数理化竞赛丛书

美国及国际数学竞赛题解

1976—1978

〔美〕S.L. 格雷特 编

科 学 普 及 出 版 社

数 理 化 竞 赛 丛 书

美国及国际数学竞赛题解

(1976—1978)

[美] S. L. 格雷特 编

中国科学院应用数学研究推广办公室 译

科 学 普 及 出 版 社

内 容 提 要

本书系近三年美国及国际数学竞赛的题解汇集，是根据美国数学竞赛委员会主席 S. L. 格雷特寄给华罗庚同志的三本有关资料翻译的。对其中的某些试题，华罗庚同志在本书的“译后记”中还给出了新的解法。

本书可供中学师生及广大知识青年参考。

OLYMPIADS

for

1976—1978

Compiled by

Samuel L. Greitzer

数理化竞赛丛书

美国及国际数学竞赛题解

（1976—1978）

中国科学院应用数学研究推广办公室　译

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
朝阳六六七厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：2 1/8　字数：46千字
1979年8月第一版　1980年8月第二次印刷
印数：250,001—400,000 册　定价：0.20 元
统一书号：13051·1012　本社书号：0012

目　　录

一、美国数学竞赛试题

1.1. 第五届美国数学竞赛试题

（1976年5月4日）

1.

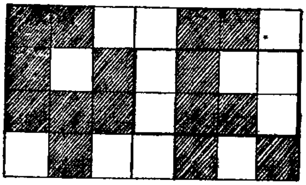


图 1

(a) 上图是一个 4×7 的棋盘，今要给它的每一个小方格染上一种颜色，限于是黑色和白色．试证，对于任一种涂染方式，棋盘必定含有一个矩形，其四个角上的不同方格有相同颜色．图中用粗线框出者即为一例．

(b) 试给出 4×6 棋盘的一种黑白涂染法，使其含有的每一个矩形有如下性质：位于四个角上的方格都不能有同一种颜色．

2. 设 A 和 B 是已知圆上的二个固定点，XY 是该圆的动直径．试确定（并证明）直线 AX 和 BY 的交点的轨迹．可以假定 AB 不是直径．

3. 试定出（并证明）方程

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$$

的所有整数解．

4. 设三直角四面体 $PABC$（即 $\angle APB=\angle BPC=$

$\angle CPA=90^{\circ}$)的六条棱长之和为 s，试求(并证明)其最大体积。

5．设 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 及 $S(x)$ 皆为多项式，且满足

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x),$$

求证：$x-1$ 是 $P(x)$ 的因子．

1.2．第六届美国数学竞赛试题 (1977 年 5 月 3 日)

1．试确定所有的正整数对 (m, n)，使

$$1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$$

能被 $(1+x+x^2+\cdots+x^n)$ 整除．

2．ABC 和 $A'B'C'$ 是同一平面上的两个三角形，直线 AA', BB', CC' 互相平行．如果用 $\triangle ABC$ 表示三角形 ABC 的带有适当正负号的面积，其他这类符号意义类似，求证

$$3(\triangle ABC+\triangle A'B'C')=\triangle AB'C'+\triangle BC'A'+$$
$$+\triangle CA'B'+\triangle A'BC+\triangle B'CA+\triangle C'AB.$$

3．如果 a 和 b 是

$$x^4+x^3-1=0$$

的两个根，求证 ab 是

$$x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$$

的一个根。

4．求证：如果扭(非平面)四边形的两组对边分别相等，则两条对角线的中点连线垂直于两对角线．反之，如果扭四边形的两条对角线的中点连线垂直于两对角线，则四边形两组对边分别相等。

5．如果 a, b, c, d, e 是以 p, q 为界的正数，亦即

$$0<p\leqslant a, b, c, d, e\leqslant q,$$

求证：

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$$
$$\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

且确定何时等号成立．

1.3．第七届美国数学竞赛试题
（1978 年 5 月 2 日）

1．已知 a, b, c, d, e 是实数，满足

$$a+b+c+d+e=8,$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16.$$

试确定 e 的最大值．

2．$ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 是某国家同一地区的正方形地图，但用不同的比例尺绘制．将它们如图所示重叠起来．试证明，在小地图上只有这样的一个点 O，它和下面大地图与之正对着的点 O' 都代表这国家的同一地点，并请用欧几里德作图法（只用圆规直尺）定出O点来．

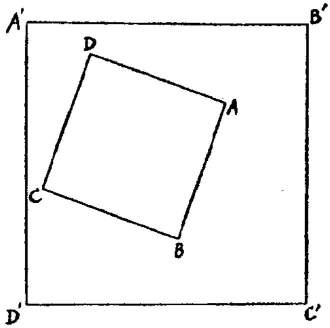


图 2

3．若一整数 n 能写成

$n=a_1+a_2+\cdots+a_k,$

此处 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 都是正整数(但不必互异)，适合

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=1,$$

这时 n 称为"好数"．如果已经知道从 33 到 73 的所有整数都是好数，试证明每一个 $\geqslant 33$ 的整数都是好数．

4．(a) 如果四面体的六个二面角（即每对面之间的夹角）相等，这四面体必是正四面体．

(b) 如果五个二面角相等，这四面体必是正四面体吗？

5．九位数学家在一次国际会议上相遇，他们之中的任意三个人中，至少有二人会说同一种语言．如果每一位数学家最多只能说三种语言，试证明至少有三位数学家能用同一种语言交谈．

二、国际数学竞赛试题

2.1. 第十八届国际数学竞赛试题
（奥地利，1976 年）

第　一　天（4 小时）

1．平面上，一凸四边形的面积为 32 cm^2，两条对边和一条对角线长度之和为 16 cm，试确定另一条对角线所有可能的长。（捷克提出）

2．已知 $P_1(x)=x^2-2$ 及 $P_j(x)=P_1(P_{j-1}(x))$，$j=2,3,\cdots$，求证：对任何正整数 n，方程

$$P_n(x)=x$$

所有的根都是实的且各不相同。（芬兰提出）

3．一个长方体的箱子能够被单位立方块完全充满．如果在箱中尽可能多地放入体积为 2 的立方块，使它们的边与箱子的边平行，则恰好充满箱子容积的 40%．试确定所有这种箱子的内尺寸大小（$\sqrt[3]{2}=1.2599\cdots$）．（荷兰提出）

第　二　天（4 小时）

4．将 1976 分拆成正整数之和，再将其相乘，试求（并证明）所有这种乘积中之最大者．（美国提出）

5．考虑 p 个方程 q 个未知数的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1q}x_q=0, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2q}x_q=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1+\cdots+a_{pq}x_q=0, \end{cases}$$

这里 $q=2p$，系数 a_{ij} 取值于集合 $\{-1,0,+1\}$. 求证，必定存在方程组的一组解 $(x_1,\cdots,x_q)$ 满足以下条件：

(a) 所有 $x_j(j=1,\cdots,q)$ 皆为整数，

(b) 至少有一个 x_j 不为零，

(c) $|x_j|\leqslant q\ (j=1,\cdots,q)$. （荷兰提出）

6。数列 $\{u_n\}$ 定义如下：

$$u_0=2,\ u_1=\frac{5}{2},\ u_{n+1}=u_n\,(u_{n+1}^2-2)-u_1,$$

$(n=1,2,\cdots)$，求证，对于正整数 n 有

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}},$$

此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. （英国提出）

2.2. 第十九届国际数学竞赛试题
（贝尔格莱德，1977 年）

第 一 天（4 小时）

1. 在正方形 $ABCD$ 的内部作等边三角形 ABK, BCL, CDM, DAN. 求证：四条线段 KL, LM, MN, NK 的中点及八条线段 AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN 的中点一起组成一个正十二边形的十二个顶点. （荷兰提出）

2. 在有限的实数列中，若任何连续 7 项之和是负数，任何连续 11 项之和是正数，试决定这种数列的项数的最大值.

（越南提出）

3. 设 n 是给定的大于 2 的整数，用 V_n 表示所有形如 $1+kn$ 的整数的集（这里 $k=1,2,\cdots$）. 一个数 $m\in V_n$，如果不存在数 $p,q\in V_n$ 使 $pq=m$，则称 m 为 V_n 中的不可约数. 试

证明，存在一个数 $r\in V_n$，它可以用不只一种方法表示成 V_n 中的不可约数之积（但规定，只是 V_n 中的数的顺序不同的表示法当作是一种表示法）.（荷兰提出）

第 二 天（4 小时）

4. 设 a, b, A, B 是给定的实常数，又设

$$f(\theta)=1-a\cos\theta-b\sin\theta-A\cos 2\theta-B\sin 2\theta,$$

试证明：如果对所有的实数 θ 有 $f(\theta)\geqslant 0$，那么

$$a^2+b^2\leqslant 2 \text{ 且 } A^2+B^2\leqslant 1.$$

（英国提出）

5. 设 a 和 b 是正整数，如果 a^2+b^2 被 $a+b$ 除所得的商是 q，余数是 r，试求所有的数对 (a, b)，使

$$q^2+r=1977.$$

（西德提出）

6. 设 $f(n)$ 是定义在所有正整数的集上的、并且也在这个集中取值的函数. 试证明：如果对每个正整数 n 有

$$f(n+1)>f(f(n)),$$

则

$$f(n)=n \text{（对每个 } n\text{）}.$$

（保加利亚提出）

2.3. 第二十届国际数学竞赛试题（布加勒斯特，1978 年）

第 一 天（4 小时）

1. m 和 n 为自然数，$n>m\geqslant 1$. 在十进制表示中，1978^m 与 1978^n 的最后三位数相等. 求出 m 和 n，使 $m+n$ 达到最小值.（古巴提出）

2. P 是在已知球面内的定点，A, B, C 是球面上的三个动点，使得 PA, PB, PC 相互垂直. 在由 PA, PB 和 PC 所

确定的平行六面体中，设 Q 是与 P 斜对之顶点。试求出 Q 点的轨迹。（美国提出）

3．设一切正整数集合是两个不相交集合 $\{f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots\}$ 与 $\{g(1), g(2), \cdots, g(n), \cdots\}$ 之併集，这里

$$f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots,$$
$$g(1)<g(2)<\cdots<g(n)<\cdots,$$

且 $g(n)=f(f(n))+1$，对一切 $n\geqslant 1$ 成立．试确定 $f(240)$．

（英国提出）

第　二　天（4 小时）

4．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．一圆内切于 $\triangle ABC$ 的外接圆，且与边 AB，AC 分别相切于 P，Q．试证明，线段 PQ 的中点是 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心．（美国提出）

5．设 $\{a_k\}(k=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$ 是一串互不相同的正整数．证明对一切自然数 n，都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$（法国提出）

6．一个国际社团的成员来自六个不同的国度．成员名单上有 1978 个名字，编号为 1，2，…，1978．证明至少有一个成员，他的编号是两个与他同国籍的成员编号之和，或是一个与他同国籍的成员编号的二倍。（荷兰提出）

三、美国数学竞赛题解

3.1. 第五届美国数学竞赛题解

1.

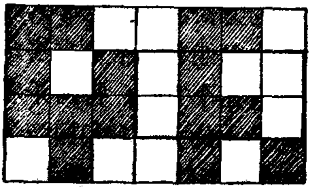


图 1

(a) 上图是一个 4×7 的棋盘，今要给它的每一个小方格染上一种颜色，限于是黑色和白色. 试证，对于任一种涂染方式，棋盘必定含有一个矩形，其四个角上的不同方格有相同颜色. 图中用粗线框出者即为一例.

【证】 因为总共有七列，两种颜色，所以最上面一行至少有四个方格有同一种颜色，例如说是黑色. 交换列使得最顶上一个方格是黑色的四列在一起如右图所示，并限于考虑这些列.

黑	黑	黑	黑
黑			白
	黑		白
		黑	白

首先，如果其余任一行中有两个黑方格的话，这两个方格和顶上一行的方格便可作成一矩形，其四个角上的不

同的方格都是黑色，问题即得证，因而可认为出现的不是这种情形，即在下面三行中至多有三个黑方格，也就是有一列中会有三个白方格，不妨认为就是最右边的一列，如图所示．这样我们就得到由1,2,3列和2,3,4行所组成的一个正方形．

今考虑1,2,3列，每一列所含有的白方格不能多于一个，因为若有两个的话，那么它们便和最右边的一列组成一个矩形，其四个角上不同的方格都是白色了．这样，3×3正方形只能有三个黑方格，也只能有三个白方格，总共只六个方格，但需要染色的却有九个方格！得出矛盾．故至少得有一个矩形，其四个不同角上的方格有相同颜色．

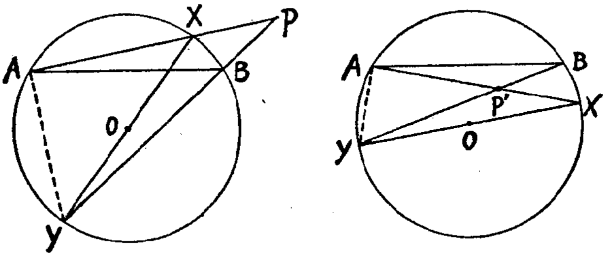
(b) 试给出4×6棋盘的一种黑白涂染法，使其含有的每一个矩形有如下性质：位于四个角上的方格都不能有同一种颜色．

【解】 因为对4×6棋盘来说，取二黑二白作成的不同排列恰好有$C_4^2=6$种，故我们可以在每一列放入这样的一个排列，即为所求．如下图所示．

黑	黑	黑	白	白	白
黑	白	白	白	黑	黑
白	黑	白	黑	白	黑
白	白	黑	黑	黑	白

2．设A和B是已知圆上的二个固定点，XY是该圆的动直径．试确定（并证明）直线AX和BY的交点的轨迹．可以假定AB不是直径．

【解】 图 3 中的 (a) 及 (b) 给出动直径 XY 的两个不同位置，显然 $\angle AYB$ 是常数（定角）。图 3 (a) 中 $\angle P$ 是 $\angle AYB$ 的余角，故亦为常数；图 3 (b) 中 $\angle AP'Y$ 是 $\angle AYB$ 的余角，也是常数，$\angle AP'B$ 也是常数（是 $\angle AP'Y$ 的补角）。



(a)　　　　　(b)

图 3

故由习知的定理知，图 3 (a) 中 P 点的轨迹是一个圆。即是对 $\triangle ABP$ 的固定底边 AB 张成定角的点的轨迹。

在图 3 (b) 中，$\triangle ABP'$ 的 $\angle AP'B$ 和边 AB 都是常数。而 $\angle P$ 和 $\angle AP'B$ 互为补角，故 P 和 P' 应在同一个圆上。圆的半径可以由正弦定律求得

$$R=\frac{AB}{2\sin P}.$$

3. 试定出（并证明）方程

$$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=a^2b^2}$$

的所有整数解答。

【解】 先证明 a, b, c 必须是偶数。因为任一偶数的平方可以被 4 整除；而任一奇数的平方用 4 除余 1：$(2n+1)^2=4n^2+4n+1$。即 a 为奇　$a^2\equiv1 \pmod 4$❶；a 为偶　$a^2\equiv0$

❶ 如果两个整数 x, y 之差能被整数 n 除尽，则记作 $x\equiv y \pmod n$。这式子称“同余式”。请参考华罗庚《数论导引》第二章 § 1.

(mod 4)。

若 a, b, c 皆为奇数，则有

$$a^2+b^2+c^2\equiv 3 \pmod 4$$

而

$$a^2b^2\equiv 1 \pmod 4.$$

这是不可能的，故 a, b, c 不能都是奇数。

其次，假定 a, b 为奇，c 为偶，则

$$a^2+b^2+c^2\equiv 2 \pmod 4$$

而

$$a^2b^2\equiv 1 \pmod 4.$$

也不可能．若 a, c 为奇，b 为偶，则

$$a^2+b^2+c^2\equiv 2 \pmod 4$$

而

$$a^2b^2\equiv 0 \pmod 4$$

又不可能．同样 b, c 为奇，a 为偶也不可能．

若 a, b 为偶，c 为奇，则

$$a^2+b^2+c^2\equiv 1 \pmod 4$$

而

$$a^2b^2\equiv 0 \pmod 4,$$

此为不可能．若 a, c 为偶，b 为奇，则

$$a^2+b^2+c^2\equiv 1 \pmod 4$$

而

$$a^2b^2\equiv 0 \pmod 4,$$

不可能．同样 b, c 为偶，a 为奇也不可能．

余下来，唯一可能的就是 a, b, c 皆为偶数．令 $a=2r$, $b=2s, c=2t$, 经此替换后得到

$$r^2+s^2+t^2=4r^2s^2.$$

注意，现在 $r<a, s<b, t<c$. 同样的讨论可以应用到新的等式上，又可以得到一组更小的数，且皆为偶数. 理论上，这个过程可以一直进行下去，但我们处理的都是整数，因而必定到某一步就得停止了。此即为“无穷递降法”应用之一例❶. 故仅仅当 $a=b=c=0$ 时方为可能，此为唯一解.

4. 设三直角四面体 $PABC$（即 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$）的六条边长之和为 s，试求（并证明）其最大体积.

【解】 设 $AP=a, BP=b, CP=c$，则

$$s=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2},$$

及

$$V=\frac{abc}{6}.$$

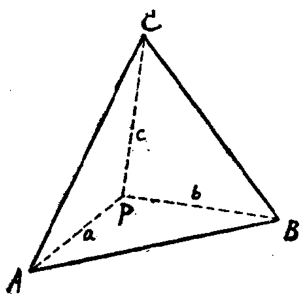


图 4

利用不等式

$$x^2+y^2\geqslant 2xy$$

与算术-几何中项不等式❷可得

$$a+b+c\geqslant 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

及

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant 3\sqrt{2}(abc)^{\frac{1}{3}}.$$

等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立. 故得

$$s\geqslant 3(1+\sqrt{2})(abc)^{\frac{1}{3}}$$

或

$$s\geqslant 3(1+\sqrt{2})(6V)^{\frac{1}{3}}.$$

❶ 关于“无穷递降法”，请参考华罗庚《数论导引》，第十一章 § 7.

❷ 关于这个不等式，请参考哈代，李特伍德，波利亚著《不等式》§ 2.5.