工科研究生入学试题与解答

GONGKE YANJIUSHENGRUXUE SHITIYUJIEDA

理论力学

天津科学技术出版社

工科研究生入学试题与解答

理 论 力 学

虞润禄　选编

天津科学技术出版社

责任编辑：苏飞

工科研究生入学试题与解答

理论力学

虞润禄 选编

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米 1/16 印张27.5 字数671000

1987年12月第1版

1987年12第1次印刷

印数：1—5300

书号：13212·128 定价：6.60元

ISBN 7-5308-0178-3/O·15

前　言

一九八三年九月由天津科学技术出版社出版过工科研究生试题与解答《理论力学》，其中包括1980、1981两年的入学试题及解答，另附1982年入学试题。作为教学资料和报考研究生的读者参考用书，曾起到比较好的作用。因此，我们和兄弟院校有关教师又共同编写了1983、1984及1985连续三年的研究生入学考试试题及其解答，以供广大读者参考。

从试题内容看，既有基本内容，也涉及到现行工科院校教材中的某些专题。近年来，部分院校试题又增加了概念题选择与填充等方式，对衡量考生掌握知识的全面程度，是一种新的探索。从各院校试题对比看，由于适用专业不同，深浅难易自然会有差异，题目数量亦多寡不一。随着教育改革不断深入，教学质量的提高与如何评估，考试如何命题才能正确反映教学水平，是今后必然要考虑的问题。因此，我个人认为再出版一本试题解，作为教学研究资料的收集，其意义将更大。

就汇编的试题，除极个别外，没有超出现行工科院校理论力学教材的内容，作为工科院校在校学生的学习参考书是合适的。

在汇编本书的过程中，兄弟院校有关教师都作了不少工作，给予极大支持，在此表示感谢。

由于水平所限，书中可能还有不少缺点，恳请读者批评指正。

编　者

一九八五年十二月

DAH 10/06

内 容 简 介

本书收编了28所高等院校1983～1985年招收工科研究生的理论力学入学试卷70余份，每题均有详细题解。所选试题形式多样，内容全面，具有启发性。书中保持了试卷的完整性，并标明适用专业及各题评分标准，供考生了解各院校不同专业对理论力学的要求。

本书可供报考工科研究生的读者、高等院校的学生及自学理论力学的读者参考，还可作为教师命题辅导学生的参考资料。

目　录

哈尔滨工业大学

（1983年）

硕士研究生入学试题（理论力学部分）

适用专业：机械类

一、在图1-1(a)所示的平面机构中，曲柄OA长为l，以匀角速度ω绕O轴转动．连杆AD其中点B处以铰链连接一长为$\frac{l}{2}$的BC杆．长为$2l$的DE杆铰接于D端，另一端穿过套筒F，而套筒可绕F轴转动．在图示位置，OA及BC铅垂，OD水平，且F恰为DE的中点．求该瞬时E点的速度和E点相对于套筒的速度．（15分）

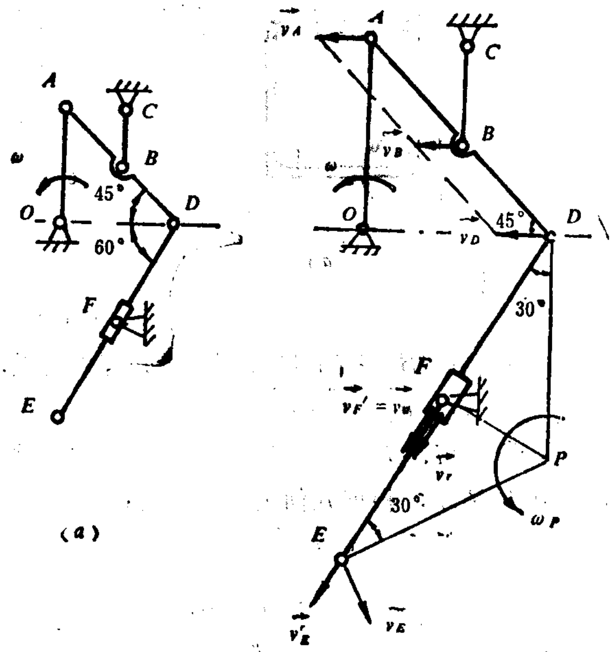

图1-1

解：曲柄OA与BC均作定轴转，动，在图(b)所示瞬时，A、B两点的速度均沿水平方向，故连杆AD作瞬时平动，则有：

$$v_D = v_B = v_A = \omega l$$

DE杆作平面运动．取其上与铰链相重合的F'点为动点，套筒为动系，地为定系，则有：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

其中$\vec{v}_a = \vec{v}_{F'}$（大小与方向均未知）；$\vec{v}_e$即为铰链F点的速度，故$v_e = 0$；$\vec{v}_r$的大小未知，方向沿着套筒，因此有：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r$$

即$\vec{v}_{F'}$的方向沿着套筒，由此找得DE杆的速度瞬心P．根据图(b)所示的几何关系求得：

$$DP = EP = \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

$$FP = EF \cdot \mathrm{tg}30° = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

DE杆的角速度为：

$$\omega_P = \frac{v_D}{DP} = \frac{\sqrt{3}\,\omega}{2}$$

E点速度的方向垂直EP，大小为：

$$v_E=\omega_P\cdot\overline{EP}=\omega l$$

由于DE杆相对套筒作平动，故其上各点相对套筒的速度都相等，即

$$v_E^r=v_r=v_{F'}=\omega_p\cdot\overline{FP}=\frac{\omega l}{2}$$

方向沿DE杆，如图(b)所示.

二、图1-2(a)所示的直角形弯杆OBA以匀角速度ω绕O轴转动，A端推动直杆CD绕C轴转动. 已知：$OB=AB=OC=l$. 求：当$OB\perp OC$瞬时CD杆的角加速度.（20分）

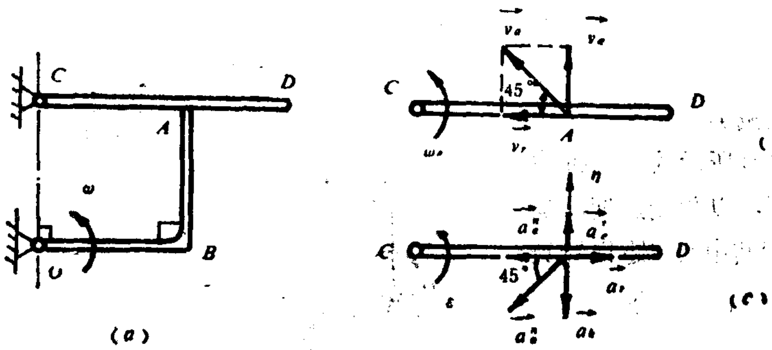

图1-2

解：取弯杆OBA上的A为动点，CD杆为动系，地为定系. 先分析速度，有：

$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r \qquad (1)$$

式中$v_a=\omega\sqrt{2}l$，方向垂直OA；$\vec{v}_e$与$\vec{v}_r$大小未知，方向分别垂直于AC和沿AC作速度四边形如图(b)所示，根据几何关系可求得：

$$v_e=v_a\sin45°=\omega l$$

$$\omega_e=\frac{v_e}{l}=\omega\text{（逆时针）}$$

$$v_r=v_a\cos45°=\omega l$$

再分析加速度，有

$$\vec{a}_a^\tau+\vec{a}_a^n=\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_e^n+\vec{a}_r+\vec{a}_k \qquad (2)$$

假设$\vec{a}_r$与$\vec{a}_e^\tau$的方向如图(c)所示. 将式(2)向η轴投影，有

$$-a_a^n\sin45°=-a_k+a_e^\tau$$

得
$$a_e^\tau=a_k-a_a^n\sin45°=\omega^2 l$$

CD杆的角加速度为

$$\varepsilon=a_e^\tau/l=\omega^2\text{（逆时针）}$$

三、质量皆为m的均质轮A与B，其半径均为R，圆心A、B在同一水平线上. A轮沿水平面只滚不滑，在其中心A处连一刚度系数为k的水平弹簧. 绳的一端绕在A轮上，另一端跨过定滑轮B，并挂两质量皆为m的物块C及D，如图1-3(a)所示. 已知：$m=3$kg，$R=0.1$ m，$k=10$N/m. 设B轴光滑，绳子不可伸长，且与B轮之间无相对滑动，不计绳与弹簧的质量及滚动摩阻. 如当系统静止时剪断CD间的细绳，求C物运动的最大速度.（20分）

解：取A、B轮及C物为研究对象，应用质点系动能定理求解. 开始瞬时系统静止($T_0=0$)．此时弹簧的伸长为δ_0（图(a)），可根据A轮平衡求得（图(c)）．由$\sum m_P=0$得弹簧

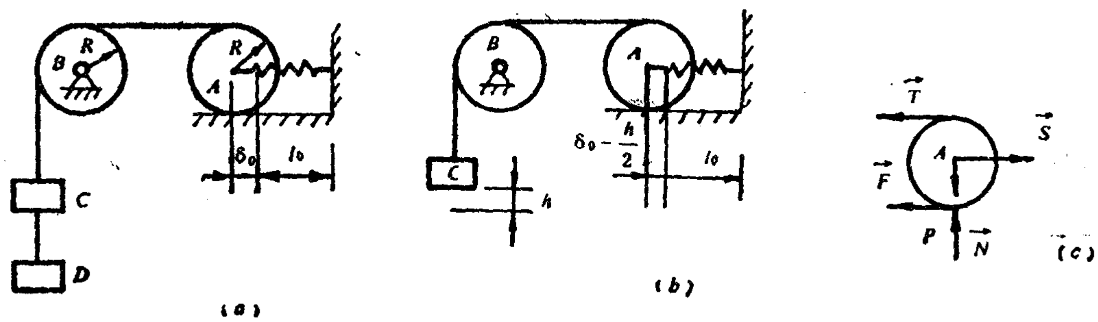

图1-3

拉力为：

$$S=2T \qquad (1)$$

其中绳子拉力$T=2mg$，弹簧力$P=k\delta_0$，代入式(1)得：

$$\delta_0=4mg/k$$

将D物块去掉后，C物将向上运动．设某一瞬时，C物的速度为v，上升的距离为h.此瞬时系统的动能为：

$$T=T_C+T_B+T_A$$
$$=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J_B\omega_B^2+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_A\omega_A^2$$

根据系统的运动关系有：

$$\omega_B=\frac{v}{R},\ v_A=\frac{v}{2};\ \omega_A=\frac{v}{2R}$$

代入上式得：

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{2R}\right)^2=\frac{15}{16}mv^2$$

由于系统为理想约束，在此过程中只有重力与弹力作功．由运动学关系可知，当C物上升h时圆心A向右移$\frac{h}{2}$距离，此时弹簧的变形量为$\delta_0-\frac{h}{2}$，如图(b)所示．因此功为：

$$W_{1-2}=-mgh+\frac{k}{2}\left[\delta_0^2-\left(\delta_0-\frac{h}{2}\right)^2\right]$$
$$=-mgh+\frac{k\delta_0}{2}h-\frac{k}{8}h^2=mgh-\frac{k}{8}h^2$$

由动能定理得：

$$\frac{15}{16}mv^2-0=mgh-\frac{k}{8}h^2$$

即

$$v=\sqrt{\frac{16}{15m}\left(mgh-\frac{k}{8}h^2\right)} \qquad (2)$$

由$\frac{dv}{dh}=0$，求得v_{max}时的h值为：

$$h = 4mg/k$$

代入式(2)得：

$$v_{max} = 4g\sqrt{\frac{2m}{15}} = 7.84\text{m/s}$$

四、图1-4（a）所示，质量为m，长为l的均质细杆AB，初始时静止地直立于光滑的水平面上．如杆受一极微小的初始干扰而偏离铅垂位置．求AB杆刚刚到达水平面瞬时的角速度、角加速度以及B点的加速度．（20分）

解：取AB杆为研究对象．因为$\sum X = 0$，故系统的质心守恒，则质心C沿铅垂运动．设B点水平向左作直线运动，刚到达地面瞬时B点即为瞬心（图(b)）　根据动能定理，有：

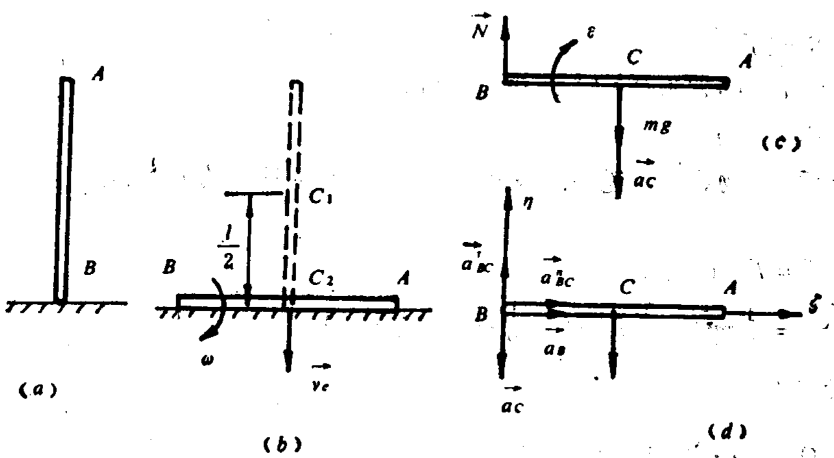

图1-4

$$\frac{1}{2}J_B\omega^2 - 0 = mg\ \frac{l}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2} \tag{1}$$

得　$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

AB杆刚到达地面时的受力图及$\vec{a}_C$与ε的假设方向如图（c)所示．应用平面运动微分方程，有

$$J_C\varepsilon = N\ \frac{l}{2}，\text{即}\frac{1}{12}ml^2\varepsilon = N\frac{l}{2} \tag{2}$$

$$ma_C = mg - N \tag{3}$$

从式(2)、(3)中消去N，解得：

$$\varepsilon = \frac{6(g - a_C)}{l} \tag{4}$$

AB杆作平面运动，以C点为基点，求a_B．根据图（d)所示的加速度，有：

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{BC} + \vec{a}^{n}_{BC} \tag{5}$$

将式（5）向ξ轴投影，得：

$$a_B = a^n_{BC} = \omega^2\frac{l}{2} = \frac{3g}{2}$$

再向η轴投影，得：

$$0=a_{BC}^{\tau}-a_{C}$$

即
$$a_{C}=a_{BC}^{\tau}=\varepsilon\frac{l}{2}$$

将a_C代入式(4)，得：

$$\varepsilon=\frac{3g}{2l}$$

（1984年）

硕士研究生入学试题（理论力学部分）

适用专业：固体力学，一般力学，飞行力学等

一、图1-5(a)所示的平面机构，由半径R均等于50mm的两个大圆环组成．已知B环固定于地面，A环沿直线轨道作纯滚动，另有一个小环M同时套在这两个大环上．当A环滚到$\angle MAB=30°$位置时，其中心A点的速度$v_A=50\text{mm/s}$，加速度$a_A=0$，求此瞬时小环M的速度和加速度．（20分）

解：A环作平面运动，P点为速度瞬心，故：

$$\omega=\frac{v_A}{R}=1\ \text{rad/s}$$

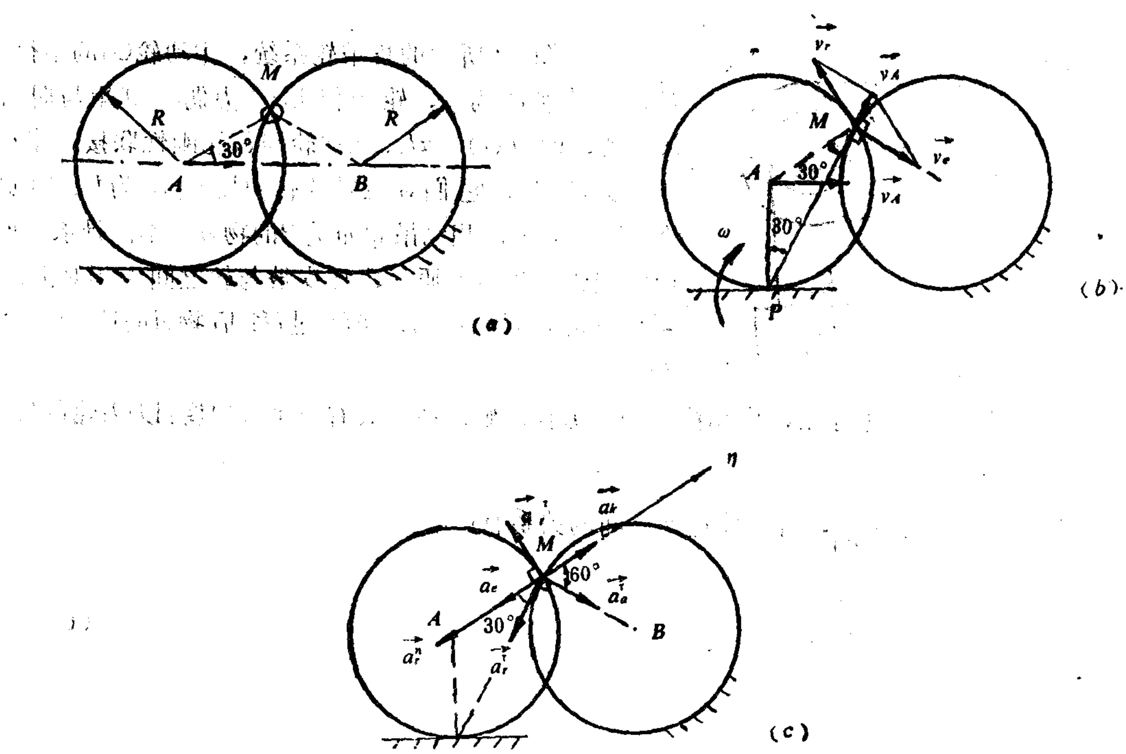

图1-5

取小环M为动点，A环为动系，B环为定系．绝对运动为小环M沿定系B环作圆周运动，相对运动为小环M沿动系A环作圆周运动，牵连速度是A环上与小环重合的M'点的速度，它垂直于PM，大小为：

$$v_e = \omega \cdot 2R\cos 30° = 50\sqrt{3}\ \mathrm{mm/s}$$

如图(b)所示．根据速度合成定理，有：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad (1)$$

作速度四边形如图(b)所示．根据几何关系，有：

$$v_M = v_a = v_e \mathrm{tg} 30° = 50\mathrm{mm/s}$$

$$v^r = v_e/\cos 30° = 100\mathrm{mm/s}$$

再分析加速度．其中牵连加速度$\vec{a}_e = \vec{a}_{M'}$，可按平面运动的基点法求得，取中心A为基点，则有：

$$\vec{a}_{M'} = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{M'A} + \vec{a}^{n}_{M'A}$$

得：$$a_e = a_{M'} = a^n_{M'A} = \omega^2 R = 50\mathrm{mm/s^2}$$

由加速度合成定理，得：

$$\vec{a}^{\tau}_a + \vec{a}^{n}_a = \vec{a}_e + \vec{a}^{\tau}_r + \vec{a}^{n}_r + \vec{a}_k \qquad (2)$$

设$\vec{a}^{\tau}_a$与$\vec{a}^{\tau}_r$的指向如图(c)所示，将式(2)向垂直于$\vec{a}^{\tau}_r$的η轴投影，得：

$$-a^{\tau}_a\cos 30° + a^n_a\cos 60° = -a_e - a^n_r + a_k$$

即 $$a^{\tau}_a = 50\sqrt{3}\ \mathrm{mm/s^2}$$

合成得 $$a_M = a_a = \sqrt{(a_a)^2 + (a^n_a)^2} = 100\mathrm{mm/s^2}$$

方向由 $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{a^{\tau}_a}{a^n_a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 确定，即铅直向下．

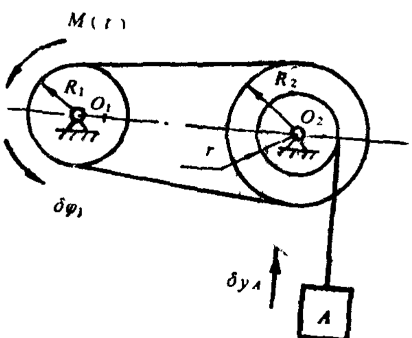

图1-6

二、图1-6所示的皮带轮系统，主动轮O_1的半径为R_1，转动惯量为J_1，轮上作用一力偶，其矩与时间成正比，即$M(t) = \alpha t$．从动轮与鼓轮刚性联接，半径分别为R_2与r，它们对O_2轴的转动惯量合为J_2．在鼓轮上缠有细绳，用以吊起重为P的物A．不计轴承的摩擦和绳索、皮带的质量，且皮带与轮之间无相对滑动．系统从静止开始运动，求经过t秒后物A的速度．(20分)

解：取整体为研究对象，应用拉格朗日方程求解．系统具有一个自由度，以O_1轮的转角φ_1为广义坐标．

设传动比 $i = \dfrac{\dot\varphi_1}{\dot\varphi_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$，各构件运动之间的关系有：

$$\dot\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\dot\varphi_1 = \frac{\dot\varphi_1}{i} \qquad (1)$$

$$\dot y_A = r\dot\varphi_2 = \frac{r\dot\varphi_1}{i} \qquad (2)$$

系统的动能为：

$$
\begin{aligned}
T &= T_{O_1} + T_{O_2} + T_A \\
&= \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}_A^2 \\
&= \frac{1}{2gi^2}(J_1gi^2 + J_2g + Pr^2)\dot{\varphi}_1^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

系统为理想约束，只有力偶M与重力$\vec{P}$作功．设虚位移为$\delta\varphi_1$与δy_A（图1-8），则主动力的虚功为：

$$\sum\delta W_F = M\delta\varphi_1 - P\delta y_A = \frac{1}{i}(ati - pr)\delta\varphi_1$$

广义力为：

$$Q_1 = \frac{\sum\delta W_F}{\delta\varphi_1} = \frac{1}{i}(ati - Pr) \tag{4}$$

将式(3)、(4)代入拉氏方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = Q_1$中，有：

$$\frac{1}{gi^2}(J_1gi^2 + J_2g + Pr^2)\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{i}(ati - Pr)$$

得

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{gi(ati - Pr)}{J_1gi^2 + J_2g + Pr^2} \tag{5}$$

对式(5)积分，有：

$$\int_0^{\dot{\varphi}_1}\mathrm{d}\dot{\varphi}_1 = \int_0^t\frac{gi(ati - Pr)}{J_1gi^2 + J_2g + Pr^2}\mathrm{d}t$$

得

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{gi}{J_1gi^2 + J_2g + Pr^2}\left(ai\frac{t^2}{2} - Prt\right) \tag{6}$$

将式(6)代入式(2)，求得物A的速度为：

$$\dot{y}_A = \frac{rg(ait^2 - 2Prt)}{2(J_1gi^2 + J_2g + Pr^2)}$$

本题亦可应用质点系动量矩定理求解．但必须将皮带切开，分别取轮O_1与轮O_2（包括物A）为研究对象．列方程后联立求解，即可求得$\ddot{\varphi}_1$，再积分求得$\dot{\varphi}_1$．

三、长为l重为P的均质细杆，从水平位置绕O点无初速地自由落下至铅垂位置时，恰与一重为Q的小物块B相撞．设碰撞后杆与物块始终保持接触，使联结于弹簧一端的B物块在水平面内作谐振动，如图1-7(a)所示．已知弹簧的刚度系数为k，离O点的距离为l．不计摩擦，求系统微振动的固有频率和振幅．（20分）

解：为求得系统微振动的频率和振幅，除列出系统的运动微分方程外，还需求出系统开始振动时的初始条件．因此，必须先求出OA杆碰撞前后的角速度．

先以OA杆为研究对象，应用动能定理，求杆从水平静止到铅直位置的角速度ω_1（碰撞前的角速度）．即

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\omega_1^2 - 0 = P\frac{l}{2}$$

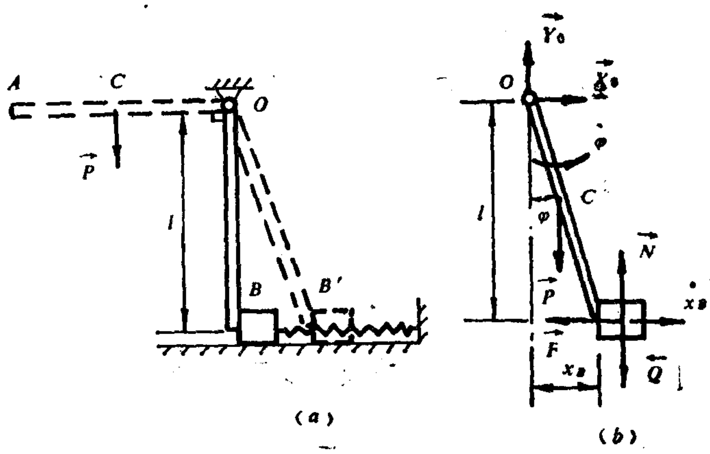

图1-7

得 $$\omega_1=\sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{1}$$

再以OA杆与物块B为研究对象．根据碰撞时系统对O点的动量矩守恒，求得碰撞后OA杆的角速度ω_2，即

$$J_0\omega_1=J_0\omega_2+\frac{Q}{g}v_Bl=\left(J_0+\frac{Q}{g}l^2\right)\omega_2$$

得 $$\omega_2=\frac{\frac{P}{3g}l^2\sqrt{\frac{3g}{l}}}{\frac{P}{3g}l^2+\frac{Q}{g}l^2}=\frac{P}{P+3Q}\sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{2}$$

将系统置于任一位置，如图(b)所示．根据运动关系，有：

$$x_B=l\sin\varphi$$
$$\dot{x}_B=l\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{3}$$

在图(b)所示的受力图中，$\vec{N}=-\vec{Q}$，弹簧力F为：

$$F=kx_B=kl\sin\varphi \tag{4}$$

应用质点系动量矩定理建立微分方程，即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_0\dot{\varphi}+\frac{Q}{g}\dot{x}_Bl\right)=-P\frac{l}{2}\sin\varphi-Fl \tag{5}$$

将式(3)、(4)代入式(5)，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\dot{\varphi}+\frac{Q}{g}l^2\dot{\varphi}\cos\varphi\right)=-\left(P\frac{l}{2}+kl^2\right)\sin\varphi$$

由于微振动有$\cos\varphi\approx1$，$\sin\varphi\approx\varphi$，故上式可简化为

$$\left(\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2+\frac{Q}{g}l^2\right)\ddot{\varphi}=-\left(P\frac{l}{2}+kl^2\right)\varphi$$

即 $$\ddot{\varphi}+\frac{3(P+2kl)g}{2(P+3Q)l}\varphi=0 \tag{6}$$

固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3(P+2kl)g}{2(P+3Q)l}}$$

式(6)的通解为

$$\varphi = \Phi \sin(\omega_n t + \alpha) \tag{7}$$

求导得

$$\dot{\varphi} = \Phi\omega_n \cos(\omega_n t + \alpha) \tag{8}$$

将初始条件：$t=0$，$\varphi=0$，$\dot{\varphi}=\omega_2=\frac{P}{P+3Q}\sqrt{\frac{3g}{l}}$代入式(7)、(8)，解得：

$$\alpha = 0$$
$$\omega_2 = \Phi\omega_n$$

故振幅为：

$$\Phi = \frac{\omega_2}{\omega_n} = \sqrt{\frac{2P^2}{(P+3Q)(P+2kl)}}$$

四、均质杆AB长为l，质量为m，A端铰接一质量亦为m的套筒，并用销子EF将套筒锁住在CD杆上．开始AB杆静止于图1-8(a)所示的最高（铅垂）位置Ⅰ，然后无初速地绕A点转动到最底位置Ⅱ，此时销子EF突然折断，使套筒A可在水平轴CD上自由滑动．设摩擦与销子的质量不计，并忽略销子折断时消耗的能量．当AB杆又上升到水平位置Ⅲ时，求：(1) 套筒A运动的速度和杆AB的角速度；(2) 铰链A的约束反力．(20分)

解：(1) 以AB杆为研究对象（A被锁住），应用动能定理，求杆自Ⅰ位置到Ⅱ位置时AB杆的角速度$\omega_{\text{Ⅱ}}$，如图(b)所示．即：

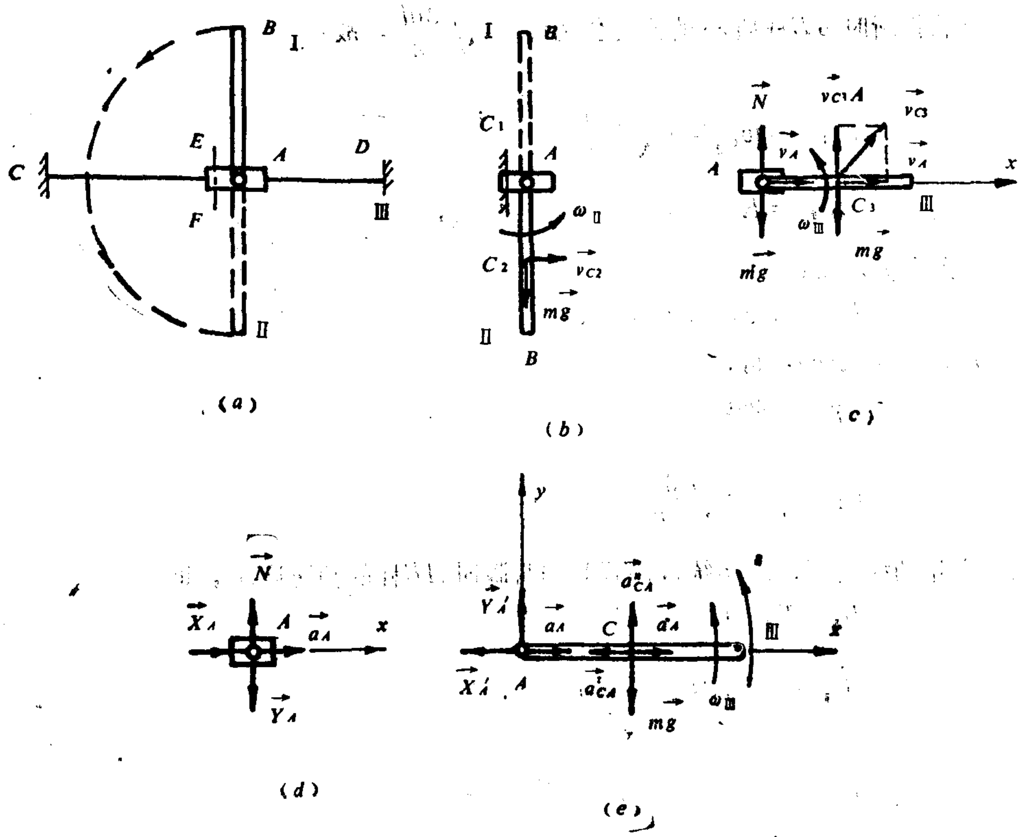

图1-8