

叶军 / 编著

初中数学



奥林匹克

实用教程

第一册

- ★基础与提高并重
- ★同步与超前结合
- ★乐趣无限 魅力四射
- ★名师手笔 托起希望之星

 湖南师范大学出版社

叶军 / 编著

初中数学★

奥林匹克

实用教程

第一册

基础与提高并重

同步与超前结合

乐趣无限 魅力四射

名师手笔 托起希望之星

 湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

初中数学奥林匹克实用教程. 第1册 /叶军编著. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2002.7

ISBN 7—81081—199—1/G·136

I. 初... II. 叶... III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 048149 号

初中数学奥林匹克实用教程 第一册

叶 军 编著
策划组稿: 李映辉
责任编辑: 宋 瑛
责任校对: 刘琼琳

湖南师范大学出版社出版发行
(长沙市岳麓山)

湖南省新华书店经销 湖南众鑫印务有限公司印刷

730 × 988 16 开 20.75 印张 428 千字

2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—15000 册

ISBN7—81081—199—1/G·136

定价: 22.00 元

前 言

在新世纪里,体现因材施教的教育特色,培养不同层次的学科人才,是基础教育正在积极探索的一个重要课题.从全国范围来看,教育部委托北京大学、清华大学、北京师范大学、华东师范大学等高校的附中举办了面向全国的高中理科实验班,其办班的主要目的是为国家培养高水平的中学生学科竞赛人才,以适应国际大赛的需要;从本省来看,湖南省教育厅委托湖南师范大学附中、长沙市一中、长沙市雅礼中学、长沙市长郡中学举办了面向全省的高中理科实验班.自有理科实验班以来,每年均经过了严格的招生考试,考试科目分四科:数学、语文、外语、理化,四科总分450分,其中语文、外语、理化各占100分,惟独数学占150分,并且招生录取原则中规定:数学单科成绩不得低于65分.由此可见数学单科的地位与作用,能否考上高中理科实验班,数学是关键.此举一直受到广大中学教师、学生及家长的广泛关注.

随着我国高等教育的迅猛发展,读大学将不再是一件难事.现在的中学生基本上都是独生子女,家长对子女的期望值已发生了质的变化.以往是大学选择学生,而现在已经出现了学生选择大学(不服从分配)的现象.随着各地理科实验班办学质量不断提高,学生追求名牌大学的愿望将会不断增强,但由于清华、北大等一流大学每年在各省的招生名额都非常少,几乎都被理科实验班的学生提前取走,因此,要在全国高考中竞争考上清华、北大是比较困难的.这样一来,不少学生家长为了实现儿女的清华、北大梦,从初中一年级开始就着手准备了.

在这样一种趋势下,为了保证高中理科实验班有高质量的生源,各地的名牌中学在初中就纷纷办起了各种层次的实验班.这样一来,能进入初中实验班学习就成了学生追求的目标之一.

据我们了解,除了学校办的初中实验班外,在社会上,由社会团体以及学生家长自发创办的面向那些学有余力的学生开设的提高班也有不少.这些民办的提高班,往往是由各中学的初中实验班的学生组成.这些学生在校外学到的知识和技能是对校

内所学知识的重要补充,其中不少学生通过一至两年的学习,就能在全国初中数学联赛以及高中理科实验班的考试中脱颖而出。

据我们了解,目前全国的高、初中数学教科书已进行了大面积的改编,而现在各校初中实验班所用的教材都比较陈旧,适应不了新世纪中学教育改革的需要。现在绝大多数实验班和提高班的师生都希望有一套系统的能适应未来至少5年教育发展的学习用书。

综上所述,根据新编全国高、初中数学教科书的要求,湖南师范大学出版社组织编写了这套《初中数学奥林匹克实用教程》丛书。

该套丛书共分四册,第一至三册中每讲分A、B两子讲。第四册是为报考高中理科实验班的学生编写的复习迎考教材。在编写过程中注意突出以下两点:

(1) **基础与提高并重** 采用同一讲分A、B两子讲的编写方法,A讲强调基础,帮助学生从竞赛的角度进一步深化对初中课本数学内容的认识,掌握课本以外的奥数内容;B讲强调提高,帮助学生掌握初中奥数中的一些要求较高的内容和技巧。

(2) **同步与超前结合** A讲内容与初中教科书内容基本同步,但在数学思维方法的渗透和数学能力与技巧的培养方面又有一定的超前性,以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高;B讲内容则不受教材知识顺序的限制,在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系,帮助学生从整体上把握初中奥数的内容,提高数学素养和综合解题的能力。

值此《初中数学奥林匹克实用教程》出版之机,我谨向热情支持和关心本书出版的湖南师范大学出版社的有关编辑致以崇高的谢意;我还要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师,本书的许多材料来源于他们的智慧和创造;最后还要感谢曹灵芝女士,她为本书的出版做了大量的具体工作。

由于水平所限,书中若有不妥和差错,敬请专家和读者批评指正,并且我热情地期待更多的优秀数学奥林匹克教材问世。

叶 军

2002年夏于湖南师范大学

内容简介

本套丛书共四册，是专门为学有余力的初中学生编写的数学奥林匹克系统学习教材。在第一至三册里，每讲分 A、B 两子讲。A 讲主要讲述课本知识的延伸；B 讲主要讲述课本知识的提高。两子讲在知识和题目的难易程度上形成了梯度，并且均指明了适用学生对象，以便于学生自学，方便教师备课。每子讲均配备了大量的针对性习题，并附有答案与提示。

目 录

第一讲 数的绝对值	(1)
A(本讲适合初一)	
§ 1.1 绝对值的概念与性质	(1)
§ 1.2 绝对值的化简与计算	(2)
B(本讲适合初二)	
§ 1.3 利用 $ a \geq 0, a \geq \pm a$ 解题	(7)
§ 1.4 含绝对值的最值问题	(8)
第二讲 一次方程(组)	(15)
A(本讲适合初一)	
§ 2.1 一次方程(组)的概念与解法	(15)
§ 2.2 求解一次方程(组)	(17)
§ 2.3 布列一次方程(组)求解应用题	(24)
B(本讲适合初二)	
§ 2.4 含绝对值的一次方程	(33)
§ 2.5 一些特殊的多元一次方程组问题	(38)
第三讲 不等式与一元一次不等式(组)	(45)
A(本讲适合初一)	
§ 3.1 不等式的概念与性质	(45)
§ 3.2 一元一次不等式(组)	(53)
§ 3.3 含参数的一元一次不等式(组)	(57)
§ 3.4 含绝对值的一元一次不等式(组)	(60)
B(本讲适合初二)	
§ 3.5 不等式与最值	(64)

§ 3.6 利用不等式解应用题	(68)
第四讲 集合	(81)
A(本讲适合初一)	
§ 4.1 集合的概念	(81)
§ 4.2 子集、交集、并集、补集、区间	(84)
B(本讲适合初二)	
§ 4.3 子集的应用	(94)
§ 4.4 交集、并集、补集的应用	(97)
§ 4.5 容斥原理	(99)
第五讲 简易逻辑	(104)
A(本讲适合初一)	
§ 5.1 逻辑联结词	(104)
§ 5.2 四种命题	(107)
§ 5.3 充分条件与必要条件	(111)
B(本讲适合初一)	
§ 5.4 逻辑推理问题及解法	(116)
第六讲 整式	(133)
A(本讲适合初一)	
§ 6.1 整式的乘法	(133)
§ 6.2 整式的除法	(139)
B(本讲适合初二)	
§ 6.3 乘法公式的推广	(147)
§ 6.4 多项式的恒等定理	(152)
§ 6.5 配方法	(157)
第七讲 数列	(165)
A(本讲适合初一)	
§ 7.1 数列的有关概念	(165)
§ 7.2 等差数列	(168)
§ 7.3 等比数列	(173)
B(本讲适合初二)	
§ 7.4 数值计算的方法与技巧	(178)
§ 7.5 递推方法	(185)
第八讲 排列与组合	(197)
A(本讲适合初一)	
§ 8.1 排列与组合的概念	(197)
§ 8.2 两个基本原理	(199)

B(本讲适合初一)	
§ 8.3 排列组合的题型与技巧	(210)
§ 8.4 正整数的分拆	(211)
§ 8.5 二项式定理	(217)
第九讲 直线、线段、角度、面积	(221)
A(本讲适合初一)	
§ 9.1 直线与线段	(221)
§ 9.2 角与角的计算	(229)
§ 9.3 两点间线段最短	(238)
B(本讲适合初二)	
§ 9.4 面积初步	(246)
§ 9.5 图形的计数	(251)
§ 9.6* 图论初步(简单图).....	(255)
第十讲 整数	(263)
A(本讲适合初一)	
§ 10.1 整数的十进制表示	(263)
§ 10.2 奇数与偶数	(266)
B(本讲适合初一)	
§ 10.3 整除性及其判定	(278)
第十一讲 正整数的质因数分解	(294)
A(本讲适合初二)	
§ 11.1 质数与合数	(294)
§ 11.2 算术基本定理	(298)
B(本讲适合初二)	
§ 11.3 最大公约数与最小公倍数	(308)

第一讲

数的绝对值

A

(本讲适合初一)

§ 1.1 绝对值的概念与性质

在初一代数课本里,数的绝对值是这样定义的:

定义 一个数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离,数 a 的绝对值记作 $|a|$.

由此定义立即可以得到数的绝对值有如下重要性质:

(1) 正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值是零,即

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

有时也可以写成

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

或者写成

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0; \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

(2) 数 a 的绝对值是一个非负数,即 $|a| \geq 0$, 等号成立的条件是 $a = 0$.

(3) 数 a 的绝对值不小于其本身,也不小于其相反数,即

$$|a| \geq a,$$

$$|a| \geq -a.$$

①

②

①式等号成立的条件是 $a \geq 0$. ②式等号成立的条件是 $a \leq 0$.

(4) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$.

- (5) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
 $|a^n| = |a|^n$ (n 为整数);
 $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$);
 $|a - b| = |b - a|$.
 (6) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ 或 $a = -b$.

§ 1.2 绝对值的化简与计算

灵活运用绝对值的性质是解决有关绝对值化简与计算问题的关键.

例 1 设有理数 a, b, c 在数轴上的对应点如图 1-1 所示, 化简

$$|b - a| + |a + c| + |c - b|.$$



图 1-1

解 由图 1-1 可知, $a > 0, b < 0, c < 0$, 且有 $|c| > |a| > |b| > 0$. 根据有理数加减运算的符号法则, 有

$$b - a < 0, a + c < 0, c - b < 0.$$

再根据绝对值的概念, 得

$$|b - a| = a - b, |a + c| = -(a + c), |c - b| = b - c.$$

于是有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (a - b) - (a + c) + (b - c) \\ &= a - b - a - c + b - c \\ &= -2c. \end{aligned}$$

例 2 不相等的实数 a, b, c 在数轴上的对应点分别为 A, B, C . 若 $|a - b| + |b - c| = |a - c|$, 则().

- A. B 在 A, C 两点的右边
 B. B 在 A, C 两点的左边
 C. B 在 A, C 两点之间
 D. 以上三种位置都有可能

解 选 C. 事实上, 由已知等式 $|a - b| + |b - c| = |a - c|$ 知, B 点到 A 点的距离与 B 点到 C 点的距离之和等于线段 AC 的长度, 从而易见 B 点在线段 AC 上, 亦即 B 在 A, C 两点之间.

注 以上两例都是直接利用绝对值的定义来分析问题的. 这种利用定义解题的方法是值得提倡的.

例 3 已知 $|a| = -a, b < 0$, 化简

$$\frac{|2a + 4b|}{(a + 2b)^2} - \frac{4}{|a + 2b|} - \frac{2}{|4b + 3 - |2a - 3||}.$$

解 $\because |a| = -a, \therefore a \leq 0, \therefore |2a - 3| = 3 - 2a.$

又 $\because b < 0, \therefore a + 2b < 0,$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= \frac{2|a+2b|}{(|a+2b|)^2} - \frac{4}{|a+2b|} - \frac{2}{|4b+3+2a-3|} \\ &= \frac{2}{|a+2b|} - \frac{4}{|a+2b|} - \frac{1}{|a+2b|} = -\frac{3}{|a+2b|} = \frac{3}{a+2b}. \end{aligned}$$

注 涉及绝对值的问题,大部分需要利用绝对值的定义及性质,先去掉绝对值符号,再解决.而要去掉绝对值符号,必须先判定绝对值符号内的字母或式子是正数、负数还是零.另外,若遇多层绝对值符号时,应从最里面一层开始,逐层去掉绝对值符号.

例4 化简 $|3+|2-|1+x||$.

这又是一个含有多层绝对值符号的问题,可从里往外一层一层去绝对值符号,因此,首先要对 x 分 $x \geq -1$ 与 $x < -1$ 讨论.

解 设原式为 y .

1° 当 $x \geq -1$ 时, $|1+x| = 1+x$, 于是

$$\begin{aligned} |2-|1+x|| &= |2-1-x| = |1-x| \\ &= \begin{cases} x-1, & x \geq 1; \\ 1-x, & -1 \leq x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

于是,当 $-1 \leq x < 1$ 时,有 $y = |3+1-x| = |4-x| = 4-x$; 当 $x \geq 1$ 时,有 $y = |3+x-1| = |x+2| = x+2$.

2° 当 $x < -1$ 时, $|1+x| = -1-x$, 于是

$$\begin{aligned} |2-|1+x|| &= |2+1+x| = |3+x| \\ &= \begin{cases} 3+x, & -3 \leq x < -1; \\ -3-x, & x < -3. \end{cases} \end{aligned}$$

于是,当 $-3 \leq x < -1$ 时,有 $y = |3+3+x| = |6+x| = 6+x$; 当 $x < -3$ 时,有 $y = |3-3-x| = -x$.

$$\text{综上所述, } y = \begin{cases} x+2, & x \geq 1; \\ 4-x, & -1 \leq x < 1; \\ 6+x, & -3 \leq x < -1; \\ -x, & x < -3. \end{cases}$$

例5 化简 $|3x+1|+|2x-1|-|x|$.

这里涉及到三个绝对值的代数和.解题关键在于如何同时去掉三个绝对值.如果分别去掉每个绝对值的符号,则很容易.如 $|3x+1|$, 只须讨论 $3x+1 \geq 0$ 与 $3x+1 < 0$. 这时,我们称 $x = -\frac{1}{3}$ 为零点.类似地另外两个零点为 $x = \frac{1}{2}$ 与 $x = 0$. 这三个分界点把数轴分成4段,这4段依次为: $x \leq -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} < x \leq 0$, $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $x \geq \frac{1}{2}$. 于是我们可分段讨论.此方法称为零点讨论法.

解 记原式为 y .

$$(1) \text{ 当 } x \leq -\frac{1}{3} \text{ 时, } |3x+1| = -3x-1, |2x-1| = -2x+1, |x| = -x,$$

于是有

$$y = (-3x-1) + (-2x+1) - (-x) = -4x.$$

$$(2) \text{ 当 } -\frac{1}{3} < x \leq 0 \text{ 时, } |3x+1| = 3x+1, |2x-1| = -2x+1, |x| = -x,$$

于是有

$$y = (3x+1) + (-2x+1) - (-x) = 2x+2.$$

$$(3) \text{ 当 } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } |3x+1| = 3x+1, |2x-1| = -2x+1, |x| = x,$$

于是有

$$y = (3x+1) + (-2x+1) - x = 2.$$

$$(4) \text{ 当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, 有 } |3x+1| = 3x+1, |2x-1| = 2x-1, |x| = x,$$

于是有

$$y = (3x+1) + (2x-1) - x = 4x.$$

综上所述, 我们有

$$y = \begin{cases} 4x, & x > \frac{1}{2}; \\ 2, & 0 < x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x+2, & -\frac{1}{3} < x \leq 0; \\ -4x, & x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

通过上面的例子我们可以总结出这类关于绝对值和问题化简的一般方法:

- ① 求出零点;
- ② 零点将数轴分成若干段, 即将 x 的取值范围也分成若干段;
- ③ 依顺序分别在每段内进行讨论, 化简.

例 6 设 x, y, a 都是实数, 并且满足 $|x| = 1-a, |y| = (1-a)(a-a^2-1)$, 试求 $|x| + y + a^3 + 1$ 的值.

该题涉及三个未知数, 但只有两个等式, 一般情形很难确定 x, y, a 的值, 但要注意题设两等式中均含有 $|x|, |y|$, 故可利用绝对值的非负性建立两个不等式 $|x| \geq 0, |y| \geq 0$, 从而由不等式对 a 的取值进行估计.

在对一个数的取值进行估计时, 我们常用到两数相等的一条重要性质:

$$a = b \Leftrightarrow a \geq b \text{ 且 } a \leq b.$$

解 注意到 $|x| \geq 0, |y| \geq 0$, 得不等式组:

$$\begin{cases} 1-a \geq 0 \\ (1-a)(a-1-a^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0, \\ (1-a)(a^2-a+1) \leq 0. \end{cases} \quad (*)$$

因为 $a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$,

所以(*)式又等价于

$$\begin{cases} 1-a \geq 0, \\ 1-a \leq 0. \end{cases}$$

从而有 $1-a=0, \therefore a=1$.

$$\therefore |x|=0, |y|=0, \therefore x=y=0.$$

$$\therefore |x| + y + a^3 + 1 = 2.$$

注 解决本题的关键是利用了绝对值的非负性. 这是一种重要的解题技巧.

例7 设实数 x, y 满足

$$\begin{cases} |x| + x + y = 10, & \text{①} \\ x + |y| - y = 12. & \text{②} \end{cases}$$

求 $x+y$ 的值.

此题是涉及两个未知数的绝对值方程组问题, 可视其中一个为主元, 施行零点讨论法.

解 视 x 为主元.

(1) 当 $x \leq 0$ 时, 由①得 $y = 10$, 代入②得 $x + 10 - 10 = 12$,

$\therefore x = 12$, 这与 $x \leq 0$ 矛盾.

(2) 当 $x > 0$ 时, 由①得 $2x + y = 10$.

若 $y \geq 0$, 则由②得 $x = 12$, 代入③得 $2 \times 12 + y = 10$,

$\therefore y = -14 < 0$, 与 $y \geq 0$ 矛盾.

从而 $y < 0$, 于是原已知方程组等价于

$$\begin{cases} 2x + y = 10, \\ x - 2y = 12. \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} x = \frac{32}{5}, \\ y = -\frac{14}{5}. \end{cases}$$

从而 $x+y = \frac{18}{5}$.

例8 设 a, b, c 为非零实数, 求值:

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{ab}{|ab|} + \frac{ac}{|ac|} + \frac{bc}{|bc|} + \frac{abc}{|abc|}.$$

题中涉及三个数 a, b, c 的绝对值, 要脱其绝对值符号, 宜对 a, b, c 的符号分类讨论.

解 记原式为 y . 考察下列四种情形:

(1) 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $y = 7$;

(2)若 a, b, c 中两正一负,不失一般性,可设 $a > 0, b > 0, c < 0$,则

$$y = 1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + (-1) + (-1) = -1;$$

(3)若 a, b, c 中一正两负,不失一般性,可设 $a > 0, b < 0, c < 0$,则

$$y = 1 + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 = -1;$$

(4)若 a, b, c 均为负数,则

$$y = (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 + 1 + (-1) = -1.$$

综上所述,所求的值为 7 或 -1.

习题 § 1.1~1.2 A

1. 设 a, b 为实数,试判断下列各结论是否正确? 若不正确,应增加什么条件?

① $|a + b| = |a| + |b|$;

② $|ab| = |a| \cdot |b|$;

③ $|a - b| = |b - a|$;

④ 若 $|a| = b$,则 $a = b$;

⑤ 若 $|a| < |b|$,则 $a < b$;

⑥ 若 $a > b$,则 $|a| > |b|$.

2. 已知 a, b, c 为非零实数,试求 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值.

3. 如图 1-2,有理数 a, b, c 在数轴上的位置给定,求 $|a - b| + |b - c| - |c - a|$ 的值.



图 1-2

6 4. 化简: $|3 + x| - |4 - x|$.

5. 化简下列各式:

(1) $|3x - |2x - 4| + 5|$; (2) $|3x + |2x + 6| - 9|$.

6. 已知 $x < 0, xy > 0, x < y$,求 $|x + y| + |y - x|$ 的值.

7. 已知 $|x| = 2, |y| = 6$,求 $|x + y|$ 的值.

8. 若 $2x + |4 - 5x| + |1 - 3x| + 4$ 恒为常数,求 x 的取值范围.

9. 化简下列各式:

(1) $\frac{|x - |x||}{x}$; (2) $|x + 5| + |x - 7| + |x + 10|$.

10. x 是何实数时,下列等式成立.

(1) $|(x - 2) + (x - 4)| = |x - 2| + |x - 4|$;

(2) $|(7x + 6) \cdot (3x - 5)| = (7x + 6)(3x - 5)$.

习题 § 1.1~1.2 A 答案与提示

1. ①错.当 $a, b \geq 0$ 时成立. ②对. ③对. ④错,当 $a \geq 0$ 时成立. ⑤错,当 $b > 0$ 时成立.

⑥错,当 $a + b > 0$ 时成立.

2. $-4, 0, 4$.

3. $2a - 2b$.

4. 原式 =
$$\begin{cases} 7, x \geq 4; \\ 2x - 1, -3 \leq x < 4; \\ -7, x < -3. \end{cases}$$

5. (1) 原式 =
$$\begin{cases} x + 9, x \geq 2; \\ 5x + 1, -\frac{1}{5} \leq x < 2; \\ -5x - 1, x < -\frac{1}{5}. \end{cases}$$
 (2) 原式 =
$$\begin{cases} 15 - x, x < -3; \\ 3 - 5x, -3 \leq x < \frac{3}{5}; \\ 5x - 3, x \geq \frac{3}{5}. \end{cases}$$

6. $-2x$.

7. 8 或 4.

8. $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{5}$.

9. (1) 原式 =
$$\begin{cases} 0, x > 0; \\ -2, x < 0. \end{cases}$$
 (2) 原式 =
$$\begin{cases} 3x + 8, x > 7; \\ x + 22, -5 < x \leq 7; \\ 12 - x, -10 < x \leq -5; \\ -3x - 8, x \leq -10. \end{cases}$$

10. (1) $x \geq 4$ 或 $x \leq 2$; (2) $x \geq \frac{5}{3}$ 或 $x \leq -\frac{6}{7}$.

B

(本讲适合初二)

7

在这一讲里我们进一步深化对绝对值问题的理解,提高解题能力.

§ 1.3 利用 $|a| \geq 0, |a| \geq \pm a$ 解题

例 1 已知 $|x| = 3, |y| = 2$, 且 $|x - y| = y - x$, 求 $(x + y)^3$ 的值.

解 因为 $|x - y| \geq 0$, 所以 $y - x \geq 0, y \geq x$. 又由 $|x| = 3, |y| = 2$ 知 $x < 0$.

(1) 当 $y = 2$ 时, $x + y = -1$;

(2) 当 $y = -2$ 时, $x + y = -5$.

所以 $(x + y)^3$ 的值为 $-1, -125$.

例 2 若实数 x, y 满足 $|x - y + 1| + |x + y - 2001| = 0$, 求 $[-\frac{x}{y}]$ 的值 ($[-\frac{x}{y}]$

为不超过 $-\frac{x}{y}$ 的最大整数).

解 因为 $|x - y + 1| \geq 0, |x + y - 2001| \geq 0$, 所以 $|x - y + 1| + |x + y - 2001| \geq 0$.

又由题设知 $|x - y + 1| + |x + y - 2001| = 0, \therefore |x - y + 1| = |x + y - 2001| = 0$.

解方程组 $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 2001 = 0. \end{cases}$

得 $x = 1000, y = 1001$. 于是 $[-\frac{x}{y}] = [-\frac{1000}{1001}] = -1$.

值得指出的是,在解题中我们用到了非负数的一个重要性质:

定理 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个非负数,且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$,

则 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

例 3 设 x, y, z 为整数且满足

$$|x - y|^{2001} + |z - x|^{2002} = 1.$$

试求 $|x - y|^3 + |y - z|^3 + |z - x|^3$ 的值.

解 因为 x, y, z 为整数,所以 $x - y, z - x$ 也为整数,于是

$$|x - y|^{2001} \geq 0, |z - x|^{2002} \geq 0, \text{且均为整数,}$$

$$\text{又 } |x - y|^{2001} + |z - x|^{2002} = 1,$$

所以有

$$\textcircled{1} \begin{cases} |x - y|^{2001} = 0, \\ |z - x|^{2001} = 1, \end{cases} \text{或} \textcircled{2} \begin{cases} |x - y|^{2001} = 1, \\ |z - x|^{2002} = 0. \end{cases}$$

由 $\textcircled{1}$ 得 $\begin{cases} x = y \\ z - x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow |y - z| = |z - x| = 1,$

这时 $|x - y|^3 + |y - z|^3 + |z - x|^3 = 0^3 + 1^3 + 1^3 = 2.$

又由 $\textcircled{2}$ 得 $\begin{cases} z = x \\ x - y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow |x - y| = |y - z| = 1,$

这时仍有 $|x - y|^3 + |y - z|^3 + |z - x|^3 = 2.$

综上所述, $|x - y|^3 + |y - z|^3 + |z - x|^3 = 2.$

§ 1.4 含绝对值的最值问题

含绝对值的最值问题是数学竞赛中一个永恒的热点.因此,我们必须掌握其中的一些解题技巧.

为了方便起见,我们把一个变量 y 的最大值记作 y_{\max} (或 $\max y$),最小值记作 y_{\min} (或 $\min y$);对于一组变量 y_1, y_2, \dots, y_n ,我们把它的最大值记作 $\max\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ (或 $\max\{y_i\}$),最小值记作 $\min\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ (或 $\min\{y_i\}$).

下面两个简单的最值定理是常用的.

定理 1 设函数 $f(x)$ 在其定义域内满足:

$$f(x) \geq a \text{ (或 } f(x) \leq a),$$

且存在一个 x_0 使 $f(x_0) = a$,则函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取到最小值(或最大值),

$$\text{即 } \min f(x) = f(x_0) \text{ (或 } \max f(x) = f(x_0)).$$