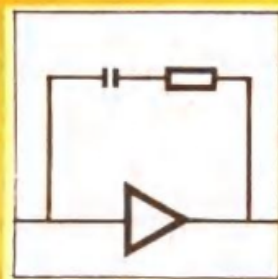


高等学校试用教材



# 电机电磁场的 分析与计算

上海工业大学胡之光 主编



机械工业出版社

**电机电磁场的分析与计算**

上海工业大学胡之光 主编

\*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

\*

开本  $787 \times 1092 \frac{1}{16}$  · 印张  $16 \frac{1}{2}$  · 字数 406 千字

1982 年 2 月北京第一版 · 1982 年 2 月北京第一次印刷

印数 0,001—7,000 · 定价 1.70 元

\*

统一书号: 15033 · 5103

## 前 言

本书是根据1978年4月在天津召开的高等院校一机部对口专业座谈会的精神，和1978年6月在长沙召开的电机专业教材会议制订的《电机电磁场的分析与计算》编写大纲编写的。

《电机电磁场的分析与计算》是电机专业新设置的选修课，它的任务是介绍求解电机电磁场的主要方法，用这些方法进行电机电磁场的分析和计算，并且解决某些电机性能和设计计算方面的实际问题。

全书共分四章。电机电磁场的理论基础、解析法、数值解法 I —— 差分法和数值解法 II —— 有限元法。重点放在电机电磁场的数值解法，特别是有限元法。本书着重二维场的分析，兼顾直角和圆柱坐标系统，并包括非线性媒质和涡流反应等方面的内容，使体系比较完整。书末有四个附录，附录 I 为矢量运算公式，附录 II、III、IV 为电机电磁场数值解法的计算程序，以供读者进行具体计算时参考。

本书是按60学时的讲授时数为参考而编写的。由于本课程的内容比较丰富，编写时适当地增加了一些内容和分量，各学校可以根据各自不同的情况，灵活掌握，将书中内容加以取舍，以利教学。书中标有\*号的章节是编者建议选教的内容，仅供参考。

本书可作为高等学校电机专业的试用教材，也可作为有关研究单位和工厂的技术人员参考。

本书由上海工业大学胡之光同志主编，华中工学院周克定同志和上海工业大学屠关镇同志参加编写，由清华大学陈丕璋同志主审。书稿编写的分工如下：胡之光同志编写绪论，周克定同志编写第一章、第二章和附录 I，屠关镇和胡之光同志编写第三章、第四章和附录 II、III、IV。全书由胡之光同志进行了修改和整理。本书责任编辑是刘家琼同志。

本书于1980年6月在九江召开的审稿会议上通过。参加会议的有一机部教育局、一机部情报研究所、一机部教材编辑室、天津大学、太原工学院、江西工学院、安徽机电学院、西安交通大学、华中工学院、合肥工业大学、重庆大学、浙江大学、清华大学和上海工业大学的代表。陈丕璋同志和参加审稿会议的同志对本书提了很多宝贵意见，编者谨向他们致以深切的谢意。在本书的编写过程中，全国设有电机专业的高等学校、有关研究单位和工厂，给予很大的关怀、帮助和支持，编者在此一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，书中难免有不妥或错误之处，衷心欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。

1980年10月

# 目 录

前言	
绪论	1
§ 0-1 电机内的电磁场问题	1
§ 0-2 研究电机电磁场问题的方法	3
第一章 电机电磁场的理论基础	8
§ 1-1 麦克斯韦方程组和坡印亭矢量	8
§ 1-2 场矢量 $E$ 、 $B$ 和 $J$ 的微分方程	13
§ 1-3 标量位及其微分方程	16
§ 1-4 矢量磁位及其微分方程	17
§ 1-5 缓慢运动导电媒质中的电磁场 方程	23
§ 1-6 边界条件	25
§ 1-7 磁场中的电磁力	28
§ 1-8 非线性问题	32
第二章 解析法	36
§ 2-1 许-克变换法	36
§ 2-2 许-克变换法的应用	40
§ 2-3 分离变量法	45
§ 2-4 分离变量法的应用	50
§ 2-5 电机中的电磁能量及其传递*	62
§ 2-6 电机铁心中的电磁场及其引起的 涡流损耗*	65
§ 2-7 电机矩形槽内导体电流的集肤效应 及其引起的阻抗变化	71
§ 2-8 直线异步电机纵向边端效应的分析*	79
第三章 数值解法 I —— 差分法	87
§ 3-1 直角坐标系的平面稳定磁场	87
§ 3-2 边界条件、交界条件和周期性 条件的处理	110
§ 3-3 非线性问题的处理	122
§ 3-4 圆柱坐标系的稳定磁场*	126
§ 3-5 似稳交变电磁场*	136
§ 3-6 计算实例*	138
第四章 数值解法 II —— 有限元法	144
§ 4-1 概述	144
§ 4-2 平面稳定磁场	151
§ 4-3 周期性条件的处理	167
§ 4-4 线性代数方程组的一些解法	172
§ 4-5 非线性问题的求解	181
§ 4-6 面积座标以及利用面积座标 的积分*	191
§ 4-7 轴对称稳定磁场*	199
§ 4-8 似稳交变电磁场*	208
§ 4-9 计算实例*	216
附录 I 矢量运算公式	234
附录 II 气隙、齿、槽磁场的差分法 计算程序	239
附录 III 线性稳定磁场的有限元法计 算程序	245
附录 IV 非线性稳定磁场的有限元法 计算程序	252

# 绪 论

## § 0-1 电机内的电磁场问题

当电机运行时，在它的内部空间，包括铜与铁所占的空间区域，存在着电磁场。这个电磁场是由定、转子电流所产生的。电机中电磁场在不同媒质中的分布、变化以及与电流的交链情况，决定了电机的运行状态与性能。因此，研究电机中的电磁场对分析和设计电机具有重要的意义。

在传统的电机学和电机设计的课程中，习惯地把电机的分析和计算归结为电路和磁路问题。但是，电路中的各个电抗参数却是从电机电磁场的场量转化过来的，甚至电阻参数也和场量有关；磁路计算的本身就是磁场场量的计算，不过是对磁场先假定了比较简单和规则的分布，于是可以不要逐点计算，而只要分段计算。因此，这种分析方法实质上是场路相结合的，而最终用路的形式来表达而已。不过，在过去的一段时期，参数的计算是在一定的简化假设下来求取的，或者再根据实际试验的结果进行修正；在磁路的计算中，对于某些起一定影响的因素，如槽口对气隙磁场的影响、饱和对气隙磁场的影响、轭部磁场分布等，则用简化公式或图表作近似处理。在这些条件下，虽然对电磁场的分析不是严密的，但可以方便地计算电机的电动势、电磁转矩、参数和损耗，从而简化了电机的设计和性能分析。对于大部分常见的电机，这种方法虽然是近似的，但还是有效的。从电机整体来看，计算和试验结果的误差不大。当然，随着时间的推移，上述的简化处理和近似计算也在不断地改进，计算精度逐步地在提高。

由于当前科学技术的促进，大型和特种电机有很大的发展。对大型电机来说，其结构复杂庞大，电机中某些突出的局部问题，如局部过热、局部应力集中等，迫切需要解决，而且，电机的性能计算的精度日益要求提高，于是，传统的分析计算方法就感到不足。而如果先从电磁场理论入手，研究场的分布，再根据课题的要求进行计算，就有可能得到满意的结果，因为电机设计的合理性、可靠性和经济性，无不与场的分布有关。对特种电机来说，例如对实心转子的同步电机和异步电机、高速或大气隙的直线电机、超导电机、磁流体电机等进行分析，由于其结构特殊，用传统的方法就难以收效，因此也需要从电磁场理论入手，研究场的分布，再进一步计算其性能。在这种分析方法中，需要逐点求取场量，虽然有时仍需要用场路相结合的办法来处理，但比传统的方法提高了一步。

总之，从生产发展的需要来看，对电机的分析和计算要求从“细”、“深”、“精”方面提高，于是电机电磁场的分析和研究就成了当前电机工业中的重要课题。其实，这些研究还可以直接应用到强磁场线圈，电磁悬浮等装置，从而扩大到原子能工业、交通运输工业等方面。

电机内的电磁场从它的分布区域及其作用来看，大致可分为：（1）气隙磁场；（2）凸极同步电机磁极间的漏磁场或直流电机主磁极与换向极间的漏磁场；（3）槽内漏磁场；（4）绕组端部电磁场；（5）叠片铁心中的磁场；（6）实心转子（包括阻尼条）中的电磁场等。但

是，从理论分析的角度来看，电机内各部分电磁场的差别仅在于具有不同的边界条件，所考虑的区域中是否有场源，媒质是否导磁、导电或兼而有之，以及电磁场是否随时间而变化。对于电机中的交变电磁场，由于其变化频率很低，电磁场的源点与场点间的距离比电磁波的波长要小得多，因此位移电流可以忽略不计，属于似稳电磁场的范畴。

气隙中的磁场是耦合定子和转子的磁场。电机运行时，在气隙磁场作用下，电枢绕组就会感应电动势，转子上就会受到电磁力的作用，从而实现机电能量的转换。在一般的电机中，相对于磁极极距的尺度来说，气隙是很小的，并且是均匀的，因此其磁感应强度（即磁通密度）或磁场强度一般只考虑径向分量，且认为沿电机的轴向是不变的。但是，实际问题是比较复杂的，在分析与计算气隙磁场时有许多因素要加以考虑。例如：电机的轴向长度毕竟是有限的，在轴向两端的气隙磁场会扩散到铁心外面的空隙中，一般称之为边缘效应；在容量较大的电机中，把定子铁心、转子铁心或定转子铁心分成几段，段间的空隙作为径向通风沟，通风沟的存在使气隙磁场在轴向就有变化；一般交直流电机的电枢绕组都嵌放在开槽的铁心里，电枢的开槽改变了气隙磁场沿周向的分布；在直流电机或同步电机中，气隙长度沿周向有时不是均匀的，气隙磁场沿周向的分布与各点的气隙长度有关；在一些特殊的电机中（如定转子之间屏蔽的电机、作为电磁泵的直线电机、超导电机等），其气隙较大或者特殊，这时气隙磁场就不能近似地认为只有径向分量，而应该用二维或三维场来表达；在直线电机中，铁心在沿磁场行进的方向是不连续的，由于运动导体在进入或离开气隙磁场时所产生的电磁感应，使气隙磁场沿行波磁场方向发生变化，一般称之为纵向边缘效应。因此，对于气隙磁场，要根据具体的边界条件，定转子电流的分布和变化，甚至有时还要计及气隙两边铁心的饱和程度，才能比较准确地把场量各个分量的数值及其变化计算出来。

凸极同步电机磁极间的漏磁场或直流电机主磁极与换向极间的漏磁场，影响主磁极或换向极铁心的饱和程度，并且也是决定励磁绕组漏电感的依据。因此，它与励磁绕组的设计、同步电机瞬态过程中的性能以及直流电机的换向状态密切相关。一般用一个漏磁系数来考虑漏磁场的影响。但是，由于极间的漏磁场基本上是二维场（实际上是三维场），因此由一维场近似计算或由经验所得到的漏磁系数就显得比较粗糙。准确的计算要根据具体的边界条件用磁场分析来得到。

槽内漏磁场是由槽内的电流引起的，无论是交流电机还是直流电机，相应的交变漏磁场不但匝链导体而有电磁感应作用，并且还在导体内产生涡流，使导体中的电流分布不均匀，有效电阻增大。因此，它决定电机的槽漏电感并影响槽内导体的损耗。槽内漏磁场的计算不但要根据槽形的几何尺寸，并且还要考虑槽内导体的涡流反应。

绕组端部的电磁场是由绕组端部的电流引起的，同时，与气隙上的磁位差有关。它是计算端部漏电感，端部结构件的涡流损耗和在故障状态下绕组端部机械应力等问题的出发点。随着电机的容量日益增大，这些问题的研究就愈加显得迫切。由于端部磁场是一个三维场，同时定转子端部电流的分布比较复杂，还加上端部结构件具有涡流反应，因此它的分析和计算比较困难。但是近年来在这方面已取得了很大的进展，获得了满意的结果。

电机定转子叠片铁心内的磁场是决定所需励磁磁动势的依据之一，它的大小和分布关系到铁心材料的利用率。如果这个磁场对铁心中的固定点来说是交变的，那末它也是计算铁耗的依据，关系到铁心的发热。由于铁心由相互绝缘的硅钢片叠成，因此在计算其磁场时可以不计及涡流反应。但是，叠片形状一般比较复杂，因此所构成的边界条件也比较复杂。除此

之外，还要考虑铁心的饱和，也就是说要考虑铁中磁感应强度与磁场强度间的非线性关系。

在实心转子的同步电机和异步电机中，实心铁心的电磁场是研究参数、损耗或电磁转矩的出发点。在分析时，除了要考虑所给定的边界条件外，还必须考虑涡流效应，甚至还要考虑非线性关系。

综上所述，电机的电磁场问题是复杂的，也是重要的。要准确地进行计算虽然是困难的，但也是必要的。

求解电机电磁场的方法随着客观的需要和当时的科技水平逐步地在发展，但是，在过去一个阶段，一般来说还不能令人满意。近年来计算机应用日益普及，数值解法显示出很大的优越性，它几乎可以解决电机电磁场中目前的所有问题，并且可以达到足够的精度。在数值解法中，还有不同的计算方法，各有其特点，它们的本身也在发展着。因此，近十多年来，借助于数值解法，国内外对电机电磁场的研究取得了丰硕的成果。

应用于电机分析的电磁场理论基于麦克斯韦方程组。在导电媒质中，对于似稳电磁场，麦克斯韦方程可以化成扩散方程（即热传导方程），研究实心转子或导体中的涡流时都可以从扩散方程出发去求解；在非导电媒质中，或者可以忽略导体中的涡流时，麦克斯韦方程可以进一步化成泊松方程（有场源的区域）或拉普拉斯方程（无场源的区域），研究气隙磁场、极间漏磁场或叠片铁心内的磁场时，都可以从拉普拉斯方程或泊松方程出发去求解。

## § 0-2 研究电机电磁场问题的方法

电机电磁场的计算一般归结为某些偏微分方程的求解。求解偏微分方程必须结合具体问题中的特定边界条件（对于变化电磁场还要结合初始条件）才能获得唯一的解答。但是，求解的过程是复杂的，困难的，有的迄今还在研究。总的来说，求解电机电磁场的偏微分方程所遇到的困难有三个方面：（1）由铜、铁和自由空间所组成的边界形状曲折多变，因此边界条件相当复杂；（2）导磁材料中磁感应强度与磁场强度间的关系是非线性的；（3）严格地说电机电磁场是三维的。因此，长期以来，对电机电磁场的分析是局部的、简化的和近似的，不过，它的准确程度是在逐步提高。

求解偏微分方程的各种数学方法都可以应用于求解电机电磁场问题，因此方法很多。这里只列举一些比较常见的方法。求解电机电磁场的方法大致可以分成解析法、图解法、模拟法和数值计算法四类。这些方法都有效地解决了不少问题，各有其适用的场合，但是也各有不足之处。它们正在继续发展。

### 一、解析法

解析法是设法找到一个连续函数，将它和它的各阶偏导数（它们也是连续函数）代入求解的偏微分方程后应得到恒等式；并且在初始状态下以及在区域的边界上它应等于所给出的定解条件。这种求解偏微分方程的定解问题的方法于19世纪中在数学上已经形成了一般理论，并且在本世纪初已经应用于电机电磁场的计算。解析法能获得精确解，但是只能应用于比较特殊的边界情况，对于某些实际电机的电磁场问题常常无能为力或收效甚微。因此，解析法的应用范围受到一定的限制。

对于铁磁物质区域中电磁场的偏微分方程，最简单的处理方法是假定其磁导率 $\mu$ 等于某一常数，但是这样有时会引起较大的误差。如果要计及铁心饱和的影响，可以用分段线性化

法、理想矩形磁化曲线法或高次抛物线法。显然，这又将增加求解的复杂程度。

应该指出：有时解析法所得的解冗长而复杂，以致难以计算，但现在可以通过计算机而得到其结果。因此，解析法和计算机的应用相结合是当前值得注意的一种有效办法。

在解析法中包括下面的一些方法。

#### (一) 直接法和镜象法

在电机电磁场问题中，最简单的一类问题是求解无界自由空间中载流导体的稳定磁场，这时可以直接用积分的方法求出，这种方法称为直接法。在应用麦克斯韦方程求解磁场时，有时可以直接求出磁感应强度，有时还需要引入一个新的场量，使它和磁感应强度有确定的函数关系，先求出这个新的场量，然后再求出磁感应强度。用这个方法可以求出圆导线、矩形导线、电流片或空心导线等所产生的磁场。

由于电机的电磁场实际上不是无界的，所以上面的直接法还不能直接应用。电机中的磁场问题大都具有由铁磁媒质所形成的边界，这时，在载流导体所产生的磁场作用下，铁磁边界将被磁化，从而对原先的磁场分布产生了影响，最终的磁场分布将由载流导体所产生的磁场和磁化的铁磁边界所产生的磁场共同确定。当所研究的区域有不同的媒质时，有两种处理方法。一种方法是按其媒质间的界线把整个区域划分成几个小区域，每个区域有相应的偏微分方程，其区别仅在于不同的媒质具有各自的磁导率，在两种媒质交界处，根据这里的边界条件把电磁场联系起来。这个方法具有一般意义。还有一种方法是镜象法。

镜象法是在研究某一种媒质中的磁场时，将不同媒质间的边界条件用一个（或一组）镜象电流来等效，从而取消原有的边界，使其成为同一媒质的无限区域的磁场。这就是将由载流导体产生的在两种媒质内的磁场问题转化为处于一种均匀媒质内的由载流导体及其镜象电流共同产生的磁场问题。这样就有可能用直接法求解。镜象法一般用于稳定磁场或不考虑金属壁中涡流的似稳磁场，并且限于比较特殊的边界面，如一个或两个相互平行或垂直的铁磁平面。镜象法在电机中可用来计算绕组的端部磁场，这时将铁心端板作为镜面，对计算起一定的简化作用。但是，用镜象法所解决的问题是有限的，因为它只依靠少数参数来满足边界上每一点的边值要求，这并不是经常可能的。

#### (二) 保角变换法

对于二维空间中具有多边形边界（可以是不封闭的），无电流区域的磁场问题，可以借助于复变函数中的保角变换法来求得解。保角变换法就是把一个二维场问题通过某一解析函数变换到另一个二维场问题，如果后者是足够简单的已知场，那末通过这个解析函数就可以知道前者的场而写出其表达式。当然，关键在于如何找到所需要的解析函数。

在保角变换法中，对电机工程最有用的是许瓦尔兹-克利斯托夫变换，这种变换是根据给定的平面上多边形的形状和尺寸，用一个统一的方法，找到适当的解析函数，将场的图形进行变换。应用许瓦尔兹-克利斯托夫变换可以求气隙磁场的边缘效应，凸极同步电机极间的漏磁场，电枢开槽时的气隙系数（即卡氏系数），电枢槽内和气隙的磁场分布，以及转子偏心时的气隙磁场等等，所得的结果迄今还用在电机设计中，所以这是一个很有用的方法。但是，这个方法一般仅用于二维的无源场。

#### (三) 分离变量法

对于具有两个（或两个以上）自变量的偏微分方程，求解的基本思想是设法将其自变量个数减少，而使方程变成较简单的形式。基于这种思想的求解方法很多，在解决电机电磁场问题



时，分离变量法较为常用。分离变量法，又称傅里叶方法，是假定待求的函数由两个（或两个以上）各自仅含一个坐标变量的函数相乘所组成，代入原来的偏微分方程，通过“分离”，将原来的偏微分方程转换为两个（或两个以上）常微分方程，求解各常微分方程，并由给定的边值决定其中的待定常数和函数，即得到其解。

当边界线和场源位置与坐标系的某一座标轴线有一定的关系时，分离变量法往往是一种有效而简便的方法，特别在区域为矩形、柱面、球面等情况下使用更为普遍。分离变量法也存在不足之处，这种方法对边界的限制比较苛刻，也就是说，对复杂的边界条件难以收效。

用分离变量法进行电机电磁场的计算曾经作过不少工作，富有成果，如为使气隙磁场为正弦分布时的凸极同步电机极靴外形计算，铁心、铁轭中的磁场分布，有齿槽时电枢中的磁场分布，矩形槽或圆形槽中的电磁场，绕组端部的电磁场，实心转子中的电磁场，直线电机气隙中的电磁场等等。但是，总的来说，它所解决的问题还是局部的、经过简化的。

## 二、图解法

电机中的稳定磁场问题还可以用图解法来近似求解，它是根据稳定磁场的特性画出磁场的等位线和磁力线，从这些曲线分布的密集或稀疏的程度得出磁场的强弱。在电机电磁场的边界形状比较复杂，用解析法遇到困难的情况下，图解法得到了发展和应用，它在一定条件下就成了有效的方法。它比较形象、直观，也便于掌握，但是，作图时要经过多次修改才能得出比较满意的图形，而在精度方面较差。

不论区域内有无电流存在，也不论媒质是否线性，原则上都可以应用图解法。但是，对于有电流的区域或非线性媒质，图解法非常繁复，因此它一般仅用于在无电流区域的线性媒质中求解二维稳定的磁场或忽略涡流效应的磁场，如电枢开槽时的气隙磁场，凸极同步电机的极间漏磁场，直流电机的换向区域磁场等等。

图解法在一定场合下是能够满足工程需要的，但是要凭借眼力来判断其准确性，要依靠手画的技巧和经验，所以也存在着很大的局限性。如果对于作图没有一定的经验，也可能画不出磁场图或达不到工程的要求。

## 三、模拟法

模拟法是用某种装置来模拟所求解的问题，通过测试来获得它的解答。它既能解决稳定磁场问题，也能解决交变电磁场问题。对于边界形状比较复杂的电机电磁场问题，当用解析法难以获得其解，而用图解法又嫌其精度不够时，模拟法得到了发展和应用。尤其在电子计算机获得普遍应用之前，模拟法因其应用范围较广，解的精度较高，就成为受到重视的一种方法。目前，模拟法依然得到应用。不过，应用模拟法要有一套模拟设备和测量仪表，而模拟设备因不同的要求和不同的参数范围而有所不同。

模拟法有数学模拟和物理模拟两种。

### （一）数学模拟

数学模拟是利用同样的微分方程由一种场的问题来模拟另一种场的问题，通过实测而获得其解。由于数学的表达式相同，尽管不同的场有不同的物理量，方程中的参量也具有不同的物理性质，但只要物理过程的边界条件和初始条件是相似的，那末，它们的解也是相似的。于是，从一种场中用测量方法所获得的解就可以推算出另一种场中的解。例如，无源的电流场满足拉普拉斯方程，有源的电流场满足泊松方程，而在导电纸、电解槽或电阻网络中的电流场分布可以通过逐点测量来获得，那末，满足拉氏方程或泊松方程的磁场，在相似的边界

条件下,可以利用它们来模拟,根据其对应关系而算出磁场分布。对于满足扩散方程的电磁场问题,可以用在导电纸、电解槽或电阻网络中联接电容后的电流场来模拟。用电阻电容网络模拟还可以解非线性问题。模拟法的应用范围很广,除了用于电磁场以外,还可以用于力场、流场、温度场等方面。模拟法可以达到较高的精度,但是必须要有较高精度的模拟装置与测试设备与之相适应。电机中的电磁场问题从原理上讲大多可以用模拟法来解决,但是在实用上除了受到复杂的模拟设备的限制外,对于三维场和非线性场的模拟还有一定的困难。

## (二) 物理模拟

物理模拟是用具有不同的几何尺寸、不同的频率的模型对实物进行模拟。显然,在实物上进行的任何电磁过程在模型上应有相对应的过程,而且对应量之间有一定的比例关系,于是,测量模型上的各物理量就可以推算出实物上的相应量。在实际应用中,对电机进行全面模拟是比较困难的,困难在于饱和问题不易模拟,同时还存在机械应力和结构上的问题。因此,往往针对某一问题采用局部模拟。

## 四、数值解法

数值解法是将所求电磁场的区域剖分成有限多的网格或单元,通过数学上的处理,建立以网格或单元上各节点的求解函数值为未知量的代数方程组,通过电子计算机解出这组庞大的代数方程组,从而得到各节点的函数值。由于电子计算机的应用日益普遍,所以电机电磁场的数值解法在近期内有很大的发展,它的适用范围超过了所有其他各种解法,并且可以达到足够的精度。数值解法的发展和运用,是当前值得注意的趋向。

对于电机电磁场问题,常用的数值解法有差分法和有限元法两种。

### (一) 差分法

差分法是将偏微分方程中的偏导数用差商来代替,把求解区域中计算无限多个点上的函数值变为计算有限多个点上的函数值(这个过程称为离散化),以得到其近似解的方法。对于电机中的电磁场问题,差分法是先求解的电磁场区域剖分为有限多个矩形(在直角坐标系中)或扇面形(在极坐标系中)网格,在区域内部所有网格节点上将偏微分方程中的偏导数用差商代替后,得到一个以所有节点磁位值为未知数的代数方程组,称为差分方程组。同时,还要对边界条件进行离散化处理。这样,就把求解区域上的偏微分方程的定解问题转化为一个代数方程组的求解问题。由于有数以千百计的节点数,求解这个代数方程组的工作是极其浩繁的,而近代由于电子计算机的发展和运用,差分法就有了现实意义。解的结果,不是一个在求解区域上连续取值的函数,而是离散节点磁位的近似值。这种近似是由于差分方程代替微分方程所引起的误差和迭代计算时的误差而产生的。如果把网格的大小和迭代误差值控制在一定的范围内,求解的结果可以满足工程计算所需的精度。建立差分方程的方法一般有泰勒级数法和积分法,其中以泰勒级数法比较简单。从原理上讲,电机的电磁场问题大多可以用差分法求解,但在实用上,差分法比较适用于边界条件比较规则的电磁场问题。差分法比较直观,公式和计算程序不太复杂,对边界上的磁位已经给定的情况处理起来比较方便,因此已经得到广泛的应用。差分法本身仍在不断发展。

### (二) 有限元法

有限元法是根据变分原理和离散化而求取近似解的方法。电机中的电磁场问题一般归结为一个偏微分方程的边值问题,但是有限元法不是直接以它为对象去求解,而是首先从偏微分方程边值问题出发,找出一个称为能量泛函的积分式,令它在满足第一类边界条件的前提

下取极值，即构成条件变分问题。这个条件变分问题是和偏微分方程边值问题等价的。有限元法便是以条件变分问题为对象来求解电磁场问题的。与此同时，将场的求解区域剖分成有限个单元，在每一单元内部，近似地认为任一点的求解函数是在单元节点的函数值之间随着座标变化而线性地变化的，因此在单元中构造出插值函数。然后把插值函数代入能量泛函的积分式，把泛函离散化为多元函数。根据极值原理，将能量函数对每一个自变量求偏导数，并令其等于零，便得到一个线性代数或非线性方程组。最后对此方程组由第一类边界条件作修正并借助于电子计算机求解。这是一种比较完善的离散化方法，目前正在不断地扩大其应用范围。从原理上讲，电机的电磁场问题大多可以用有限元法求解。在求解区域边界和内部分界面的形状比较不规则的情况下，用差分法处理边界条件比较困难，而用有限元法可使和边界的逼近较好。对于磁场强度在某些部分变化较大的场合，用差分法时网格难以合理剖分，在这些部分解的精度就较差，而用有限元法时单元的剖分灵活性大，适应性强，解的精度就高。从这些方面来说，有限元法就克服了差分法的缺点，使电磁场的物理特性被保持得更好，其精度得到进一步保证。

用上述各类方法求解电机的电磁场问题，可以解出电磁场的各个场量，如电位 $\varphi$ 、标量磁位 $\varphi_m$ 、矢量磁位 $\mathbf{A}$ 、磁感应强度 $\mathbf{B}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 、电场强度 $\mathbf{E}$ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 等。为了将求得的结果应用于电机的具体分析，还要利用这些算出的场量来计算电机的感应电动势、电磁力、参数、损耗等等。

电机电磁场问题的研究已经有较长的历史，文献极其丰富，不少问题用不同的解法都能得到满意的结果，但是也有一些问题迄今还在研究。虽然各种解法都有其特点，而有它的适用场合，但随着电子计算机的发展和其应用的普及，数值解法的使用必将超过其他解法。本书不准备全面地叙述各种求解方法，罗列各种电机电磁场问题用各种解法所得的结果，而是在阐明电机电磁场的理论基础后，只介绍解析法和数值解法，而且把重点放在数值解法上。书中一些典型的实例虽然也可以作为电机设计和性能分析时的参考，但是更主要的是为了说明这些方法的应用。电机电磁场问题还有不少课题要求得到解决，这将留待读者研究，本书只是希望能起到导引的作用。上面的考虑和安排，目的是想反映出本书是一本教材，而不是一本参考书。

# 第一章 电机电磁场的理论基础

本章的任务是在电工基础、电机学课程的基础上，介绍电机电磁场分析与计算的基础理论。考虑到电机中电磁场的若干特殊应用情况，其内容除了具有复习和总结的性质外，还适当地加以扩大和引伸。

## § 1-1 麦克斯韦方程组和坡印亭矢量

### 一、麦克斯韦方程组

电机中的一切电磁过程都可以从麦克斯韦方程组出发进行分析。从电工基础课程已经知道，它的积分形式是

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = i = \int_a \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (1-1)$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-2)$$

$$\oint_a \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = q = \int_V \rho dv \quad (1-3)$$

$$\oint_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1-4)$$

其中  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{J}$  和  $\rho$  分别称为磁场强度、磁感应强度（磁通密度）、电场强度、电位移、电流密度和电荷密度；在式（1-1）和式（1-2）中， $s$  为闭合回线， $a$  为由  $s$  所界定的曲面；在式（1-3）和式（1-4）中， $a$  为闭合曲面， $V$  为由  $a$  所界定的体积。

而

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-5)$$

式（1-5）称为电磁性能关系式， $\epsilon$ 、 $\sigma$  和  $\mu$  分别称为电容率（介质常数）、电导率和磁导率。对于线性媒质，它们是常数；对于非线性媒质，它们随场强的变化而变化。

在实用上，还常常需要决定场对电荷或电流的作用力。在静电场和磁场同时存在的空间，运动电荷受到的总力是

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1-6)$$

这个力称为洛仑兹力。 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  称为感应电场强度。在旋转电机中，电枢绕组中的感应电动势，作为能量转换的纽带。发电机中的感应电动势送出电流，输出电功率；电动机中的感应电动势平衡外施电压，吸收电功率。麦克斯韦方程组和洛仑兹力公式是经典电动力学的基础，全面地概括了一切电工设备中的电磁作用原理。

为了研究在任一点上电磁场诸场量的联系，必须应用微分形式的麦克斯韦方程组。设场矢量用  $\mathbf{A}$  代表，只要  $\mathbf{A}$  及其对空间坐标、时间的一阶偏导数在空间域  $V$  上到处连续，便可按照矢量分析中的高斯定理

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oint_a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-7)$$

和斯托克斯定理

$$\oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_a \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-8)$$

把麦克斯韦方程组从积分形式变换成微分形式

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1-11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-12)$$

这些方程式适用于各种正交坐标系。为了使运算方便，在直接求解时，常根据具体情况而利用适用于它的某种坐标系。在一般正交曲线坐标系中，如图 1-1 所示，用  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  表示三个正交的坐标， $\mathbf{1}_1$ 、 $\mathbf{1}_2$ 、 $\mathbf{1}_3$  表示沿三个坐标轴正方向的单位矢量，

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_2} dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_3} dx_3 \\ &= h_1 dx_1 \mathbf{1}_1 + h_2 dx_2 \mathbf{1}_2 \\ &\quad + h_3 dx_3 \mathbf{1}_3 \end{aligned}$$

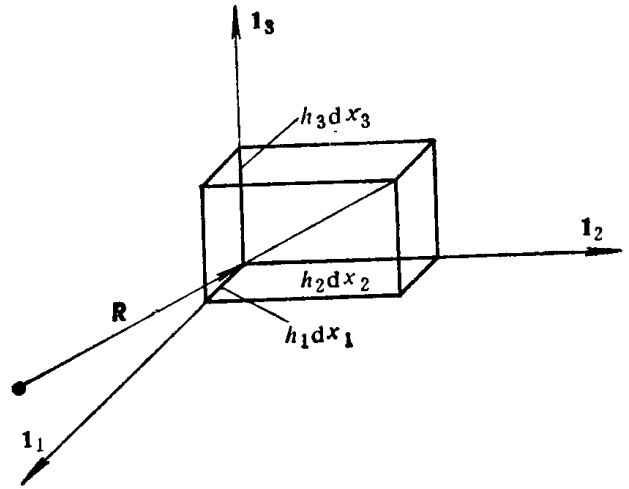


图1-1 正交曲线坐标系

$$\text{其中 } h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_1} \right| \quad h_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_2} \right| \quad h_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_3} \right|$$

$h_1$ 、 $h_2$ 、 $h_3$  称为尺度因子。

设  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  代表某矢量  $\mathbf{A}$  沿这三个坐标轴的分量，则标量函数  $\varphi$  的梯度和矢量函数  $\mathbf{A}$  的散度和旋度分别是

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{1}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{1}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{1}_3 \quad (1-13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (1-14)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{1}_1 & h_2 \mathbf{1}_2 & h_3 \mathbf{1}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{1}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{1}_2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{1}_3 \end{aligned} \quad (1-15)$$

在式 (1-14) 中, 若用  $\text{grad}\varphi$  代替  $\mathbf{A}$ , 使得

$$\begin{aligned} \text{div grad}\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} & \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-16)$$

在矢量分析中, 还常常采用矢量算符  $\nabla$  和标量算符  $\Delta$ , 以便使公式简洁。前者称为哈密顿算符, 后者称为拉普拉斯算符。在一般正交曲线坐标系中, 它们的表达式是

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{1}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{1}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{1}_3 \quad (1-17)$$

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right] \quad (1-18)$$

这样, 式 (1-13) 和式 (1-16) 便可以分别写成

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi \quad (1-19)$$

$$\text{div grad}\varphi = \Delta\varphi \quad (1-20)$$

在电机中常用的正交坐标系是直角坐标系和圆柱坐标系。在直角坐标系中, 见图 1-2, 有

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

$$\mathbf{1}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{1}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{1}_3 = \mathbf{k}$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

对应于式 (1-13)~(1-16), 可以列出有关表达式如下:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1-21)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-22)$$

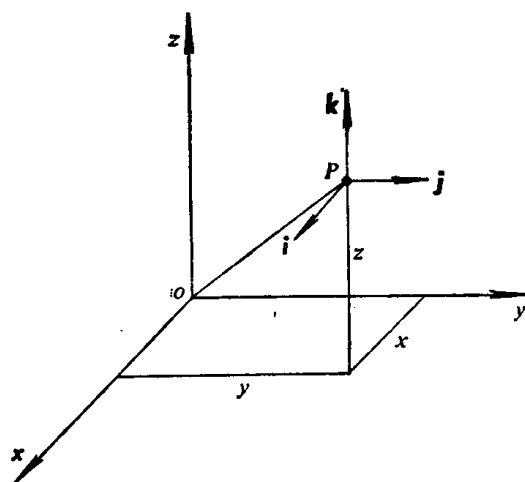


图1-2 直角坐标系

$$\text{rot}\mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1-23)$$

$$\text{div grad}\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1-24)$$

对应于式 (1-17), 有

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1-25)$$

因此不难看出, 场矢量的旋度和散度以及  $\text{div grad}\varphi$  用哈密顿算符表示时, 可以写成

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-26)$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-27)$$

$$\text{div grad}\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi \quad (1-28)$$

在圆柱坐标系中, 如图 1-3 所示, 圆柱坐标  $r, \theta, z$  与直角坐标  $x, y, z$  之间有下列关系:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

这时有

$$\begin{aligned} x_1 = r, & \quad x_2 = \theta, & \quad x_3 = z \\ \mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_r, & \quad \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_\theta, & \quad \mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_z \\ h_1 = 1, & \quad h_2 = r, & \quad h_3 = 1 \end{aligned}$$

对应于式 (1-13) ~ (1-16), 可以列出有关表达式如下:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{1}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{1}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{1}_3 \quad (1-29)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-30)$$

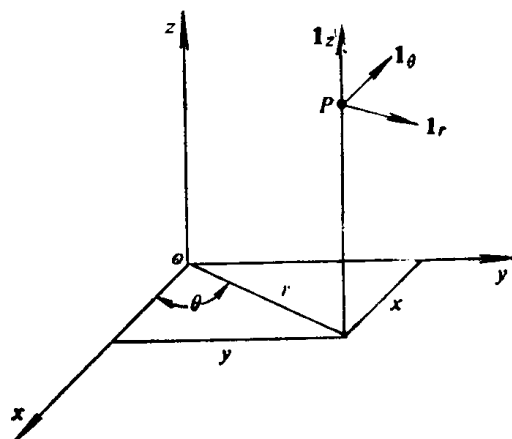


图1-3 圆柱坐标系

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{1}_1 + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{1}_2 \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{1}_3 \end{aligned} \quad (1-31)$$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi = \Delta \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1-32)$$

麦克斯韦方程组适用于稳定电场、稳定磁场、似稳电磁场和高频交变电磁场等不同情况。稳定电场和稳定磁场的场强都不随时间变化；似稳电磁场满足似稳条件，即场强随时间的变化“充分慢”，从场源到观察点之间的距离比波长短得多，从而在电磁波传播所需要的时间内，场源强度的变化极其微小，和稳定情况相似；与传导电流相比，位移电流可以忽略不计。电机中的交变电磁场属于似稳电磁场，所以不考虑位移电流的作用，并且，在电机中一般不存在静自由电荷，因而麦克斯韦方程组能作相应的简化。

一般形式的麦克斯韦方程组适用于随时间按任何规律变化的电磁场。对于在工程实践中经常研究的随时间按正弦律变化的电磁场（即使是非正弦变化，也可以分解为基波和各次谐波来分别处理），和正弦电流电路一样，可以采用复数符号法。设场矢量  $\mathbf{E}$  的复振幅（用  $\dot{\mathbf{E}}_m$  的顶上加一点来表示）为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m &= E_{x_m} e^{i\alpha} \mathbf{i} + E_{y_m} e^{i\beta} \mathbf{j} + E_{z_m} e^{i\gamma} \mathbf{k} \\ &= \dot{E}_{x_m} \mathbf{i} + \dot{E}_{y_m} \mathbf{j} + \dot{E}_{z_m} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1-33)$$

式中  $E_{x_m}$ 、 $E_{y_m}$ 、 $E_{z_m}$  和  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  分别是  $\mathbf{E}$  的各个分量的振幅和初相位，它们都可以是空间坐标的函数，但与时间无关。与式 (1-33) 相应的复有效值  $\dot{\mathbf{E}}$  为

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\mathbf{E}}_m}{\sqrt{2}} \quad (1-34)$$

相应的瞬时值则为

$$\mathbf{E} = \text{Im}(\dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t})$$

于是式 (1-9) 和式 (1-10) 可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t}] &= \operatorname{Im}[(\dot{\mathbf{J}}_m + j\omega \dot{\mathbf{D}}_m) e^{j\omega t}] \\ \operatorname{Im}[\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}] &= -\operatorname{Im}[j\omega \dot{\mathbf{B}}_m e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

从而得到复数形式的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0 \end{cases} \quad (1-35)$$

电磁性能关系的复数表达式则为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{J}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}} \end{cases} \quad (1-36)$$

从以上两式可见, 场量按同频率作正弦变化时, 采用复数符号法, 可以消掉时间因子。

## 二、坡印亭矢量

电磁场是能量的载荷者。在各向同性的线性媒质中, 电场和磁场能量的体密度分别为  $\frac{\epsilon E^2}{2}$  和  $\frac{\mu H^2}{2}$ ; 对于非线性媒质, 例如考虑铁磁质的饱和时,  $\mu$  不是常数, 磁场能量的体密度则为

$$w_m = \int_0^{B_m} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

计算方法如图 1-4 所示。

电磁场具有的能量能转换成其他的形式。根据坡印亭定律, 在单位时间内, 穿过与能流方向相垂直的单位面积上的能量, 可用坡印亭矢量表示:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{瓦/米}^2) \quad (1-37)$$

因此, 从体积  $V$  内穿出闭合表面  $a$  的功率为

$$\oint_a (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv \quad (1-38)$$

如果场矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  随时间按正弦规律变化 (或者是等效正弦波), 则用它们的复量构成复数坡印亭矢量。比拟于交流电路中的复功率,  $\dot{\mathbf{S}}$  是  $\mathbf{E}$  的复数值和  $\mathbf{H}$  的共轭复数值的矢量积, 即

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}^* \quad (1-39)$$

代入式 (1-38) 右端并将矢量积的散度按矢量恒等式展开, 得

$$\int_V \operatorname{div}(\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}^*) dv = - \int_V (\dot{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}^* - \mathbf{H}^* \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}) dv \quad (1-40)$$

上式右端积分号外的负号表示功率流进包含体积  $V$  的封闭面。根据式 (1-35) 和式 (1-36), 并忽略位移电流, 有

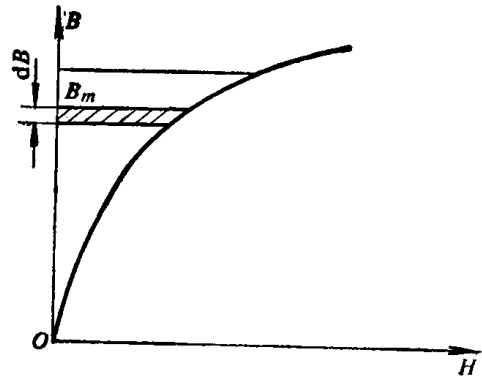


图1-4 磁场储能的计算



$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} \quad \text{和} \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}}$$

于是流进  $V$  内的功率是

$$\begin{aligned} & \int_V (\dot{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}) dv \\ &= \int_V (\dot{\mathbf{E}} \cdot \sigma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{H}} \cdot j\omega \dot{\mathbf{B}}) dv \\ &= \int_V \sigma E^2 dv + j\omega \int_V (\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{B}}) dv \end{aligned} \quad (1-41)$$

右端第一项代表体积  $V$  内的焦耳热损耗，包括涡流损耗；第二项是和交变磁场有关的复功率，可分两种情况讨论：考虑媒质的磁滞影响时， $\dot{\mathbf{B}}$  在时间相位上滞后于  $\dot{\mathbf{H}}$ ，设

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu_0 (\mu' - j\mu'') \dot{\mathbf{H}} \quad (1-42)$$

代入式 (1-41) 第二项，得

$$j\omega \int_V (\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{B}}) dv = \omega \mu_0 \int_V \mu'' H^2 dv + j\omega \mu_0 \int_V \mu' H^2 dv = P_m + jQ_m \quad (1-43)$$

式中 右端的实部是有功功率，代表磁滞损耗，虚部是无功功率。如果不考虑磁滞的影响， $\dot{\mathbf{B}}$  与  $\dot{\mathbf{H}}$  同相，即  $\mu'' = 0$ ，于是式 (1-41) 右边的第二个积分只包含磁场的无功功率。所以取实数磁导率时，不能用坡印亭矢量来确定磁滞损耗。这时磁滞损耗的计算可采用经验公式。

## § 1-2 场矢量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{J}$ 的微分方程

麦克斯韦方程组归纳了关于电磁现象的实验结果和基本定律，是经典电磁理论的数学描述。但是在解决具体问题时，常常要用场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  或  $\mathbf{J}$  所满足的偏微分方程，现推导于下。推导时，考虑到电机中的实际情况，忽略位移电流和自由电荷，结果不出现弦振动方程（波动方程），而得到电工中研究涡流问题所需要的扩散方程（热传导方程）。

设媒质均匀且各向同性。对于  $\mathbf{B}$ ，先将式 (1-9) 两端同乘以  $\mu$ ，便得

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$$

考虑到  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  和  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，因而

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-44)$$

由于

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

于是从式 (1-44) 可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-45)$$

对于  $\mathbf{E}$ ，先将式 (1-10) 两端取旋度，得

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{J}) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

即

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1-46)$$