

离心压缩机

朱报祯 郭 涛



2

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书着重介绍离心式压缩机和风机的二元粘性流的基本知识和分析方法；详细讨论了离心叶轮以及扩压器等静止元件内的理想流体流动和粘性流体流动；并介绍了二元流动的数值解法。本书还结合间隙内的粘性流动讨论轮阻损失和内泄漏损失，对不稳定工况作了较详细阐述。

本书可作为高等院校有关专业教材和教学参考书，也可供从事离心压缩机和通风机设计和研究的工程技术人员参考。

离 心 压 缩 机

朱报禎 郭 涛

责任编辑 林家让 李占良

*

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁路28号)

西安电子科技大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14 字数：334千字

1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

印数：1——2000册

ISBN7-5605-0226-1/TK·25 定价：2.85元

前 言

气体流经离心叶轮和静止通道时，其实际流动是非常复杂的。气流参数沿截面分布是不均匀的，并随时间而变化。由于粘性的影响，不仅气流参数的不均匀性更为严重，而且会引起二次流和分离流动。所以离心压缩机及风机内的气体流动是三元非定常粘性流动。

工程上为了实用起见，长期以来，人们通常把气体流动作为一元流动来处理，也就是假定流道的每一截面上，气流的参数是相同的，并取其平均值。同时，在定常工况下，认为叶轮内相对坐标上各点的气流参数和静止元件内绝对坐标上各点的气流参数均不随时间而变。这就是一元定常流动的假设。至于粘性的影响，只作一般的定性分析。在设计和计算中往往用损失系数或效率考虑粘性的累积影响。

一元流动模型虽然是对实际流动的一种简化，但是这种流动模型能对内部流动的总的特性和主要规律获得较为清晰的了解。在一元流动模型基础上建立起来的设计方法，目前仍然是离心压缩机和通风机进行方案选择和工程设计的主要方法。

显然，一元流动假定所固有的不合理性，使得这种流动模型只能估计总的特性，而不能提供内部流场的实际情况。要进一步提高机器性能，一元流动的处理已不能满足要求。随着计算机技术的发展，二元流和准三元流理论已逐渐在工程设计中获得应用。目前工程上的实际状况是，对于扭曲叶片叶轮采用准三元流理论进行设计计算。对于常规叶轮（非扭曲叶片叶轮），由于其相对宽度不太大，采用二元流理论能较好地反映实际流动情况。但是二元流理论在工程上并未得到系统的应用，而是仍以一元流动模型为主，这就使产品技术水平的提高受到很大的限制。

随着实验技术水平的提高，例如热线风速仪和激光测速仪等的应用，人们对流道内的实际流场的认识逐渐深入。这就有可能建立和完善粘性流动模型，在设计计算中考虑粘性效应。

基于上述思想，本书着重介绍离心压缩机及风机的二元粘性流的基本知识及其应用。本书共分八章：第一章介绍气体流动的基本方程；第二、三章分别阐述叶轮内理想流体流动和粘性流体流动及边界层计算；第四章讨论离心叶轮的设计；第五章介绍静止元件内的气体流动；第六章在讨论间隙内粘性流动的基础上，阐述轮阻损失、内泄漏损失和轴向推力；第七章叙述离心压缩机及风机的不稳定工况；最后在第八章内阐述了理想二元流动的数值计算方法，其中包括有限差分法、有限元法和边界元方法。

本书第三、八两章由郭涛执笔，其余各章由朱报楨执笔，并由朱报楨定稿。本书由华东化工学院朱复中审稿。

作者在编著本书时，力图讲清基本概念，阐述离心压缩机及风机二元粘性流所必须的基本知识和研究方法。本书可作为流体机械、风机和压缩机等有关专业的本科生选修课教材、研究生教学参考书，也可供从事风机、压缩机和流体机械的工程技术人员参考。

本书如有不妥之处，敬请批评指正。

作 者

1987年12月

主要符号说明

- a 音速；加速度；叶道宽度
 A 通流面积
 b 叶轮宽度
 B 阻塞比
 c, C 绝对速度
 c_f 摩擦系数
 c_p 定压比热
 d, D 直径
 d_h 水力直径
 e 单位质量气体的能量
 E 弹性模量
 f 粘性力
 F 力
 h 能量头
 h_{th} 理论能量头
 H 转子焓；形状因子 $H = \delta^*/\theta$
 H_1, H_2 拉梅系数
 i 静焓；冲角
 I 旋转滞止压力；泛函
 J 泛函
 k 等熵绝热指数；曲率 $k = \frac{1}{r_c}$
 l 长度；混合长度；单位质量气体所作的功
 l_0 平板混合长度
 L 功
 m 质量；子午流线坐标
 M 质量流量；马赫数
 n 转速；多变指数；法线方向
 N 功率
 p 静压
 P 力
 q 热量
 Q 容积流量；外加热量
 r 半径
 $r, \theta(\varphi), z$ 圆柱坐标系坐标轴

r_h 水力半径
 r_c, r_n 曲率半径
 R 气体常数; 半径
 Re 雷诺数
 R_i Richardson 数
 s 熵; 流线方向
 S 横截面积
 t 栅距; 时间
 T 温度; 力矩
 U 势流相对速度; 湿周
 u 圆周速度; 叶道内 x 向相对速度
 u^+ 无量纲速度 $u^+ = u/v^*$
 v 比容; 叶道内 y 向相对速度
 v^* 摩擦速度 $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$
 w 相对速度; 权函数
 W 相对速度
 x, y, z 坐标系
 y^+ 无量纲长度 $y^+ = \frac{v^* y}{\nu}$
 z 叶片数; 压缩性系数; 复坐标
 l, φ, n 正交曲线坐标系
 α 绝对速度方向角
 α_A, β_A 叶片角
 β 相对速度方向角
 β_i Mounin-Oboukhov 系数
 γ 准正交线方向角
 Γ 流场边界, 环量
 δ 边界层厚度; 落后角; 变分符号; 广义函数
 δ^* 边界层位移厚度
 δ_s 边界层能量厚度
 ε 压力比
 ζ_p 压力恢复系数
 η 效率
 θ 边界层动量厚度; 扩张角
 κ 卡门常数
 λ 角动量; 摩擦阻力系数
 μ 滑移系数; 动力粘性系数
 μ_t 涡粘系数
 ν 运动粘性系数

ξ, η 局部坐标
 Π 尾迹参数
 ρ 密度
 σ 子午流线倾角; 滑移系数
 τ 切应力, 流面厚度, 叶片厚度阻塞系数
 τ_t 湍流切应力
 τ_w 壁面切应力
 φ_{v2} 周速系数
 φ_{r2} 流量系数
 Φ 势函数
 φ_i 基函数
 Ψ 流函数
 ω 角速度
 Ω 求解域
 Ω_s 涡量

下标

1 进口; 叶轮进口
 2 出口; 叶轮出口
ad 等熵
av 平均
eq 当量
f 摩擦
h 轮盘
i, I 理想流体
j 射流
l 泄漏
loss 损失
m 子午面
p 压力面
pol 多变
r, u, z 径向; 周向; 轴向
s 吸力面; 轮盖
st 滞止
v 粘性流体
w 尾流, 壁面

上标

' 湍流脉动量
 - 平均; 时均; 沿流面

目 录

前言

主要符号说明

第一章 气体流动的基本方程

§ 1-1 概述	(1)
§ 1-2 气体流动的速度和加速度	(2)
§ 1-3 状态方程	(9)
§ 1-4 连续方程	(9)
§ 1-5 运动方程	(11)
§ 1-6 叶轮机械基本方程——欧拉方程	(12)
§ 1-7 能量方程	(14)
§ 1-8 伯努利方程	(18)
§ 1-9 气体压缩过程和压缩功	(21)
参考文献	(24)

第二章 叶轮内理想流体流动

§ 2-1 回转面上气流速度分布	(25)
§ 2-2 轴向涡流	(31)
§ 2-3 叶片表面速度的快速算法	(34)
§ 2-4 子午面上气体流动的平衡方程	(38)
§ 2-5 叶轮进口流场	(40)
§ 2-6 叶轮子午面上速度分布	(44)
§ 2-7 流线曲率法简介	(46)
参考文献	(47)

第三章 叶轮内的粘性流动及边界层计算

§ 3-1 边界层理论的一般介绍(预备知识)	(49)
§ 3-2 叶轮内的粘性流动分析及计算模型	(59)
§ 3-3 叶轮内二元不可压湍流边界层的求解	(63)
§ 3-4 叶轮内部流场计算中的几个问题	(77)
§ 3-5 叶轮内的流动损失	(87)
参考文献	(90)

第四章 离心叶轮的设计

§ 4-1 滑移系数	(94)
§ 4-2 叶片型线设计	(101)
§ 4-3 导流锥型线的设计	(110)
参考文献	(112)

第五章 静止元件

§ 5-1 无叶扩压器	(113)
§ 5-2 叶片扩压器	(128)
§ 5-3 弯道和回流器	(138)
§ 5-4 蜗室	(144)
参考文献	(151)

第六章 轮阻损失、内泄漏损失和轴向推力

§ 6-1 概述	(154)
§ 6-2 旋转盘与静止壁之间的层流流动	(156)
§ 6-3 旋转盘与静止壁之间的湍流流动	(160)
§ 6-4 轮阻损失	(161)
§ 6-5 内泄漏损失	(162)
§ 6-6 轴向推力	(167)
参考文献	(169)

第七章 离心压缩机的不稳定工况

§ 7-1 概述	(170)
§ 7-2 离心压缩机的失速	(170)
§ 7-3 离心压缩机的喘振	(175)
§ 7-4 离心叶轮的堵塞流量	(180)
参考文献	(182)

第八章 叶轮内理想二元流动的数值计算

§ 8-1 概述	(183)
§ 8-2 气体沿 S_1 、 S_{2m} 流面的基本方程组	(184)
§ 8-3 有限差分法	(188)
§ 8-4 有限元法	(193)
§ 8-5 边界元方法	(207)
参考文献	(213)

第一章 气体流动的基本方程

§ 1-1 概 述

离心压缩机是一种高速旋转的透平机械，就其作用来说，它是一种能量转换机械。它藉原动机(电机或工业汽轮机等)拖动，消耗机械能以排送和压缩各种气体，使气体压力提高，满足各种不同工艺流程的需要。图 1-1 为六级离心压缩机剖视图。图 1-2 为四级离心压缩机纵剖面图。低压气体从进气管吸入，依次流经相间排列的叶轮和静止元件，最后高压气

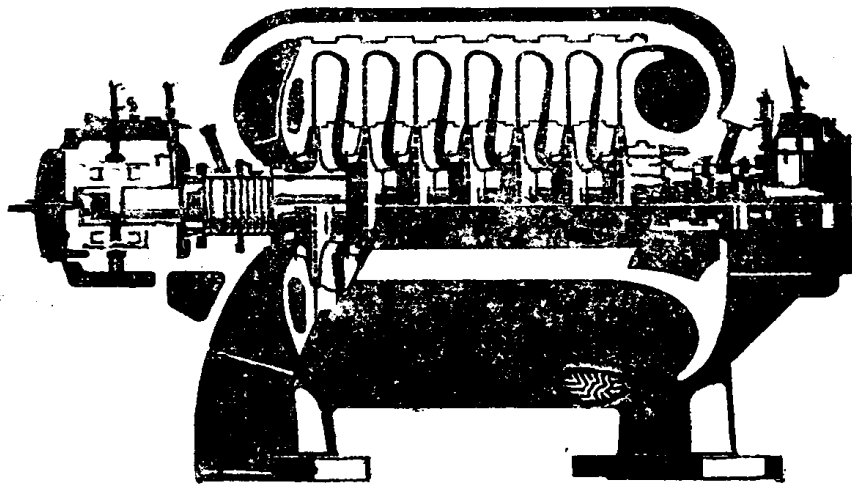


图 1-1 六级离心压缩机剖视图

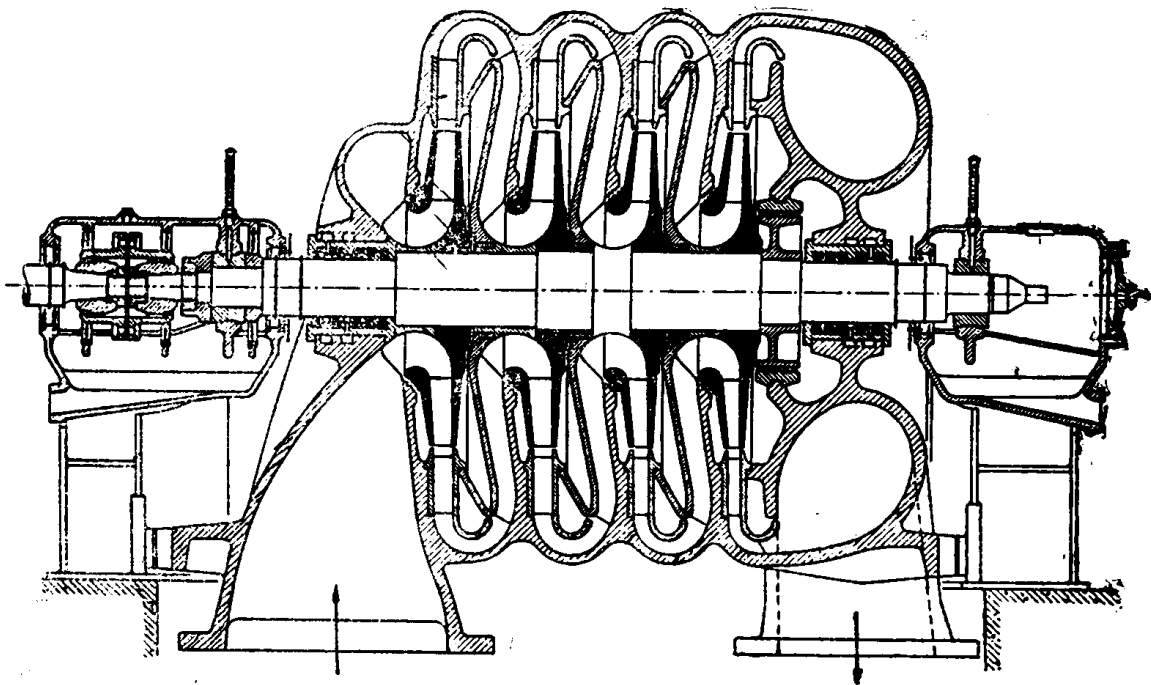


图 1-2 四级离心压缩机纵剖面图

体由排气管输出。每个叶轮及其后的静止元件组成一个基本单元，称作级。除末级以外，级的静止元件包括扩压器、弯道和回流器。末级的静止元件有扩压器和蜗室。级的简图如图 1-3 所示。

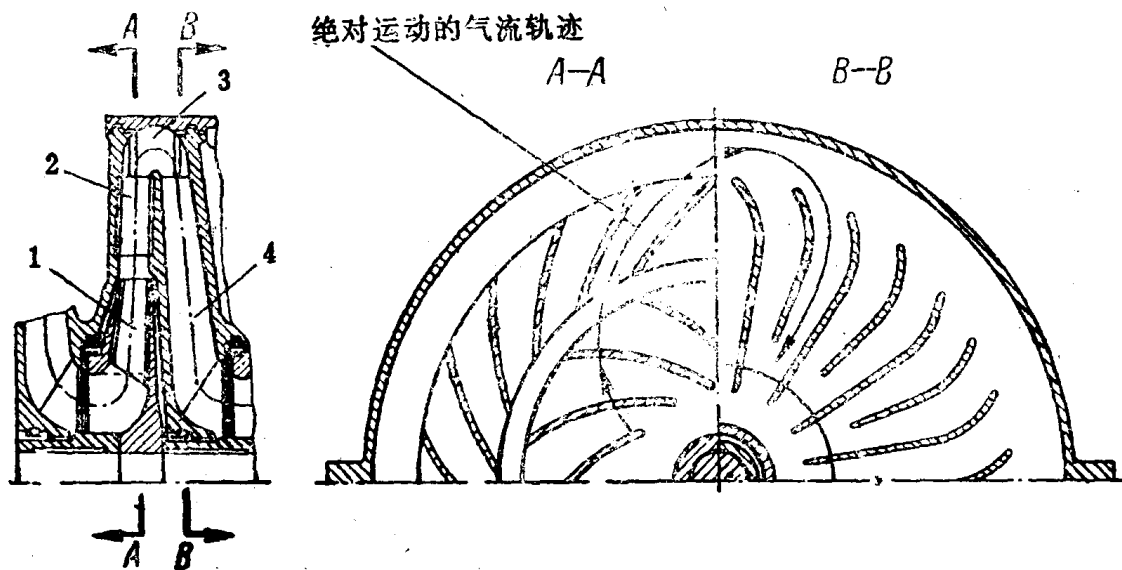


图 1-3 中间级简图

1—叶轮 2—扩压器 3—弯道 4—回流器

气体流经旋转的叶轮时，叶片对气体做功，提高气体的压力和速度。随后在静止元件内，气体速度降低，压力进一步提高。可见，离心压缩机内的气体流动主要是扩压流动。对于粘性流体而言，扩压流动容易引起边界层分离，使流动条件恶化，产生附加损失，这是离心压缩机与蒸气轮机(或燃气轮机)在气体流动方面的一个很重要的区别。

叶轮是离心压缩机的主要部件，气体流经叶轮时，得到能量，使压力、速度和温度均提高。叶轮设计的好坏直接影响气体流动的有效性。气体流经静止元件的通道时，虽然没有能量的加入，但气体的能量会发生相互转化，即速度降低，压力提高，或速度增加，压力降低。在这转化过程中伴随有流动损失。因此，静止元件内的气体流动同样必须给以足够的重视。

为了了解气体流动特点、气体所获得的能量及气体本身能量的转换过程，本章着重讨论气体流动的基本方程及其应用。

§ 1-2 气体流动的速度和加速度

一、坐标系

离心压缩机中的气体微团是在环形通道或旋转的叶道中流动的，因此，采用圆柱坐标系讨论气体的流动比较方便。取三个坐标 r 、 θ 和 z 。 z 坐标一般取与旋转轴线一致，坐标 θ 是从所选定的绝对坐标轴(静止坐标轴)量起的角度，这一坐标系称作绝对圆柱坐标系，其相应的向量为 i_r 、 i_θ 和 i_z 。图 1-4 即为描写气体流动的绝对圆柱坐标系，流体微

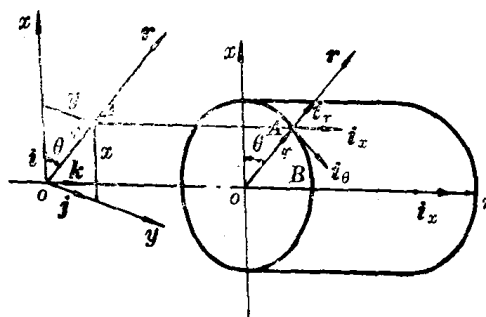


图 1-4 绝对圆柱坐标系

团在某点 A 的位置由坐标 r 、 θ 和 z 决定。

讨论叶轮内的气体流动时，一般采用与叶轮相同的角速度 ω 绕 z 轴旋转的圆柱坐标系 $(r, \varphi$ 和 $z)$ ，此坐标系称为相对坐标系。图 1-5 表示这两种坐标系之间的关系：

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \varphi + \omega t \\ r_a &= r \\ z_a &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中下标“ a ”表示绝对坐标系。两个坐标系的单位向量分别相等，即：

$$\left. \begin{aligned} i_{r,a} &= i_r \\ i_\theta &= i_\varphi \\ i_{z,a} &= i_z \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

将(1-1)式中的第一式对时间求全导数，并乘以 r ，得：

$$r \frac{D\theta}{Dt} = r \frac{D\varphi}{Dt} + r\omega$$

因为

$$r \frac{D\theta}{Dt} = c_u$$

又

$$r \frac{D\varphi}{Dt} = w_u$$

所以

$$\frac{Dr_a}{Dt} = \frac{Dr}{Dt}$$

$$\frac{Dz_a}{Dt} = \frac{Dz}{Dt}$$

$$\left. \begin{aligned} c_r &= w_r \\ c_z &= w_z \\ c_u &= w_u + r\omega \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

二、气体流动的绝对速度和相对速度

如果我们从绝对坐标系观察气体的运动，并以向量 \mathbf{c} 表示绝对速度，则

$$\mathbf{c} = c_r \mathbf{i}_r + c_u \mathbf{i}_\theta + c_z \mathbf{i}_z \quad (1-4)$$

它们之间的关系如图 1-6 所示。

在分析气体流动时，常常需要分析 \mathbf{c} 在子午面 (r 和 z 两坐标组成的平面) 上的分速度，即子午速度 \mathbf{c}_m 。设 \mathbf{c}_m 与 z 轴的夹角为 σ ，则

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma &= \frac{c_r}{c_z} \\ c_m &= (c_r^2 + c_z^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

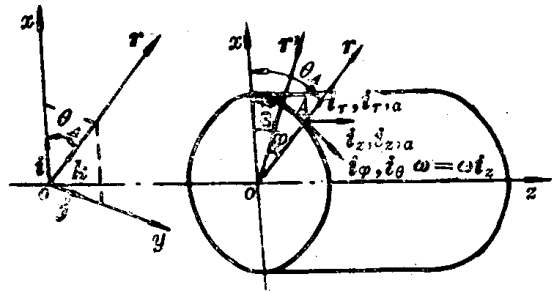


图 1-5 绝对坐标与相对坐标的关系

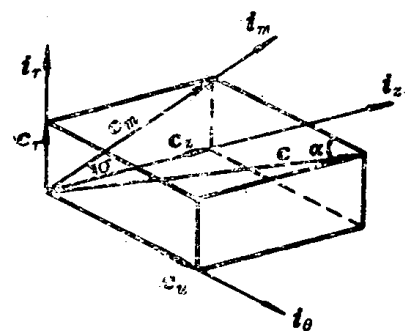


图 1-6 绝对运动各分速度间的关系

设 c 与 c_u 之间夹角为 α , 则

$$\left. \begin{aligned} c &= c_m + c_u \\ c_m &= c \sin \alpha \\ c_u &= c \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

由图可得:

$$\left. \begin{aligned} c_r &= c_m \sin \sigma = c \sin \alpha \sin \sigma \\ c_z &= c_m \cos \sigma = c \sin \alpha \cos \sigma \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

当气体流过旋转的叶道时, 一般采用相对坐标系考察气体的流动。用 w 表示相对速度向量, 这时

$$w = w_r i_r + w_u i_\varphi + w_z i_z$$

绝对速度 c 为相对速度 w 与牵连速度 u 的合成, 即

$$c = w + u = w + \omega \times r \quad (1-8)$$

它们之间的关系如图 1-7 所示, 并且有:

$$c_m = w_m \quad (1-9)$$

设 w 与 w_u 之间夹角为 β , 则有:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_m + w_u \\ w_m &= w \sin \beta \\ w_u &= w \cos \beta \\ w_r &= w_m \sin \sigma = w \sin \beta \sin \sigma \\ w_z &= w_m \cos \sigma = w \sin \beta \cos \sigma \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

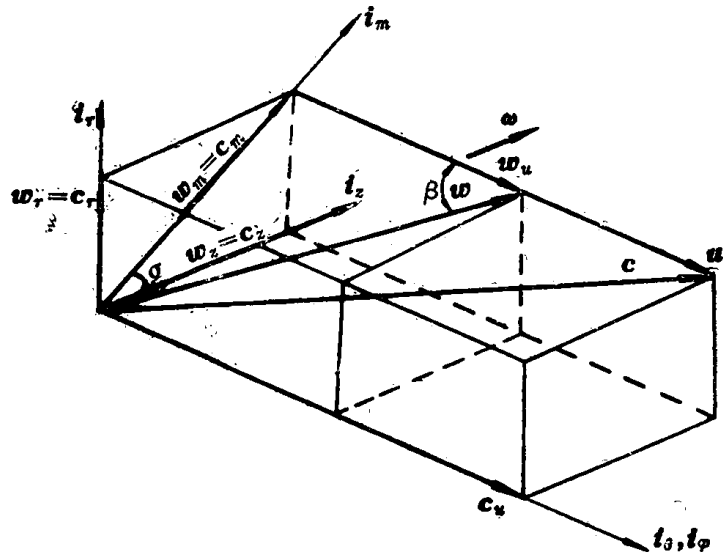


图 1-7 绝对速度和相对速度关系

三、气体流动的加速度

气体质点沿通道流动时, 其绝对速度和相对速度一般都要发生变化。由图 1-8 可以看出, 当质点移动时, 单位向量 i_θ 和 i_r 的方向都要改变, 而 i_z 方向保持不变。不难证明^[2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i_\theta}{\partial \theta} &= -i_r \\ \frac{\partial i_r}{\partial \theta} &= i_\theta \\ \frac{D i_r}{D t} &= -\frac{c_u}{r} i_\theta \\ \frac{D i_\theta}{D t} &= \frac{c_u}{r} i_r \\ \frac{D i_z}{D t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

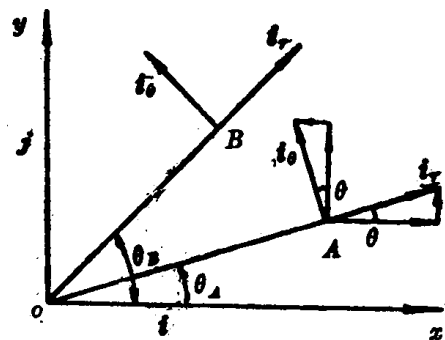


图 1-8 i_r 和 i_θ 的变化

气体质点运动时, 其瞬时绝对速度为:

$$c = c_r i_r + c_u i_\theta + c_z i_z$$

将上式沿气体运动方向对时间求全导数，得绝对加速度：

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{c}}{Dt} = \mathbf{i}_r \frac{Dc_r}{Dt} + c_r \frac{D\mathbf{i}_r}{Dt} + \mathbf{i}_\theta \frac{Dc_\theta}{Dt} + c_\theta \frac{D\mathbf{i}_\theta}{Dt} + \mathbf{i}_z \frac{Dc_z}{Dt} + c_z \frac{D\mathbf{i}_z}{Dt}$$

将(1-11)式代入上式，得

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{c}}{Dt} = \mathbf{i}_r \left(\frac{Dc_r}{Dt} - \frac{c_\theta^2}{r} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{Dc_\theta}{Dt} + \frac{c_r c_\theta}{r} \right) + \mathbf{i}_z \frac{Dc_z}{Dt} \quad (1-12)$$

从上式可得三个坐标轴方向上的加速度分量：

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_r = \frac{Dc_r}{Dt} - \frac{c_\theta^2}{r} \\ a_\theta &= \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_\theta = \frac{Dc_\theta}{Dt} + \frac{c_r c_\theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{D(c_\theta r)}{Dt} \\ a_z &= \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_z = \frac{Dc_z}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

因为 c_r 、 c_θ 和 c_z 均是 r 、 θ 、 z 和 t 的函数，将 $\frac{Dc_r}{Dt}$ 、 $\frac{Dc_\theta}{Dt}$ 和 $\frac{Dc_z}{Dt}$ 按多元函数求导方法展开，则上式成为：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_r &= \frac{\partial c_r}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_\theta \frac{\partial c_r}{r \partial \theta} + c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{c_\theta^2}{r} \\ \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_\theta &= \frac{\partial c_\theta}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_\theta}{\partial r} + c_\theta \frac{\partial c_\theta}{r \partial \theta} + c_z \frac{\partial c_\theta}{\partial z} + \frac{c_r c_\theta}{r} \\ \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_z &= \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} + c_\theta \frac{\partial c_z}{r \partial \theta} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

如流动是定常的，则

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = \frac{\partial c_\theta}{\partial t} = \frac{\partial c_z}{\partial t} = 0 \quad (1-15)$$

将(1-3)式代入(1-13)式，得绝对加速度和相对加速度的关系：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_r &= \frac{Dw_r}{Dt} - \frac{(w_\theta + \omega r)^2}{r} \\ &= \frac{Dw_r}{Dt} - \frac{w_\theta^2}{r} - \omega^2 r - 2w_\theta \omega \\ \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_\theta &= \frac{D(w_\theta + \omega r)}{Dt} + \frac{(w_\theta + \omega r)w_r}{r} \\ &= \frac{Dw_\theta}{Dt} + \frac{w_\theta w_r}{r} + 2\omega w_r \\ \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right)_z &= \frac{Dc_z}{Dt} = \frac{Dw_z}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

类似(1-12)和(1-13)式，可得相对加速度及其分量表达式：

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \left(\frac{Dw_r}{Dt} - \frac{w_\theta^2}{r} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{Dw_\theta}{Dt} + \frac{w_r w_\theta}{r} \right) \mathbf{i}_\theta + \frac{Dw_z}{Dt} \mathbf{i}_z$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_r &= \frac{Dw_r}{Dt} - \frac{w_u^2}{r} \\ \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_\varphi &= \frac{Dw_\varphi}{Dt} + \frac{w_u w_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{D(w_u r)}{Dt} \\ \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_z &= \frac{Dw_z}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

比较上两式，得

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt}\right)_r = \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_r - \omega^2 r - 2\omega w_u \\ a_\theta &= \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt}\right)_\theta = \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_\varphi + 2\omega w_r \\ a_z &= \left(\frac{D\mathbf{c}}{Dt}\right)_z = \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_z \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

同样， w_r 、 w_u 和 w_z 是 r 、 φ 、 z 和 t 的函数，将(1-17)式按多元函数求导方法展开，得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_r &= \frac{\partial w_r}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_u \frac{\partial w_r}{r \partial \theta} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{w_u^2}{r} \\ \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_\varphi &= \frac{\partial w_\varphi}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + w_u \frac{\partial w_\varphi}{r \partial \theta} + w_z \frac{\partial w_\varphi}{\partial z} + \frac{w_u w_r}{r} \\ \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt}\right)_z &= \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_u \frac{\partial w_z}{r \partial \theta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

如气流的相对运动是定常的，则

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} = \frac{\partial w_u}{\partial t} = \frac{\partial w_z}{\partial t} = 0$$

按质点运动的加速度合成原理，有

$$\frac{D\mathbf{c}}{Dt} = \frac{D\mathbf{w}}{Dt} - \omega^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} \quad (1-20)$$

式中 $-\omega^2 \mathbf{r}$ ——向心加速度

$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}$ ——哥氏加速度

很容易证明，哥氏加速度只有径向和切向的分量，并且有

$$\left. \begin{aligned} (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w})_r &= -2\omega w_u \\ (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w})_\varphi &= 2\omega w_r \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

由(1-20)和(1-21)两式同样可得关系式(1-18)。

(1-20)式有明确的物理意义：对绝对坐标系来说，单位质量气体上受到的力为 $\frac{D\mathbf{c}}{Dt}$ 。这个力使气体产生相对加速度 $\frac{D\mathbf{w}}{Dt}$ ，哥氏加速度 $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}$ 和向心加速度 $(-\omega^2 \mathbf{r})$ 。对相对坐标系来说，气体以速度 \mathbf{w} 和加速度 $\frac{D\mathbf{w}}{Dt}$ 运动，单位质量气体受到的力等于 $\frac{D\mathbf{w}}{Dt}$ ，而这个力是由实际作用于单位质量气体上的力 $\frac{D\mathbf{c}}{Dt}$ ，虚拟惯性力(即离心力) $\omega^2 \mathbf{r}$ 和哥氏惯性力 $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}$ 所合成。在这几种力的作用下，单位质量的气体产生了 $\frac{D\mathbf{w}}{Dt}$ 的加速度，即

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{D\mathbf{c}}{Dt} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \omega^2 \mathbf{r}$$

四、向量表达式

1. 运动参数的全导数

流动中气流参数的变化可以用该参数沿运动方向的全导数来表示，即向量表达式：

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla)(\quad) \quad (1-22)$$

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)(\quad)$$

(1-22)式既适用于向量参数，也适用于标量参数，例如气体压力 p 和密度 ρ 的全导数为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla)p \\ \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\rho \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

必须指出的是，标量参数与选取的坐标系无关。

对于绝对速度向量 \mathbf{c} ，(1-22)式成为：

$$\frac{D\mathbf{c}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{c} \quad (1-24)$$

式中 $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}$ ——当地加速度，它表示该点速度随时间变化的加速度；

$(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{c}$ ——迁移加速度，即由于空间位置变化引起的加速度。其中运算符 $\mathbf{c} \cdot \nabla$ 为：

$$\mathbf{c} \cdot \nabla = c_r \frac{\partial}{\partial r} + c_u \frac{\partial}{r \partial \theta} + c_z \frac{\partial}{\partial z}$$

所以

$$(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{c} = c_r \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial r} + c_u \frac{\partial \mathbf{c}}{r \partial \theta} + c_z \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial z}$$

同理，相对运动中全加速度为：

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} \quad (1-25)$$

根据向量运算，有

$$(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{c} = \nabla \left(\frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{c})$$

故(1-24)和(1-25)两式可写成如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\mathbf{c}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} - \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{c}) + \frac{1}{2} \nabla c^2 \\ \frac{D\mathbf{w}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \nabla w^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

2. 梯度

标量参数的梯度表达式为

$$\nabla u = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i}_z \quad (1-27)$$

式中 $\nabla \equiv \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$ ，称作向量微分算子。在透平机械中，标量参数有压力 p ，

密度 ρ 和温度 T 等。

(1-26)式中的梯度分别为

$$\begin{aligned}\nabla c^2 &= \mathbf{i}_r \frac{\partial c^2}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial c^2}{r \partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial c^2}{\partial z} \\ \nabla w^2 &= \mathbf{i}_r \frac{\partial w^2}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial w^2}{r \partial \varphi} + \mathbf{i}_z \frac{\partial w^2}{\partial z}\end{aligned}$$

3. 旋度

旋度的表达式为

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{c} &= \nabla \times \mathbf{c} \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial c_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rc_u)}{\partial z} \right] \mathbf{i}_r + \left[\frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \right] \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rc_u)}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{i}_z \\ \text{rot } \mathbf{w} &= \nabla \times \mathbf{w} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rw_u)}{\partial z} \right] \mathbf{i}_r \\ &+ \left[\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right] \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rw_u)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_z\end{aligned}$$

在气体动力学中，旋度为气体微元体绕其自身旋转角速度的二倍。当旋度为零时，即 $\text{rot } \mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{c} = 0$ ，称作无旋运动。若旋度不为零，即 $\text{rot } \mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{c} \neq 0$ ，称作有旋运动。

气体为无旋运动时，必须满足：

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial c_z}{\partial \theta} &= \frac{\partial (rc_u)}{\partial z} \\ \frac{\partial c_r}{\partial z} &= \frac{\partial c_z}{\partial r} \\ \frac{\partial (rc_u)}{\partial r} &= \frac{\partial c_r}{\partial \theta}\end{aligned}\right\} \quad (1-28)$$

同时，在整个无旋运动流场内，必定存在某一个速度势函数 Φ ，它满足下面条件：

$$\mathbf{c} = \text{grad } \Phi$$

所以无旋运动又称为有势运动。

由 $\mathbf{c} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ，可以得到绝对坐标系与相对坐标系旋度之间的关系：

$$\nabla \times \mathbf{c} = \nabla \times (\mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{w} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{w} + 2\boldsymbol{\omega} \quad (1-29)$$

由上式可以看出，当绝对坐标系中，如旋度为零，则相对坐标系中，旋度不等于零。绝对运动如是无旋运动，则相对运动为有旋运动。

4. 散度

速度的散度表达式为：

$$\left. \begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{c} = \text{div } \mathbf{c} &= \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{\partial c_u}{r \partial \theta} + \frac{\partial c_z}{\partial z} + \frac{c_r}{r} = \frac{\partial (rc_r)}{r \partial r} + \frac{\partial c_u}{r \partial \theta} + \frac{\partial c_z}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{w} &= \frac{\partial (rw_r)}{r \partial r} + \frac{\partial w_u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (1-30)$$

由(1-3)式知：

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} = \frac{\partial w_r}{\partial r}, \quad \frac{\partial c_u}{\partial \theta} = \frac{\partial w_u}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial c_z}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

故

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = \nabla \cdot \mathbf{w}$$

即速度场的相对散度与绝对散度是相等的。

§ 1-3 状态方程

完全气体状态方程为:

$$p = \rho RT \quad (1-31)$$

其微分形式为:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (1-32)$$

对于实际气体, 可以采用压缩性系数 z 修正上述关系式, 即

$$p = z\rho RT \quad (1-31a)$$

压缩性系数 z 的决定可参阅[1]。

气体的焓熵关系, 可由吉布斯恒等式表示:

$$Tds = di - \frac{1}{\rho} dp \quad (1-33)$$

如认为熵是均匀的, 则 $ds = 0$, 这时

$$di - \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad (1-33a)$$

对于完全气体, 有

$$di = c_p dT = \frac{k}{k-1} R dT$$

代入(1-33)式, 得

$$\frac{ds}{R} = \frac{k}{k-1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{\rho RT}$$

将(1-32)式代入, 并整理可得:

$$\frac{ds}{R} = \frac{1}{k-1} \frac{di}{i} - \frac{d\rho}{\rho} \quad (1-33b)$$

或

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{k-1} \frac{di}{i} - \frac{ds}{R}$$

积分得:

$$\ln \rho = \frac{1}{k-1} \ln i - \frac{s}{R}$$

或

$$\rho = i^{\frac{1}{k-1}} \cdot e^{-\frac{s}{R}} \quad (1-34)$$

式(1-34)为状态方程的另一形式, 它是对完全气体得到的。

§ 1-4 连续方程

连续方程是质量守恒的数学表达式。流体质点在其运动过程中, 质量流量必须保持为一常数。如取微小流管, 气体参数在流管横截面内是均匀的, 则气体密度 ρ 和质点运动速度 c 只