理（corporate finance），专门研究企业如何筹集和使用资金等.

这三方面又是互相联系，不能截然分开的.

50 年代初马科维茨（H. Markowitz）提出的投资组合理论是金融定量分析的开始，可以看成是数理金融学的发端，在这之前的金融学通常以定性研究为主，很少有精致的定量分析. 1990 年诺贝尔经济奖授予马科维茨、夏普（W. Sharpe）和米勒（M. Miller），奖励他们在金融经济学中的先驱工作，他们的得奖工作——马科维茨的投资组合理论、夏普的资本资产定价理论和米勒的公司财务理论都是非常数学化的. 1997 年诺贝尔经济奖授予莫顿（R. Merton）和修斯（M. Scholes），以奖励他们和勃拉克（F. Black）在确定衍生证券价值方法方面的贡献，也就是关于期权定价的著名的勃拉克-修斯公式，它们与马科维茨-夏普理论一

起构成了蓬勃发展的新学科——数理金融学的主要内容，同时也是研究新型衍生证券设计的新学科——金融工程的理论基础.

数理金融学（也称数学金融学，分析金融学）就是利用数学工具研究金融，进行数学建模、理论分析、数值计算等定量分析，以求找到金融活动内在的规律并用以指导实践.

数理金融学也可以理解为现代数学与计算技术在金融领域的应用，这种金融高技术已成为西方金融投机家手中的“超级武器”，最近以东南亚金融危机为起点的全球金融大动荡就显示了这个“超级武器”的威力，也引起了我国政府和金融界的高度重视和警惕.

数理金融学是一门新兴的交叉学科，发展很快，是目前十分活跃的前沿学科之一. 国家自然科学基金九五重大项目“金融数学、金融工程和金融管理”已在 1996 年立项，并于 1997 年正式实施. 高等院校纷纷开设数理金融学课程，有的学校并已成立了相应的专业或系科. 迫切需要这方面的教材.

上海交通大学应用数学系早在 4 年前就开设了数理金融学的讨论班，并在大学本科生和研究生中开设了数理金融学课程，至今已讲授了三遍，编写了讲义，积累了一些经验，今天呈现在读者面前的这本书是在原讲义的基础上加工整理而成的，其中还包括了我们最新的部分科研成果. 本书的主要内容包括以下几方面：

第一章介绍了数理金融的预备知识，其中效用理论等则是数量经济学中熟知的内容. 第二、三章着重介绍资产定价理论，包括 Markowitz 的均值-方差分析、Sharpe 的资本资产定价理论和罗斯（Ross）的套利定价理论. 第四、五章介绍 log -最优资产组合理论，包括无风险控制和有风险控制的情形、单周期和序列投资情形，还给出了实用算法，第五章中包括了我们最新的部分研究成果. 第六章介绍连续时间资产组合选择模型和跨期资本资产定价模型，包括考克斯-罗斯-卢宾斯坦（Cox-Ross-Rubinstein）二项式定价模型和著名的勃拉克-修斯（Black-Scholes）公式和它们在各种期权定价中的应用. 第八章介绍利率期限结构理论. 第九

章介绍公司资本结构理论，叙述了著名的莫迪格利阿尼-米勒（Modigliani-Miller）定理及它们的应用和推广. 在各章的后面还配有少量的习题.

当然，作为完整的数理金融学还应包括本书没纳入的汇率和风险管理理论等内容，因此确切地说（正如本书副标题所示）本书是关于数理金融学中资产定价和金融决策理论的教科书.

本书的读者对象是大学应用数学和经济金融类本科高年级学生和研究生，也可作为数理金融科研人员的参考书. 本书用到的数学知识比较多，但大多数章节只需要微积分和概率统计初步知识，部分章节则需要最优化、随机过程和随机分析等知识，读者可以根据自己的数学基础选取其中的章节而略去其他的部分.

在本书结稿之际我们要感谢所有关心和支持我们写作和出版此书的人们，我们从史树中教授和彭实戈教授的多次讲学和他们主持的讲习班获益匪浅，并有幸参加他们主持的国家自然科学基金九五重大项目“金融数学、金融工程和金融管理”（项目编号79790130）金融工程课题的研究工作，本书也是这一课题研究的一项工作. 李训经教授审阅了本书的初稿，提出了重要的改进意见. 参加过数理金融讨论班和课程学习的上海交通大学应用数学系的研究生和本科生对课程的成功和本书的成书作出了贡献，杨利平还为本书绘制了所有的插图. 本书的写作和出版得到了上海市教育委员会和上海交通大学教材出版基金的重点资助，没有他们的支持，这本书是无法完成的. 我们还要感谢出版界的老朋友林鹏先生对本书出版所给予的热情支持和帮助.

虽然我们有 3 年讲授数理金融学课程的经验和原有讲义的基础，但本书的写作仍然比较仓促，其内容还没有涵盖数理金融学的全部，缺点错误在所难免，衷心希望广大读者批评指正，以便在将来可能再版时充实改进.

叶中行　林建忠

1998 年 8 月 8 日于上海

目　录

第八章 利率期限结构理论

第九章 公司资本结构

第一章　数理金融预备知识

§1　序数效用理论

效用是微观经济学的一个基本概念．在维多利亚女王时代，哲学家和经济学家把“效用”看作是一个人的整个福利的指数．效用被看作是个人快乐的数字度量．这个观念一旦确立，自然就认为消费者进行商品的选择是为了实现它们的效用最大化，即使他们尽可能地获得最大的快乐．然而，古典经济学家实际上从来没有阐述过如何去度量效用；以及除了人们要实现效用最大化以外，效用的概念是否还有别的独立意义．

由于存在这些概念上的问题，经济学家放弃了把效用当作快乐度量的旧式观点，建立了在消费者偏好基础上阐述消费者行为的理论，在这一理论中，用“消费者偏好”的概念对消费者选择行为的分析进行基本描述，而效用仅仅是描述偏好的一种方式．

为了阐明这一理论，考虑一面临决策问题的个体．根据其决策问题的性质，有时将此个体称为投资者，有时称为消费者．该个体面对一供选择的商品对象所组成的集合，称该集合为商品选择集，记为 B．在该集合中，个体必须选择其所偏好的商品（或称元素）．例如，假设商品选择集 B 由一个苹果，记为 x_1；一个桃子，记为 x_2；一个柑橙，记为 x_3；以及这三种水果的所有各种形如 $x=\sum_{i=1}^{3} w_i x_i\left(\sum_{i=1}^{3} w_i=1, w_i \geqslant 0\right)$ 的线性匹配所组成．个体所面临的决策问题是：他（她）偏好集合 B 中的哪一个元素？例如，个体可选择半个苹果与半个柑橙所组成的匹配．

为了更一般地考虑个体对商品选择集 B 的选择偏好．假定

B 是 n 维 Euclid 线性空间 R^n 中的一个凸子集，对每一个个体装配一选择偏好序关系，记为 $\geq$. 对任意的 x，$y \in B$，$x \geq y$ 意味着或者 x 比 y 更受偏好或者 x 与 y 是偏好无差异的. 我们假定个体的偏好关系满足以下三个公理：

公理 1.1(自反性) 对任意的 $x \in B, x \geq x$.

公理 1.2(可比较性) 对任意的 $x, y \in B$,或者 $x \geq y$ 或者 $y \geq x$.

公理 1.3(传递性) 对任意的 $x, y, z \in B$,假如 $x \geq y$,且 $y \geq z$,那么 $x \geq z$.

例 1.4(字典序) 设选择集 $B = \{(x, y): x \in [0, \infty), y \in [0, \infty)\}$,个体的选择偏好序为假定 $(x_1, y_1) \in B$ 且 $(x_2, y_2) \in B$,那么

$$(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2) \text{ 当且仅当}[x_1 > x_2]$$
$$\text{或}[x_1 = x_2 \text{ 且 } y_1 \geqslant y_2].$$

有兴趣的读者可以自行证明:字典序满足以上偏好序的三个公理.

定义 1.5 效用函数 $U(x)$是 $B \to R$ 的单值映射,且对任意的 $x, y \in B$,若 $U(x) \geqslant U(y)$,则必有 $x \geq y$.

是否对装配了满足上述三个公理的偏好序的任意集 B,都存在这样的效用函数呢? 遗憾的是,著名经济学家 Debreu 举出了一个反例,即装配字典序的商品选择线性凸集并不存在这样的效用函数. 因此为了获得这样的效用函数,我们必须另外再加上两个公理,为此首先给出以下定义

定义 1.6 假定 $x, y \in B$ 且 B 装配了满足公理 1.1—1.3 的偏好序 $\geq$,我们称 x 与 y 是偏好无差异的,记为

$$x \sim y \quad \text{当且仅当} \quad x \geq y \text{ 且 } y \geq x;$$

我们称 x 严格偏好于 y,记为

$$x \succ y \quad \text{当且仅当} \quad x \geq y \text{ 且 } x \sim y \text{ 不成立}.$$

公理1.7(序保持性) 对任意的 $x, y \in B$,其中 $x \geq y$ 且 $\alpha, \beta \in [0,1]$,

$$[\alpha x + (1 - \alpha) y] \geq [\beta x + (1 - \beta) y] \text{ 当且仅当 } \alpha > \beta.$$

公理1.8（中值性） 对任意的 $x,y,z\in B$，假如 $x\succ y\succ z$，那么存在唯一的 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$\alpha x+(1-\alpha)z\sim y$$

为了使下面的推导更为简明，我们再增加一个公理

公理1.9（有界性） 存在 $x^*,y^*\in B$，使得对所有的 $z\in B$，$x^*\succeq z\succeq y^*$

读者可以自行证明字典序满足公理1.7，但我们有

性质1.10 字典序不满足公理1.8.

证明 假设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in B$，$(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2)\succ(x_3,y_3)$，且 $x_1>x_2=x_3$，$y_2>y_3$. 对任意的 $\alpha\in(0,1)$，我们有

$$\begin{aligned}&\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_3,y_3)\\&\quad=\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_3)\\&\quad=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_3);\end{aligned}$$

但对 $\alpha>0$，我们有 $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2>x_2$，所以对所有的 $\alpha\in(0,1)$，成立

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_3,y_3)\succ(x_2,y_2).$$

因此，不存在 $\alpha\in(0,1)$，使得 $\alpha x+(1-\alpha)z\sim y$. 这就说明了字典序不满足公理1.8.

定理1.11（序数效用函数存在性定理） 在商品选择集 B 中给定满足公理1.1—1.3和公理1.7—1.9的偏好序，则存在效用函数 $U:B\to R$，使得

(a) $x\succ y$ 当且仅当 $U(x)>U(y)$，

(b) $x\sim y$ 当且仅当 $U(x)=U(y)$.

证明 这里我们给出构造性的证明. 由公理1.9，对所有 $z\in B$，存在 $x^*,y^*\in B$ 使得 $x^*\succeq z\succeq y^*$. 不失一般性，假定 $x^*\succ y^*$（否则，对所有 $z\in B$，$x^*\sim z\sim y^*$. 这样，对所有 $z\in B$，定义效用函数 $U(z)\equiv0$，它显然满足定理的条件(a)和(b)）. 由公理1.1—1.3，对任意的 $z\in B$，有三种可能情形：

情形 1　当 $z \sim x^*$ 时，定义 $U(z)=1$.

情形 2　当 $x^* \succ z \succ y^*$ 时，由公理 1.8，存在唯一的 $\alpha \in (0,1)$，使得 $[\alpha x^* + (1-\alpha) y^*] \sim z$. 此时定义 $U(z)=\alpha$.

情形 3　当 $z \sim y^*$ 时，定义 $U(z)=0$.

以下表明 U 满足性质(a)和(b).

性质(a)

必要性　假定 $z_1, z_2 \in B$ 且 $z_1 \succ z_2$，要证 $U(z_1) > U(z_2)$.

当 $z_1 \sim x^* \succ z_2 \succ y^*$ 时，由定义，$U(z_1)=1$ 且 $U(z_2)=\alpha$，其中 $\alpha \in (0,1)$ 是唯一满足关系式 $[\alpha x^* + (1-\alpha) y^*] \sim z_2$ 的数. 显然此时 $U(z_1)=1>\alpha=U(z_2)$.

当 $z_1 \sim x^* \succ z_2 \sim y^*$ 时，由定义，$U(z_1)=1>0=U(z_2)$.

当 $x^* \succ z_1 \succ z_2 \succ y^*$ 时，由定义，$U(z_i)=\alpha_i$，其中 $\alpha_i \in (0,1)$ 是唯一满足关系式 $[\alpha_i x^* + (1-\alpha_i) y^*] \sim z_i$ 的数. 现由公理 1.3,

$$z_1 \sim [\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1) y^*] \succ [\alpha_2 x^* + (1-\alpha_2) y^*] \sim z_2.$$

往证 $\alpha_1 > \alpha_2$. 若此式不成立，即 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$，则由公理 1.7

$$[\alpha_2 x^* + (1-\alpha_2) y^*] \succeq [\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1) y^*]$$

从而导出矛盾. 因此必有 $\alpha_1 > \alpha_2$，这样 $U(z_1)=\alpha_1 > U(z_2)=\alpha_2$.

当 $x^* \succ z_1 \succ z_2 \sim y^*$ 时，由定义，$U(z_1)=\alpha_1$，其中 $\alpha_1 \in (0,1)$ 是唯一满足关系式 $[\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1) y^*] \sim z_1$ 的数. 但 $U(z_1)=\alpha_1>0=U(z_2)$.

充分性　假设已知 $z_1, z_2 \in B$，且 $U(z_1) > U(z_2)$，往证 $z_1 \succ z_2$.

当 $U(z_1)=1$，且 $U(z_2)=\alpha_2$ 时(其中 $\alpha_2 \in (0,1)$ 是唯一满足关系式 $\alpha_2 x^* + (1-\alpha_2) y^* \sim z_2$ 的数)，由定义，此时 $z_1 \sim x^* \sim [1x^* + (1-1) y^*]$ 且 $z_2 \sim [\alpha_2 x^* + (1-\alpha_2) y^*]$. 由公理 1.7，因为 $1>\alpha_2$，故 $z_1 \succ z_2$.

当 $U(z_1)=1$ 且 $U(z_2)=0$ 时，由定义，$z_1 \sim x^* \succ y^* \sim z_2$.

当 $U(z_i)=\alpha_i$ 时(其中 $\alpha_i \in (0,1)$ 是唯一满足关系式 $[\alpha_i x^* + (1-\alpha_i) y^*] \sim z_i$ 的数)，$z_1 \sim [\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1) y^*]$ 且 $z_2 \sim [\alpha_2 x^*$

$+(1-\alpha_2)y^*]$. 因为 $\alpha_1 > \alpha_2$,由公理 1.7,$z_1 \succ z_2$.

当 $U(z_1)=\alpha_1$, $U(z_2)=0$ 时,其中 α_1 是唯一满足关系式 $[\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1)y^*] \sim z_1$ 的数. 由定义,$z_1 \sim [\alpha_1 x^* + (1-\alpha_1) \times y^*]$且 $z_2 \sim [0x^* + (1-0)y^*]$. 由公理 1.7 和 1.3,因为 $\alpha_1 > 0$,故 $z_1 \succ z_2$.

这就完成了性质(a)的证明.

性质(b)

必要性　假设 $z_1 \sim z_2$ 但 $U(z_1) \neq U(z_2)$. 那么或者 $U(z_1) > U(z_2)$或者 $U(z_1) < U(z_2)$. 由性质(a),这意味着或者 $z_1 \succ z_2$ 或者 $z_2 \succ z_1$. 从而导出矛盾,因此必有 $U(z_1) = U(z_2)$.

充分性　假设 $U(z_1) = U(z_2)$,但 $z_1 \succ z_2$ 或者 $z_2 \succ z_1$. 由性质(a),$U(z_1) > U(z_2)$或者 $U(z_1) < U(z_2)$. 也导出矛盾,因此由公理 1.2 必有 $z_1 \sim z_2$.

性质 1.12　设函数 $G: R \to R$ 是严格单调增加的正值函数,则复合函数 $G \circ U: B \to R$ 是一效用函数. 其逆也成立.

所以,在不考虑严格单调增加的正值变换的情况下,效用函数是唯一的. 这样的效用函数称为序数效用函数.

性质 1.12 说明了序数效用函数的不唯一性,它有特别重要的意义. 首先,就选择行为而言,所有涉及到效用的问题,都是一个商品束的效用是否比另一个商品束的效用更高一些的问题——高出多少实际上与问题无关. 其次,它意味着我们不能对个体比较效用水平. 例如,假定甲的效用函数为 U_a,乙的效用函数为 U_b. 对提供选择的商品 x, $U_a(x)=10$, $U_b(x)=20$. 这并不意味着,乙对商品 x 的偏好程度是甲的两倍. 这是因为 $U_a^*(x) = 2U_a(x)$也是甲的可行效用函数,但此时 $U_a^*(x)=20$. 所以说效用的绝对值并不重要. 唯一重要的性质是:每个个体对选择集中元素偏好的序关系. 最后,序数效用函数的凹凸性对分辨序关系不起作用.

§2　确定状态资产市场的一般套利定价定理(GAPT)

资产是长期提供服务流的商品．它可以提供消费服务流，如像住房所提供的服务，或者，它也可以提供能用来购买消费品的货币流．提供货币流的资产称为金融资产．我们日常生活中所见到的债券，上市公司股票就是金融资产的例子．债券所提供的服务流就是它所支付的利息流，而股票提供的则是不同形式的现金流，如红利、送配股等．

本节我们将引进基本的资产市场模型，该模型仅有两个投资时刻，记为时刻 0(代表今天)和时刻 1(代表明天)，并假定市场上有 $K+1$ 种资产，第 j 种资产在 1 时刻的价格是确定已知的，记为 x_j，在 0 时刻的价格记为 $p(x_j)$，其中 $j=0,1,\cdots,K$．市场上的所有投资者及资产市场本身满足以下三个假设：

假设 2.1(共同信仰 homogeneous beliefs)　市场上所有投资者都一致认同：资产市场上所有资产在 1 时刻的现金流 $x_j>0, j=0,1,\cdots,K$．

假设 2.2(无摩擦市场 frictionless markets)　资产市场无任何交易成本、税收，无卖空限制(如要求保证金)，资产数量单位无限可分．

假设 2.3(竞争市场 competitive markets)　投资者都是价格承受者(price taker)，即任何投资者的投资行为都不会影响市场资产的价格，也就是说市场不存在价格垄断．

定义 2.4(投资组合 portfolio)　假定投资者投资于第 j 种资产的数量为 N_j，$N_j>0$ 代表买入(或称作多)，$N_j<0$ 代表卖出(或称作空)，那么称向量 $(N_0,N_1,\cdots,N_k)$ 为投资者的投资组合．

定义 2.5(资产组合 portfolio)　设

$$w_j=\frac{N_j x_j}{\sum_{i=0}^{K} N_i x_i},\quad \text{或}\ w_j=\frac{N_j p(x_j)}{\sum_{i=0}^{K} N_i p(x_i)},\quad j=0,1\cdots,K, \tag{2-1}$$

称向量 $w=(w_0,w_1,\cdots,w_K)^t$ 为投资者的资产组合.

需要说明的是,英文单词"portforlio",在中文中既可翻译作投资组合,亦可翻译作资产组合,为了今后问题讨论的方便,本书以后的"投资组合"与"资产组合"的概念均由定义 2.4 和 2.5 所给出. 注意资产组合满足 $\sum_j w_j=1$,而投资组合不满足这个归一性条件.

定义 2.6(套利机会 arbitrage opportunity)　一个套利机会是满足以下三个条件之一的投资组合 $(N_0,N_1,\cdots,N_k)$,

(1)　$p(\sum_{j=0}^K N_j x_j)\neq\sum_{j=0}^K N_j p(x_j)$,　(2-2a)

(2)　(a)　$\sum_{j=0}^K N_j p(x_j)\leqslant 0$　且(b)　$\sum_{j=0}^K N_j x_j>0$,　(2-2b)

(3)　(a)　$\sum_{j=0}^K N_j p(x_j)\geqslant 0$　且(b)　$\sum_{j=0}^K N_j x_j<0$.　(2-2c)

如果市场不存在套利机会,则称市场是无套利市场.

在以后的讨论中,我们对所讨论的市场给出以下重要假设:

假设 2.7　资产市场不包含任何套利机会. 此时,价格函数满足以下关系:

(1)　$p(\sum_{j=0}^K N_j x_j)=\sum_{j=0}^K N_j p(x_j)$

对所有可能的 $N_j(j=0,1,\cdots,k)$,　(2-3a)

(2)　假如 $\sum_{j=0}^K N_j x_j>0$ 那么 $\sum_{j=0}^K N_j p(x_j)>0$.　(2-3b)

称(2-3a)为无套利的价值可加性条件. 条件(2-2)的共同之处在于说明,所谓套利机会是指投资者可以在 0 时刻不花钱而在 1 时刻稳获正的利润. 现对(2-2)的三个条件进行解释. 假如一投资组合包括 N_1 单位的资产 1 和 N_2 单位的资产 2 作为其交易策略. 此资产组合在 0 时刻的价格为 $p(N_1x_1+N_2x_2)$. 假如

$$N_1p(x_1)+N_2p(x_2)\neq p(N_1x_1+N_2x_2),$$

不妨假设 $N_1p(x_1)+N_2p(x_2)<p(N_1x_1+N_2x_2)$,那么一位有心的投资者将采取以下策略:卖空 $(N_1x_1+N_2x_2)$ 单位的资产,然后分别买入 N_1 单位的资产 1 和 N_2 单位的资产 2. 在 0 时刻该投