大学数学学习方法指导丛书（I辑）

差分方程和常微分方程

阮 炯 编著

复旦大学数学系主编

復旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

大学数学学习方法指导丛书(Ⅰ辑)

差分方程和常微分方程

复旦大学数学系　主编

阮　炯　　　编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

差分方程和常微分方程/阮炯编著.—上海:复旦大学出版社,2002.8
(大学数学学习方法指导丛书(Ⅰ辑))
ISBN 7-309-03226-8

Ⅰ.差… Ⅱ.阮… Ⅲ.①差分方程-高等学校-教学参考资料②常微分方程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O241.3-44 ②O175.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第036036号

出版发行	复旦大学出版社 上海市国权路579号 邮编:200433 86-21-65118853(发行部) 86-21-65642892(编辑部) fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
经销	新华书店上海发行所
印刷	上海第二教育学院印刷厂
开本	787×960 1/16
印张	18.5
字数	332千
版次	2002年8月第一版 2002年8月第一次印刷
印数	1-5100
定价	27.00元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

内容提要

本书系统地介绍了差分方程和常微分方程的各种问题与处理这些问题的方法.第一部分介绍差分方程的归结、求解方法与解的性质;第二部分介绍常微分方程各种可求解的类型及分析求解与数值求解的方法;第三部分介绍常微分方程解的基本理论与定性理论及方法;第四部分介绍由实际问题归结为常微分方程模型的方法.每章都配有例题与习题,习题均附有解答或提示.本书可作为理工科学生和差分方程与常微分方程课程自学者及教师的参考书,也可作为报考研究生的读者的复习指导书.

序　言

10多年前，我系几位教师编写了一套《大学数学学习指导》丛书. 丛书出版后颇受欢迎，不久书市即告售罄. 其后，兄弟院校的同行和不少青年学子纷纷来函求购，出版社也多次与我们联系再版事宜，只是作者们长期承担着繁重的教学和科研任务，无暇顾及修订工作. 近年来，随着学科的发展，课程建设又提上了议事日程. 我系一些重要基础课的新教材陆续问世，与此同时，不少教师再次萌发了重新整理、总结在教学工作中积累起来的心得的意愿. 在复旦大学出版社的促进下，推出这套全新的丛书也时机成熟、水到渠成了.

数学科学的发展正处于一个不平凡的时期. 科学技术的进步、实践应用的增多、计算机的影响以及数学科学自身的进展，大大拓广了数学科学的范围和领域. 在不少场合，数学已经从科学研究的幕后，大步跨上了技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙. 这就导致社会对其成员数学能力要求的指标不断提高，期望涌现出更多的数学基础扎实、创新能力较强、知识面宽广、综合素质上佳的数学人才. 相应地，数学教育的目标，也就不仅在于为学生提供一种专业知识的传授，更重要的在于引导学生掌握一种科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括演绎、归纳、分析和类比等各项数学素质的训练. 卓有成效的数学训练将为学生充分参与未来世界的竞争作好准备.

数学的理论是美妙的，引人入胜；数学的方法是精巧的，丰富多彩；但学好数学却必须付出艰辛的劳动. 在教学过程中，我们经常遇到这样的学生：他们能背出一些基本的公式，却做不了略有变化的演算，他们能记得住一些基本的定理，却给不出稍分层次的推理. 有些学生依然留恋早年接受的、为应试而被不恰当地夸大了的"题型教学"，不理解这种训练手段怎么在大学课堂里销声匿迹了. 这些学生学习数学的方法大多较为稚嫩，他们对数学知识只停留于形式的理解，并未达到实质的掌握. 其实，与大多数其他学科相比，数学能为学生提供更多的学习独立思考的机会. 在任何一门数学课程的学习过程中，起主导作用的并非教师，而是学生. 学生学习数学的过程应当是一个再创造的过程. 学生应当按自己的认识去解释、分析所学的内容，用新的观点去改造原有的理解，从而在个人数学知识的库藏中打上自己特有的烙印. 只有通过深入的思考，将吸收的新知识有机地融入原有知识结

构中，用心灵的创造来体验数学，对抽象的对象建立起直观的理解，才能真正地学好数学. 我们希望这套丛书能在方法上为学生学习数学提供有益的借鉴与启迪.

虽然，学习数学的方法因人而异，但是，数学课程的一些基本环节却是值得共同注意的. 首先，要学好一门数学课程，毋庸置疑应掌握它所包含的最基本的数学思想. 这就是说，既要深入理解有关主要对象的概念和性质，又必须把一系列的定义和定理科学地融合在一起，从整体上把握这个知识体系的发端、推进和提升，融会贯通地领悟贯穿于课程中的数学思想与精神. 其次，数学思想是通过特定的数学方法来实现的，每门课程所蕴含的数学方法提供了构筑相应理论框架的主要工具，也提供了作出分析、判断、转化、求解等具体策略的依据. 从猜想的形成、分析的展开，到计算、推理的实施、提炼、拓广的升华，数学方法在解决问题的过程中处处体现着自身的价值. 再次，每门数学课程都有不少特殊的数学技巧. 它们不仅显示了运算与论证的灵活性，而且是各种成功的数学方法所不可缺少的重要因素. 一个有相当深度的技巧往往来自丰富的想像和敏锐的观察. 数学技巧的介绍与训练，对学生思维的引发、开拓和深化有十分重要的意义. 总之，数学思想、数学方法和数学技巧三位一体，共同构成了有血有肉的一门门数学课程. 因此，要学好数学，也就必须在领会思想、掌握方法、熟练技巧上多下功夫.

正是基于上述认识，在这套丛书中，每一册大体包括概念和性质的简介与提要、主要方法与典型例题的分析与讨论，同时，还配置了一定数量的习题. 希望读者可参照这个内容的三部曲，通过对数学思想、方法和技巧的思考与消化，把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶.

编写这套丛书的作者们都具有丰富的教学经验，他们在编写时还注意到兼顾读者的多种需要：无论是学生在学习相应课程时同步使用，还是在学完一门课程后作总复习的参考，抑或为报考研究生而作考前准备，都将从中获得较大的收获. 我们也愿意借助这套丛书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流.

复旦大学数学系将这套丛书的编写列入加强本科教学工作的计划之中. 数学系、所的许多教授对如何编好这套丛书提出一系列中肯的建议，为提高丛书质量创造了有利条件. 复旦大学出版社的范仁梅女士对这套丛书的策划和编辑倾注了大量的心血. 我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意.

限于水平，这套丛书的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正. 希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使这套丛书日趋成熟.

复旦大学数学系
教学指导委员会
2002 年 4 月

前　　言

本书系统地介绍了差分方程和常微分方程的各种问题与处理这些问题的方法．编写本书的目的，一是为理工科及经济管理类专业学生和差分方程与常微分方程自学者提供一本指导学习理论与解题方法的参考书；二是为报考研究生的读者提供一本复习迎考的指导书；三是为有关的教师提供教学与考试命题的参考书．

本书内容共分四部分．第一部分"差分方程的模型归结、求解方法及解的性质"，介绍了线性差分方程的模型与求解方法，非线性差分方程归结与定性分析解的性质的方法；第二部分"常微分方程与定解问题的类型及求解方法"，介绍了各种可求解的类型及方法；第三部分"常微分方程解的性质与定性分析方法"，介绍了解的基本理论、定性理论与方法；第四部分"常微分方程模型的归结与应用"，介绍了由实际问题归结为常微分方程模型的方法及应用．本书每一章前面是理论与方法提要，后面是例题及习题．提要部分对一般常微分方程和差分方程教科书中的定理与结果作了系统的归纳与总结，并概述了各种方法的实质与要领，但对于结论的详细证明大多被略去了．为了使读者在学习的时候避免在同一水平上的过分重复，例题与习题的选取注意既有内容上的广泛性，又有一定方法难度上的阶梯性．习题绝大部分配有解答，比较难的习题还附有提示．例题配得少而精，以利于清楚地介绍各种方法的应用，使读者能举一反三．

本书是为学习差分方程与常微分方程的课程而编写的参考书．主要围绕以下三方面的学习基本要求而展开的．

第一方面，对于能求出解的一些方程类型，要掌握它们的解法．从类型上讲，线性的常系数 n 阶方程与方程组是均能求解的，线性变系数 n 阶方程与方程组及非线性方程与方程组能求解的类型则很少．从方法来讲，主要用到 Euler 指数法、待定系数法、常数变异法、算子法、Laplace 变换法、变量代换法等方法，这些方法的实质是将差分方程化为代数方程，将常微分方程化为代数方程或用积分可以求解的方程．

第二方面，对于一般的方程，要掌握它们解的基本性质及讨论的方法．从性质来讲，差分方程主要是解的轨道的周期性与非周期性，混沌性质；常微分方程主要是初值问题解的存在惟一性，解对初值或参数的连续依赖性，解的估计，奇点的分类与判别，周期解与极限环的存在与判别，解的稳定性的差别．从方法来讲，差分方

程主要是映射，拓扑分析方法；常微分方程主要是逐次逼近法，微分积分不等式法，定性分析法及 Liapunov 函数法. 这些方法实质上是利用方程的形式而不借助于具体求解的方法.

第三方面，对于差分方程模型的归结要掌握按已知规律列式法；对于常微分方程模型的归结要掌握微元分析法，按已知规律列式法及近似待定模拟校正法三种方法. 具体要掌握的模型则随所学专业而定.

本书主要取材于编者多年来讲授差分方程及常微分方程课程及报考研究生开设的复习辅导课的讲稿. 例题与习题主要来源于复旦大学与其他高等院校的研究生试题及历届大学本科生的试题，另外还从国内外已出版的教材与习题集中选取一部分习题. 限于编者的水平和能力，难免有缺点和错误，殷切希望广大读者批评指教.

编者

2002 年 5 月

目　　录

第一部分　差分方程的模型归结、求解方法及解的性质

差分方程就是含有取离散值的单变量的函数及其差分的方程，也可以将其视为迭代关系：

$$x(t+1)=f(x(t)),\qquad t=0,1,2,\cdots \tag{0.1}$$

或者记为

$$x_{k+1}=f(x_k),\qquad k=0,1,2,\cdots \tag*{(0.1)$'$}$$

这里假定 x 与 f 均为一元函数，这种最简单的情形称为一阶自治的或定常的差分方程. 有时为了数学上讨论的需要，将其描述为如下的函数迭代的离散过程：

$$x,\ f(x),\ f^2(x),\ \cdots,f^n(x),\ \cdots$$

简称为一维离散的动力学系统.

如果 x 是具有 n 个分量的取离散值的单变量函数，那么就构成 n 阶差分方程组：

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)),\\ x_2(t+1)=f_2(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,x_n(t)),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n(t+1)=f_n(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,x_n(t)).\end{cases}\qquad t=0,1,2,\cdots \tag{0.2}$$

对于一阶的差分方程要讨论的基本问题是 $f^n(x)$ 随 n 的增大其变化将如何？一般地，当 $f(x)$ 是线性的情形，则(0.1)或(0.1)$'$ 中的解 $x(t)$ 或 x_k 的解析形式容易求得，但是当 $f(x)$ 是非线性的情形，则解的解析形式就不容易求得，此时需要用定性的方法讨论解的变化趋势及性质.

由于生命科学、化学、物理、力学、控制、经济等领域有不少现象只能用这种离散的数学模型来描述，也由于计算机技术的飞速发展，对连续的数学模型，数值计算其解也需要离散化，即变成差分方程求解，因此差分方程的研究近年来有了新的飞快发展.

第 1 章

差分方程的模型归结与应用

§1.1 基本方法

差分方程模型是实际应用中常见的一种数学模型. 用差分方程模型解决实际问题如同别的数学模型一样,大致需经过 3 个步骤.

第一步:设定好实际问题中的未知函数,按照已知的相关领域中的物理、力学、化学、生物、经济等学科的规律用于建立相邻的自变量值(一般就是相邻时间)的未知函数取值间的依赖关系,建立差分方程模型.

第二步:对上述建立的差分方程模型,若能直接求解的则求出其解,若不能直接求解的或直接求解比较困难的,则用定性的方法讨论其解的变化趋势及性质.

第三步:将数学讨论得到的结果与实际情形加以对照,然后给实际问题一个满意的答复.

本章主要介绍第一步与第三步. 第 2 章主要介绍第二步.

§1.2 例题解析

例 1.1 建立并讨论种群生态学中的虫口模型. 在种群生态学中考虑像蚕、蝉这种类型的昆虫数目(即"虫口")的变化,注意这种虫口一代一代之间是不交叠的,每年夏季这种昆虫成虫产卵后全部死亡,第二年春天每个虫卵孵化成一个虫子. 显然牛、马、羊、人均不属于此列.

解 首先,设未知函数是在第 n 年这种虫口的数目,要建立的差分方程数学模型就是相邻两代(或者说相邻两年,今年与明年,n 年与 $n+1$ 年)的虫子数之间的相依关系. 最简单的,设第 n 年的虫口为 P_n,每年成虫平均产卵 c 个,第$n+1$ 年的虫口为 P_{n+1},显见相邻两年虫口之间的依赖关系是

$$P_{n+1} = cP_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.1}$$

如果考虑到周围的环境能提供的空间与食物是有限的,虫子之间为了生存将互相竞争而咬斗,此外传染病及天敌又对虫子的生存存在威胁,可按这些因素的分析定

量地修改差分方程模型(1.1). 由于咬斗和接触都是发生在两只虫子之间的事件，而 P_n 只虫子配对的事件总数是 $\frac{1}{2}P_n(P_n-1)$，当 P_n 相当大时，此事件总数接近于 $\frac{1}{2}P_n^2$，所以模型(1.1)将被修改成如下的虫口方程：

$$P_{n+1}=cP_n-bP_n^2, \tag{1.2}$$

这里 b 是阻滞系数. 在进行一些变量与参数代换后，可以将其写成标准形式：

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n), \qquad \lambda>0,\ n=0,1,2,\cdots \tag{1.3}$$

这是一阶非线性差分方程. 近 20 多年来，人们对此具有很大兴趣，通常称之为 Logistic(阻滞)方程.

其次，对方程(1.1)或方程(1.3)求解，显然方程(1.1)的求解比较容易，而方程(1.3)的求解就比较难了. 有关虫口模型求解及在实际问题中应用的内容将放在第 2 章与第 3 章中讨论.

例 1.2 建立并讨论经济学中的蛛网模型.

解 在分析市场经济中农产品的价格和产量之间的关系中常常要用如下的规律：本期产量(或市场供给量)决定本期价格，而本期价格决定下期产量. 为了建立相关的数学模型，可以假设 P 表示价格，Q 表示产量，D 表示需求函数，S 表示供给函数，时间 t 表示第 t 期. 那么 P_t 则表示为第 t 期的价格，Q_t 表示第 t 期的产量. 把上述所说的规律用数学式子写出来，即为

$$P_t=D(Q_t), \tag{1.4}$$

$$Q_t=S(P_{t-1}). \tag{1.5}$$

将上述两式合并，得

$$P_t=D(S(P_{t-1}))=F(P_{t-1}), \qquad F=DS. \tag{1.6}$$

显见(1.6)式就是关于 P_t 为未知函数的差分方程.

我们也可以换一种观点来推导简单情形下的差分方程(1.6). 把市场经济中的市场供给量、价格、市场需求量之间的规律归结为下面三条：

(1) 市场供给量对价格变动的反应是滞后的，即第 t 期的供给量 Q_t^s 取决于第 $t-1$ 期的价格 P_{t-1}，而这种相依关系简单地取为

$$Q_t^s=-c+dP_{t-1} \qquad (c>0,d>0), \tag{1.7}$$

即相依关系是线性的正比例关系，而价格不能太小，至少 $P_{t-1}>\frac{c}{d}$，从而 $Q_t^s>0$.

(2) 市场需求量对价格变动的反应是瞬时的，即第 t 期的市场需求量 Q_t^d 取决于本期的价格 P_t，类似地这种相依关系简单地取为

$$Q_t^d=a-bP_t \qquad (a>0,\ b>0), \tag{1.8}$$

即相依关系是线性的，价格 P_t 减少，则市场需求量增加，而价格不能太高，至少 $P_t < \frac{a}{b}$，从而 $Q_t^d > 0$.

（3）市场平衡条件为市场清销，供需相等，即

$$Q_t^s = Q_t^d, \tag{1.9}$$

把（1.7）式与（1.8）式代入（1.9）式得

$$P_t = \frac{a+c}{b} - \frac{d}{b}P_{t-1}. \tag{1.10}$$

易知如果初始条件给定，那么 P_1 的值由方程（1.10）即得，然后 $P_2,\cdots,P_t$ 的值均可类似得到.

方程（1.10）的求解及与实际情况对照将在第2章中给出. 易知方程（1.10）是一阶常系数线性差分方程.

例 1.3 讨论消费、投资、收入之间的 Hansen-Samuelson 模型.

解 设第 t 年的国民收入为 Y_t，第 t 年的消费为 C_t，第 t 年的投资为 I_t，第 t 年的政府行政开支为 G_t，为讨论方便起见，记 $G_t = G_0$. 下面给出 Hansen-Samuelson 模型，它又称为乘数与加速系数交互作用模型.

$$Y_t = C_t + I_t + G_0, \tag{1.11}$$

$$C_t = bY_{t-1}, \tag{1.12}$$

$$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}), \tag{1.13}$$

其中 $0 < b < 1$，$\alpha > 0$.（1.11）式表示国民收入为消费、投资与政府行政开支之和.（1.12）式说明第 t 年的消费与上一年即第 $t-1$ 年的收入是成正比例的，其比例因子为边际消费倾向 b.（1.13）式说明投资与第 t 年比第 $t-1$ 年消费增长的量成正比例，其比例因子为加速因子 α.

由（1.12）式与（1.13）式易知

$$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) = \alpha b(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{1.14}$$

将（1.12）式与（1.14）式代入（1.11）式得

$$Y_t = bY_{t-1} + \alpha b(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_0,$$

化简得

$$Y_t - (1+\alpha)bY_{t-1} + \alpha bY_{t-2} = G_0. \tag{1.15}$$

这是二阶线性常系数差分方程，它的解法以及该例子解的实际应用将在第2章中给出.

例 1.4 求振动台上的乒乓球垂直运动的方程.

解 设乒乓球运动方向只沿垂直方向，乒乓球与振动台之间的碰撞恢复系数为 α，$\alpha \leqslant 1$，而 $\alpha = 1$ 表示乒乓球与振动台面是弹性碰撞，即碰撞时机械能量没有损

失. 振动台台面的位移是 $-\beta\sin\widetilde{\omega}t$,乒乓球初始时刻在离台面垂直距离 H 处为自由落体运动. 又 $\beta \ll H$. 假定 t_j 为第 j 次碰撞时刻,而第 j 次碰撞前的速度为 $-u(t_j)$,第 j 次碰撞后的速度为 $v(t_j)$. 现假设第 $j+1$ 次碰撞前的速度 $u(t_{j+1})$ 的大小等于第 j 次碰撞后的速度,方向相反,即有 $u(t_{j+1}) = -v(t_j)$. 振动台台面的运动速度记为 $w(t)$,则 $w(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\beta\sin\widetilde{\omega}t) = -\beta\widetilde{\omega}\cos\widetilde{\omega}t$,由自由落体公式可知:

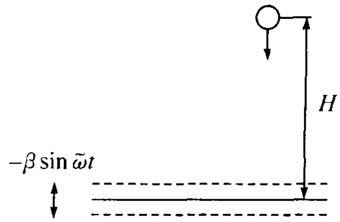

图 1.1

$$t_{j+1} - t_j = 2v(t_j)/g. \tag{1.16}$$

下面引进两个无量纲的参量作为系统的状态变量:

$$\phi = \widetilde{\omega}t, \qquad v = \frac{2\widetilde{\omega}v}{g}, \tag{1.17}$$

这里 ϕ 视为碰撞时刻或相位,v 视为碰撞后的速度. 再引进两个无量纲的参量作为系统的控制参量:α 与 γ,其中 α 为描述耗散作用的参量,γ 为描述力的振幅作用的参量,且成立

$$\gamma = \frac{2\widetilde{\omega}^2(1+\alpha)\beta}{g}. \tag{1.18}$$

上述准备过程完成后,下面来推导运动的差分方程组. 以下改记 $v(t_j)$ 为 v_j. 在(1.16)式两边乘以 $\widetilde{\omega}$ 得

$$\widetilde{\omega}(t_{j+1} - t_j) = \frac{2\widetilde{\omega}v_j}{g},$$

即得 $\phi_{j+1} - \phi_j = v_j$,或改写为

$$\phi_{j+1} = \phi_j + v_j. \tag{1.19}$$

乒乓球在 t_{j+1} 时刻碰撞前的速度 $-u_{t+1}$ 加上台面振动的速度 $w(t_{j+1})$,经台面受阻产生耗散作用,即乘上耗散因子 α 后等于乒乓球在 t_{j+1} 时刻碰撞后的速度 v_{j+1} 减去台面振动的速度 $w(t_{j+1})$,即

$$v_{j+1} - w(t_{j+1}) = \alpha(-u_{j+1} + w(t_{j+1})),$$

$$v_{j+1} = \alpha v_j + (1+\alpha)w(t_{j+1}) = \alpha v_j + (1+\alpha)(-\beta)\widetilde{\omega}\cos(\widetilde{\omega}t_{j+1}).$$

将上式两边乘以 $\frac{g}{2\widetilde{\omega}}$,得

$$v_{j+1} = \alpha v_j - \beta\widetilde{\omega}(1+\alpha)\frac{2\widetilde{\omega}}{g}\cos\phi_{j+1},$$

$$v_{j+1} = \alpha v_j - \gamma\cos(\phi_j + v_j). \tag{1.20}$$

(1.19)式与(1.20)式是以 ϕ_j 与 v_j 为状态变量的二阶差分非线性方程组,关于它的

求解及解的性质将在第 2 章、第 3 章中讨论.

例 1.5 Fibonaccii 问题. 考虑家兔的繁殖,假定现在有一对家兔,在它们长成一对成兔一个月后每月生一对幼兔,而每对幼兔在一个月后变成成兔. 如果一代一代繁殖下去,问在 n 月后将有多少对家兔?(当然 n 不会很大,譬如取家兔的平均寿命 N 月,$n \leqslant N$.)

解　将该问题化为二阶线性差分方程. 设 $p(n)$ 是第 n 个月家兔的对数,$a(n)$ 为其中成兔的对数,$b(n)$ 为幼兔的对数,则

$$p(n) = a(n) + b(n).$$

过了一个月后,原先的幼兔变成成兔,$a(n)$ 对成兔生了 $a(n)$ 对幼兔,$b(n)$ 对幼兔长成 $b(n)$ 对成兔,因此

$$a(n+1) = a(n) + b(n),\ b(n+1) = a(n).$$

于是

$$\begin{aligned} p(n+2) &= a(n+2) + b(n+2) = a(n+1) + b(n+1) + a(n+1) \\ &= p(n+1) + p(n). \end{aligned}$$

称

$$p(n+2) = p(n+1) + p(n) \tag{1.21}$$

为 Fibonaccii 方程,这是一个二阶线性常系数差分方程. 已知 $p(0) = 1, p(1) = 1$,由(1.21)式得 $p(2) = 2, p(3) = 3,\ p(4) = 5,\ p(5) = 8, \cdots\cdots$ 这就是有名的 Fibonaccii 数列,它具有许多迷人的性质,并已引发出大量的文章. 关于(1.21)式的解有许多为人们感兴趣的性质,将在第 2 章中阐述.

例 1.6　建立鲨鱼和小杂鱼的捕食与被捕食问题的模型.

解　设鲨鱼在 n 时间单位的量为 $x_1(n)$,小杂鱼在 n 时间单位的量为 $x_2(n)$,它们本身有繁殖率分别为 d_1, d_2. 小杂鱼的量增加引起鲨鱼量的增加,该因子为 b;反之,鲨鱼量的增加使小杂鱼量的减少,该因子为 $-c$,其中 d_1, d_2, b, c 均为正数,列出方程组为

$$x_1(n+1) = d_1 x_1(n) + b x_2(n), \tag{1.22}$$

$$x_2(n+1) = -c x_1(n) + d_2 x_2(n). \tag{1.23}$$

这是一个线性常系数的二阶差分方程组.

例 1.7　讨论 Maynard Smith 方程.

解　在 1968 年,Maynard Smith 在研究果蝇的某个种群在实验室条件下的生存情况时提出了下列 Maynard Smith 方程:

$$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-T} + c x_{n-T}^2, \tag{1.24}$$

其中 x_n 表示第 n 时间段后(例如第 n 天)种群的总数,a 为出生率,b 为死亡率($a > 0,\ b < 0$),c 为制约因素($c < 0$). 现考虑果蝇进食、产卵、最后孵化出新的生命. 设

孵化期为 T 天，一般 $T \approx 30$，即经过 T 天后果蝇死去．注意方程(1.24)的推导与例 1.1 中的方程(1.2)的推导过程类似，但是方程(1.2)中的 P_n^2 项现在被 x_{n-T}^2 项取代，又减掉了死亡的果蝇数目，即 bx_{n-T} 项．

方程(1.24)是高阶的非线性差分方程．对于 $T = 1$ 的特殊情况，方程(1.24)改记为

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2. \tag{1.25}$$

如果置 $y_n = x_{n-1}$，那么方程(1.25)还可以写为二阶非线性差分方程组的形式：

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + cy_n^2, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \tag{1.26}$$