高等学校试用教材

非线性规划

胡毓达

高等教育出版社

ISBN 7-04 ...0·899
定价 2.40 元

高等学校试用教材

非线性规划

胡毓达 主编

高等教育出版社

出 版 前 言

本书于1987年经全国高等工业学校应用数学专业教材委员会评审，推荐为应用数学专业试用教材.

全书共分8章，较系统地阐述了非线性规划的基本理论和基本方法. 本书也可供运筹学、计算数学、管理科学和系统工程等专业作为教材，并可供有关科学工作者及工程技术人员参考。

高等学校试用教材

非线性规划

胡毓达 主编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.875 字数 235,000

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

印数 0001—1,720

ISBN 7-04-002840-9/O·899

定价 2.40 元

序　言

非线性规划是现代应用数学的一门重要学科，它的研究对象是非线性函数的数值最优化问题．由于非线性数值最优化问题是最优化研究中重要的中心课题，因此，通常的所谓最优化理论主要即指非线性规划理论，而最优化方法也主要是指非线性规划的求解方法．

大家知道，古典的微分法可以解决非线性最优化中的某些简单问题．然而，直至本世纪50年代初，在奠定了非线性规划的基本理论之后，这门学科才在电子计算机广泛应用的推动下迅速地发展起来，并成为一门十分活跃的新兴学科．非线性规划是一门有着鲜明的实际应用背景的应用数理学科，它的理论和方法已渗透到许多自然科学，社会科学和工程技术之中．特别是，它在经济计划，工程设计，生产管理以及军事运筹等方面有着非常广泛的应用．

本书较系统地阐述了非线性规划的基本理论和基本方法．全书共8章．第1章介绍非线性规划的数学模型，有关基本概念和关于求解模型的非线性规划方法的一般性描述．第2章和第3章讨论非线性规划的一些基本理论．第2章叙述了凸集和凸函数，并讨论了非线性凸规划的某些有关性质，第3章给出非线性规划问题最优解的基本的必要条件和充分条件．第4章至第8章介绍求解非线性规划问题的方法．第4章先介绍几种求一维最优化问题的方法，它们是以后大多数非线性规划方法的求解基础．第5和第6两章阐述无约束非线性规划方法，其中第5章讨论利用目标函数导数信息的一些基本方法，第6章介绍仅需目标函数值计算

的直接搜索的方法. 第7章和第8章介绍约束非线性规划方法, 第7章叙述保持满足约束要求的求解方法, 第8章则介绍把约束问题转换为无约束问题进行求解的方法. 为了便于读者理解和掌握本书的内容, 各章均选配了一定数量的习题, 书末还附有这些习题的答案.

本书是根据全国高等工业学校应用数学专业教材委员会拟定的"非线性规划教材基本要求", 并在我和肖柳青为上海交通大学高年级大学生讲授非线性规划课程编的《非线性规划》讲义的基础上写成的. 作为应用数学专业的非线性规划教材, 它的基本内容可于54学时完成. 如果讲授者在使用时根据时数的要求对内容作适当的增减, 也可用于更少或更多学时的相应课程. 由于本书在系统介绍基本内容的同时还具有一定的机动性, 所以有着比较广泛的适用范围. 本书也可以作为运筹学, 计算数学, 管理科学和系统工程等专业大学生, 以及运筹学, 系统工程, 数理经济学和工科有关专业研究生的教材或教学参考书. 此外, 它还可供从事运筹学, 计算数学和管理科学的工作者以及工程技术人员作参考书.

在本书的写作中, 复旦大学陈开明教授提供了第6, 第8两章的初稿, 上海交通大学肖柳青讲师提供了第2, 第3两章的初稿. 这里, 我要特别感谢他们的支持与合作. 上海交通大学王晓敏讲师, 访问学者薛世义以及研究生孙尔江, 顾国华帮助挑选了部分习题和完成了部分习题答案. 在此, 谨致衷心的感谢. 最后, 我还要对王荫清和郑权教授对本书的支持和建议, 以及胡乃冏同志的认真编辑和帮助表示诚挚的谢意!

限于作者水平, 书中不妥和错误之处在所难免, 切望读者批评指正。

胡毓达

1989年9月于上海交通大学

目　录

第 1 章　非线性规划模型和求解概述

这一章，先通过例子归纳出非线性规划数学模型的一般形式，阐明非线性规划的研究对象. 然后，着重介绍有关非线性规划的一些基本概念，以及对求解非线性规划模型的方法作一般性的描述. 最后，介绍在非线性规划研究中常用的多变量函数可微性的某些基本知识和记号.

§1.1 非线性规划问题

本节先举例介绍非线性规划要研究的问题. 同时，指出把实际问题归结成数学形式的非线性规划问题的要点.

1. 非线性规划问题举例

我们来看几个例子.

例 1-1　构件表面积问题

设要设计一个如图 1-1 所示的半球形和圆柱形相连接的构件. 要求在构件体积为一定的条件下，确定构件的尺寸，使其表面积最小.

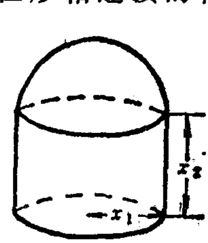

图 1-1

构件的大小取决于其中圆柱体的底半径和高. 今设该圆柱体的底半径为 x_1，高为 x_2，由于构件的表面由半球顶面，侧面和底面组成，因此其表面积为

$$S = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 + \pi x_1^2.$$

构件的体积为半球体和圆柱体之和，所以若要使构件的体积为定值 V，应该满足条件

$$\frac{2}{3}\pi x_1^3+\pi x_1^2 x_2=V.$$

又构件的底半径和圆柱体之高显然非负，故还要求

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$$

综合以上分析，该构件表面积最小问题，可归为在受限制于(subject to，简记为 s.t.)所给条件下的如下极小化(minimize，简记为 min)问题：

$$\begin{cases} \min & S=3\pi x_1^2+2\pi x_1 x_2 \\ \text{s.t.} & \dfrac{2}{3}\pi x_1^3+\pi x_1^2 x_2=V \\ & x_1\geqslant 0 \\ & x_2\geqslant 0. \end{cases} \tag{1-1}$$

例 1-2　投资决策问题

某公司有 $n(\geqslant 2)$ 个项目可供选择投资，并且至少要对其中一个项目投资．已知该公司拥有总资金 A 元，投资于第 $i(i=1,\cdots,n)$ 个项目需花资金 a_i 元，并预计可收益 b_i 元．试选择最佳投资方案．

设投资决策变量为

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{决定投资第 } i \text{ 个项目},\\ 0, & \text{决定不投资第 } i \text{ 个项目},\end{cases}\quad i=1,\cdots,n,$$

则投资总金额为 $\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i$，投资总收益为 $\sum\limits_{i=1}^n b_i x_i$．因为该公司至少要对一个项目投资，并且总的投资金额不能超过总资金 A，故有限制条件

$$0<\sum_{i=1}^n a_i x_i\leqslant A.$$

另外，由于 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 只取值 0 或 1，所以还有

$$x_i(1-x_i)=0,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

最佳投资方案应是投资额最小而总收益最大的方案，所以上述最佳投资决策问题归为在总资金以及决策变量(取 0 或 1)的限制条件下，极大化(maximize，简记为 max)总收益和总投资之比 Q 的问题：

$$\begin{cases} \max \quad Q=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i} \\ \text{s.t.} \quad 0<\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant A \\ \qquad\quad x_i(1-x_i)=0,\quad i=1,\ \cdots,\ n. \end{cases} \tag{1-2}$$

例 1-3　定位问题

某地要选定一个供应某类物品的服务中心，让它向该地的 n 个固定位置的用户提供服务．假设该地的所有道路均是相互平行或垂直的(图 1-2)，试确定这个服务中心的位置，使它到各用户的总距离为最短．

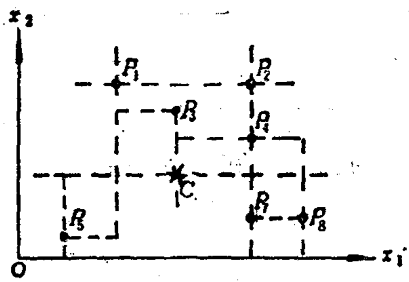

图 1-2

在地面上引进直角坐标系如图 1-2．设服务中心的位置为 $\boldsymbol{C}(x_1,\ x_2)$，$n$ 个用户的坐标为 $\boldsymbol{P}_i(a_i,\ b_i)$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$，则服务中心到第 i 个用户的距离为

$$|x_1-a_i|+|x_2-b_i|,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

显然，所讨论的定位问题可归为求服务中心到各用户的总距离 D 极小的问题：

$$\min \quad D=\sum_{i=1}^{n}[\,|x_1-a_i|+|x_2-b_i|\,]. \tag{1-3}$$

如果还要求服务中心 $\boldsymbol{C}$ 到第 $i(i=1,\ \cdots,\ n)$ 个用户 $\boldsymbol{P}_i$ 的距

离必须介于 c_i 和 d_i 之间，那末问题归为

$$\begin{cases} \min \quad D=\sum_{i=1}^{n}[|x_1-a_i|+|x_2-b_i|] \\ \text{s.t.} \quad c_i \leqslant |x_1-a_i|+|x_2-b_i| \leqslant d_i, \quad i=1, \cdots, n. \end{cases} \tag{1-4}$$

例 1-4　曲线拟合问题

已知某物体的温度 φ 随时间 t 依如下关系变化：

$$\varphi(t)=x_1+x_2t+e^{x_3t},$$

其中 x_1, x_2, x_3 为未知参数．今通过测试得到一组 φ 和 t 之间的实验数据如表 1-1．试确定温度 φ 和时间 t 的关系曲线，使它尽可能好地和 l 个测试点 $(t_1, \varphi_1), \cdots, (t_l, \varphi_l)$ 拟合(图 1-3)．

表 1-1

温　度　φ	φ_1	φ_2	……	φ_l
时　间　t	t_1	t_2	……	t_l

我们考虑在最小二乘方的意义下来确定最优参数 $x_i(i=1, 2, 3)$．为此，应该考虑实验曲线与理论曲线的偏差平方和为最小，即

$$\min \quad \delta=\sum_{i=1}^{l}[\varphi_i-(x_1+x_2t_i+e^{x_3t_i})]^2. \tag{1-5}$$

例 1-5　最大输出功率问题

设有一接有负载的交流供电电路，电源部分由电动势 $\bar{E}_0$ 和阻

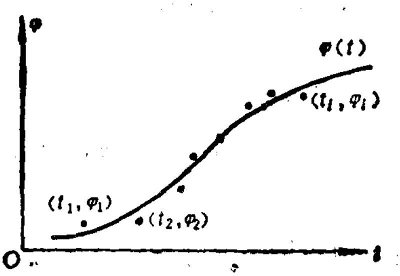

图 1-3

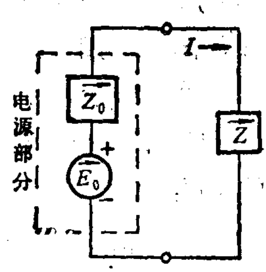

图 1-4

抗 $\dot{Z}_0$ 相串联组成，负载为一阻抗 $\dot{Z}$ (如图 1-4). 假定电源的电动势 $\dot{E}_0$ 和阻抗 $\dot{Z}_0$ 是给定的，而负载的阻抗 $\dot{Z}$ 是可以调整的. 试确定负载阻抗，使电源输出最大功率.

设负载中的电阻变量为 x_1，电抗变量为 x_2，电源中已知的内电阻为 R_0，内电抗为 x_0. 根据电学中的复矢量表示法，我们有

$$\dot{Z}=x_1+j\,x_2,$$

$$\dot{Z}_0=R_0+j\,x_0,$$

其中 $j=\sqrt{-1}$. 那末，电流 $\dot{I}$ 的大小为

$$I=\frac{E_0}{\sqrt{(R_0+x_1)^2+(x_0+x_2)^2}},$$

输入给负载的功率为

$$P=I^2x_1=\frac{E_0^2x_1}{(R_0+x_1)^2+(x_0+x_2)^2}.$$

当然，负载中的电阻变量为正值，即

$$x_1>0.$$

由此，为使该电源的输出功率最大，可归结为如下的极大化问题：

$$\begin{cases}\max\quad P=\dfrac{E_0^2x_1}{(R_0+x_1)^2+(x_0+x_2)^2}\\ \text{s.t.}\quad x_1>0.\end{cases}\tag{1-6}$$

例 1-6　生产成本问题

在数量经济学中，常常用生产函数来描述经济行为的规律性. 设 x_1 为作为资本的货物，x_2 为劳动力，则有著名的 Cobb-Douglas 生产函数

$$Q(x_1,\ x_2)=A\,x_1^{\alpha}x_2^{\beta},$$

其中 Q 为产出产量，A 为生产技术水平，α 和 β 为参数. 今设已知工资率为 ω，资本报酬率为 γ，则由经济学可知生产成本为

$$C=\gamma x_1+\omega x_2.$$

生产成本问题是在产量不低于某水平 Q_0 的条件下，极小化生

产成本的问题．它的数学形式为

$$\begin{cases} \min & C=\gamma x_1+\omega x_2 \\ \text{s.t.} & A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \geqslant Q_0 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{1-7}$$

以上例 1-1 到例 1-6 中的(1-1)到(1-7)，就是非线性规划要研究的问题．

2．建立非线性规划问题的要点

从上面所举的例子我们看到，许多实际的极小化或极大化问题，都可以通过事物的各种量之间的规律(物理规律或经济规律等)关系，描写为多个变量的函数在一定条件下的极值问题．由于这些问题的共同特点是，它们之中要追求极小化或极大化的函数都是变量的非线性函数，因而通常称它们为非线性规划问题．

对于一个实际问题，在把它归结成一个非线性规划问题时，一般要注意以下几要点：

(1) **确定供选方案**．首先要收集同问题有关的资料和数据．在全面熟悉问题的基础上，确认什么是问题的可供选择的方案，并用一组变量来表示它们．例如，例 1-1 中构件的尺寸，例 1-2 中的投资决策变量，例 1-3 中服务中心的可能位置，以及例 1-5 中的可选择的负载阻抗等．

(2) **提出追求目标**．经过资料分析，根据实际需要和可能，提出要追求极小化或极大化的目标．并且，运用各种科学和技术原理，把它表示成数学关系式．例如，例 1-1 中的表面积，例 1-3 中的总距离，例 1-5 中的输出功率和例 1-6 中的生产成本等．

(3) **给出价值标准**．在提出要追求的目标之后，要确立所考虑目标的“好”或“坏”的价值标准，并用某种数量形式来描述它．一

般地说，价值标准包括有学术价值(如性能指标)，经济价值(如成本或效益)；以及社会价值(如环境，道德，社会影响)等．例如，例1-3中距离的长短尺度，例1-5中功率的物理量纲和例1-6中成本的衡量标准等.

(4) 寻找限制条件．由于所追求的目标一般都要在一定的资源、时间或某些适用范围等条件下取得其极小化或极大化效果，因此，为了建立一个完整的非线性规划问题，还需要寻找出问题的所有限制条件．这些条件通常用变量之间的一些不等式或等式来表示．例如，例1-1中构件的体积一定和尺寸为非负，例1-2中总资金的限制和投资决策变量只取0或1，以及例1-6中产量不低于给定水平和资本货物及劳动力为非负等.

在建立非线性规划问题的过程中，要注意抓住问题的主要特性予以刻划，使描述它的数学形式能真实地反映问题的本质．此外，还要检查所给出的数学模式是否是有意义的．例如，其中是否有多余的“虚”变量？是否有相互矛盾的式子？若出现有分式，其分母是否可能为零？等等．一般地说，在初步归结出一个非线性规划问题之后，通常要按问题的实际情况和测试数据对其中的各个式子和参数进行校正检验，并尽可能地进行简化，使最后建立起有效而简洁的非线性规划问题的数学模式.

§1.2 非线性规划模型和最优解

现在，对上一节所举的非线性规划问题的例子进行归纳抽象，给出一般形式的非线性规划数学模型．然后，介绍非线性规划模型的最优解及有关概念.

1．非线性规划模型

对于上一节所举的各非线性规划问题，今一般地记问题中的