高等工程专科学校试用教材

工科数学

第二册

(线性代数与概率统计)

吴圣沂　吾用仪　胡映电　编
蔡燧林　主审

中国计量出版社

高等工程专科学校试用教材

工 科 数 学

第 二 册

（线性代数与概率统计）

吴圣沂 吾用仪 胡映电 编

蔡燧林 主审

中国计量出版社

新登（京）字024号

内 容 提 要

本书是根据大专课程指导委员会专科数学“教学基本要求”,并结合工科数学教学实践和作者长期从教经验所编的。全书共两册，本书为第二册，内容为线性代数与概率统计两部分，包括：行列式、矩阵、线性方程组、特征值、二次型、随机变量、数字特征、参数估计、假设检验及回归分析等。第一册为高等数学。

本书既保证了数学教材的系统性与完整性，又体现了工科大专的教学特点，做到重点突出、循序渐进、学以致用。为启迪学生思维、提高解题能力，每章有例题选解和习题，可作习题课内容，也可作自学材料。本书除作大专或相近院校的教材之外，也可供中专以上水平工程技术人员参阅和自学。

高等工程专科学校试用教材

工 科 数 学

第二册

（线性代数与概率统计）

吴圣[illegible] [illegible]用仪 [illegible]晓[illegible] 编

蔡燧林 主审

责任编辑 王晓莹

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲2号

中国计量出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本850×1168/32 印张 10.125 字数274千字

1992年11月第1版 1992年11月第1次印刷

印数 1—5,000

ISBN 7-5026-0530-4/TB·405

定价 6.50元

编　者　的　话

近几年来，我国普通高等专科教育有了很大的发展，且越来越受到社会的重视。我们在组织实施专科的数学教学中，深感有一套从专科培养目标出发且便于教学的适宜教材的急迫性。5年前，我们为此成立了教材编写组，随即编印了讲义。在编写中，注意了力求反映我们30余年工科数学教学的经验，且边试用边修改。特别是在大专课程指导委员会颁发专科数学各科的“教学基本要求”以后，我们又重新全面地作了审核修订，终于在中国计量出版社的大力支持下定稿出版。

本教材从大专的要求出发，本着以应用为目的，以必需够用为度。因此，教材中涉及的知识覆盖面较宽，保持了数学自身的系统性、逻辑性。重点讲清基本概念和基本方法，适当减弱了严密的理论推证，尽量采用形象、直观的说理和从特殊到一般的论述方法，符合认识规律。在编写风格上融会了讲课和习题课的特点，力求做到启发引导思路，分析讲解清楚，归纳总结解题方法与步骤。每章后面还配有例题选解，适当增加难度，开拓解题思路。在教学过程中它又可以灵活使用，既可选作习题课的内容，又可作为学生的自学材料，对理解正文甚有帮助。

本教材分第一、第二两册。第一册是高等数学部分，内容包括：一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数等十二章。第二册是线性代数与概率统计部分，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、特征值、二次型、随机变量、数字特征、参数估计、假设检验及回归分析等十二章。

参加本教材审稿的有：浙江大学蔡燧林教授（主审）、丁善瑞副教授、中南工业大学关家骥教授、中国计量学院叶维平副教

DA44 8/28

授、湖北汽车工业学院沈恒范教授.他们仔细酌句地审阅了全文，提出了许多宝贵的修改意见，在此，我们表示衷心的感谢。

本教材是集体劳动的成果，在几经试用—讨论修改的基础上，分别由胡映电（第一册的第1—4章和9—11章）、吾用仪（第一册的第5—8章和第12章）、吴圣沂（第二册）提出了初审的修改稿和复审后的定稿，吴圣沂完成了发稿前全书的统稿。在编写过程中得到了中国计量学院数学教研室的大力支持和帮助，陈育旺同志曾参加了高等数学初稿编写的部分工作。限于编者水平，缺点、错误以及疏漏之处在所难免，诚请读者批评指正。

编者

1991年9月于杭州

目　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率统计

第一部分　线 性 代 数

第一章　n 阶 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，它是在求解线性方程组中引入的，现在，它在数学理论和解决实际问题中都有着广泛的应用。

本章我们将在第一册第八章第一节介绍过的二、三阶行列式的基础上推广到 n 阶行列式，并讨论它在求解线性方程组中的应用。

第一节　n 阶 行 列 式

一、n 阶行列式的定义

在第一册的第八章第一节，我们定义了二阶行列式，并用二阶行列式定义了三阶行列式。仿此，可以利用三阶行列式定义四阶行列式，由此类推，我们给出 n 阶行列式的归纳法定义。

定义 1　二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1\text{—}1)$$

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} \qquad (1-2)$$

设 $n-1$ 阶行列式已有定义，则定义 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n}\\ a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n}\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\cdots a_{2n}\\ a_{31} & a_{33}\cdots a_{3n}\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ a_{n1} & a_{n3}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{1n}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n-1}\\ a_{31} & a_{32}\cdots a_{3n-1}\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn-1}\end{vmatrix}$$

$$(1-3)$$

例1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 6 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

解 按定义

$$D=0\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & -2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 6 & -2\end{vmatrix}$$

$$-3\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 6 & 4\end{vmatrix}=75+180-105=150$$

二、n 阶行列式的性质

我们指出，根据归纳法原理可以证明，二阶、三阶行列式所具有的性质，n 阶行列式同样具有。现将这些性质推广到 n 阶行列式，并叙述如下：

性质1 行列式与它的转置行列式相等。

将行列式D中的行依次换成同序号的列所得的行列式D'称为行列式D的转置行列式，那么$D=D'$。它表明在行列式中凡是对行成立的性质对列也同样成立，反之也对。

性质2 互换行列式的任意两行（列），行列式仅改变正负号。

性质3 如果行列式有两行（列）对应元素完全相同，则行列式为零。

性质4 如果行列式某一行（列）的所有元素乘以数k,则等于用数k去乘这个行列式。

推论 如果行列式中有一行（列）的元素全为零，则此行列式为零。

性质5 如果行列式中有两行（列）对应元素成比例，则行列式为零。

性质6 如果将行列式中第i行的每一元素写成两项的和：

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

那么这行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的第i行，一个是$b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$，另一个是$c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$，其他各行都与原行列式相同。

类似地，此性质对列也成立。

性质7 把行列式的某一行（列）的各元素乘以数k后加到另一行（列）的对应元素上去，行列式不变。

利用行列式的性质，可以简化行列式的计算，读者要较熟练地掌握运用这些性质。

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

解 由性质7把D中的第三行加到第二行上去，然后再把第四行加到第二行上去，得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&5&4&4\\2&3&1&2\\3&1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\6&6&6&6\\2&3&1&2\\3&1&2&2\end{vmatrix}$$

由性质 5 知 $D=0$。

例 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}b&a&a&a\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\a&a&a&b\end{vmatrix}$$

解　把D中的第二、三、四各列同时加到第一列上去，再提出公因子 $(b+3a)$，然后第一列乘以 $(-a)$ 分别加到第二、三、四各列，得

$$D=\begin{vmatrix}b+3a&a&a&a\\b+3a&b&a&a\\b+3a&a&b&a\\b+3a&a&a&b\end{vmatrix}=(b+3a)\begin{vmatrix}1&a&a&a\\1&b&a&a\\1&a&b&a\\1&a&a&b\end{vmatrix}$$

$$=(b+3a)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&b-a&0&0\\1&0&b-a&0\\1&0&0&b-a\end{vmatrix}$$

$$=(b+3a)\times 1\times\begin{vmatrix}b-a&0&0\\0&b-a&0\\0&0&b-a\end{vmatrix}$$

$$=(b+3a)(b-a)^3$$

三、行列式的展开

阶数越低的行列式越容易计算，行列式的阶数高了，其计算往往十分复杂。譬如，二阶行列式就比三阶行列式要容易计算得

多。又由 n 阶行列式的定义知，n 阶行列式可转化为 n 个 $n-1$ 阶行列式来进行计算，即可以由高阶向低阶转化。现在，我们来导出将高阶行列式转化为低阶行列式计算的一般方法。

1. 余子式和代数余子式

定义 2 在行列式中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所留下的行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。在 M_{ij} 前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}。即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

元素 2 位于行列式中第二行第三列，那么 2 的余子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

2的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

又如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由此，三阶行列式（1—2）可表成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

同理，n阶行列式（1—3）可表成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \tag{1—4}$$

这可叙述为：行列式等于它的第一行各元素与它对应的代数余子式乘积的和。

2. 行列式的展开

表达式（1—4），称为行列式按第一行展开式。这个结果我们可以推广到按行列式中的任一行展开，以三阶行列式为例，设

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

由式（1—2）可得

$$D = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_{11} + a_2A_{12} + a_3A_{13}$$

交换D中的第一、第二行，然后由式（1—2）有

$$D = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{b_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\right.$$

$$+b_3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\Bigg)$$

$$=b_1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+b_2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+b_3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

因为在行列式 D中

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

所以

$$D=b_1A_{21}+b_2A_{22}+b_3A_{23}$$

同理可得

$$D=c_1A_{31}+c_2A_{32}+c_3A_{33}$$

将上述推理推广，对于一般 n 阶行列式，我们有下面重要定理。

定理 1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于任一行中所有各元素与它的代数余子式乘积的和。即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1—5}$$

称此式为行列式 D按第 i 行展开式。

因为行所具有的性质列同样具有，所以在定理 1 中，将行换成列，就得到行列式按任一列的展开式

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1—6}$$

譬如，行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

按第二行展开，得

$$D=(-4)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}+3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-4+18-4=10$$

按第三列展开，得

$$D=2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+5(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-36-4+50=10$$

例 4　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 1 & 6 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

解　因为行列式D中的第三行有三个元素是零，且零乘它的代数余子式仍为零，所以零的代数余子式就不必计算。为此，我们选择按第三行展开，得

$$D=0+0+0+3(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 6 & 4\end{vmatrix}=-105$$

特别地，对于下三角形行列式D_1及上三角形行列式D_2，显然其值等于它的主对角线上各元素的乘积。即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \quad \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

通过例4看到，如果在行列式某一行（列）的元素中出现的零越多，则计算越简便，因此在将行列式展开前，利用行列式的性质，等值地把某一行（列）的元素多化出一些零来，再按这一行（列）展开，计算就容易得多。

例5　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解　利用性质7，将第一行乘以（-1）分别加到第二、四行上去，然后按第一列展开，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

再把右边三阶行列式的第一行乘以（-1）加到第二行上，然后按第一列展开，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=9$$

定理1表明了行列式D等于第i行各元素分别与它的代数余子式乘积的和。如果是行列式D的第j行各元素分别与第i行对应元素的代数余子式乘积的和，即表达式

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}\quad(i\neq j) \qquad (1-7)$$

其结果又是什么呢？不难看出，比较式（1—7）与（1—5）两