高等数学解题方法与技巧

王景克　编

中　国　林　业　出　版　社

(京)新登字 033 号

高等数学解题方法与技巧
王景克　编

中国林业出版社出版(北京西城区刘海胡同 7 号)
新华书店北京发行所发行　　河北昌黎县印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　14.375印张　300千字
1992年 5 月第一版　1992年 5 月第一次印刷
印数 1—3,000册　　定价：9.50元
ISBN 7-5038-0866-7/O·0022

序　　言

本书共十四章，每章分为内容提要和例题两部分．内容提要部分比较详细地总结了本章的定义、重要定理和公式．例如，对于定义或某个定理怎样理解才是正确的，一些错误或片面的理解又是什么，从几个不同的角度加以剖析，指出了应注意的地方，特别是对于一些基本而重要的概念之间有何区别与联系作了较详细的总结．

例题部分精选了各类典型例题，有些例题综合性较强而难度又适宜，有利于提高分析综合的能力．总的说来，例题部分有以下几个特点：

（1）例题的解答比较详细，不少例题还作了比较详细的分析，指出了解题思路和技巧；

（2）不少例题采取了多种解法，以便开扩思路；

（3）突出了正、误两种解法，不少例题不仅有正确解法，而且还有错误解法或指出了容易出错的地方，并指出了错误的原因，通过正、误对照，帮助初学者澄清有关基本概念；

（4）在几个例题解答完后有小结，总结了解题的一般方法或思路，指出了应注意的地方，总结了有关基本概念．

本书是工科全日制大学、电视大学、职工大学、业余大学的学生和自学者学习高等数学的辅导材料．此外，也可供讲授高等数学课程的教师和有关工程技术人员参考．

限于编者水平，本书一定会有不少缺点和错误，请读者批评指正．

编者

1991年3月

目　录

第一章 函 数

一、内容提要

(一) 函数的概念

定义：如果当变量 x 在其变化范围内任取一个数值时，量 y 按一定的法则总有确定的数值和它对应，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x) \text{或} y=\varphi(x)、y=F(x) \text{等}.$$

变量 x 的变化范围称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 的取值范围称为函数的值域，y 称为函数或因变量.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，那末称这种函数为单值函数，否则称为多值函数. 以后凡是不特别说明时，函数都是指单值函数.

对于函数概念要注意以下几点：

1. 抓住概念的本质特征——确定函数的两个要素：定义域和对应法则.

(1) 定义域是自变量和因变量能互相联系构成函数关系的条件，无此条件，函数就没意义了。例如，$f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$就没意义，因为定义域是空集，$x$ 无论取何值也不会使 $f(x)$ 有意义；

(2) 对应法则是正确理解函数概念的关键. 函数关系不同于一般的依赖关系，"y 是 x 的函数"这句话，并不一定意味着 y 随 x 的变化而变化. 例如，函数 $y=x^2$，自变量 x 取 -2 时，因变量 y 有确定的值 4 和它对应；当 x 取 2 时，y 的确定值仍是 4 和它对应. 显然，自变量变化时，因变量并没有变化. 在函数的定义中重要的是，存在某种对应法则，按这个法则，当自变量在定

义域内任取一个数值时，因变量都有确定的数值与之对应．因此，若变量 x 和 y 满足 $y=c$（c 为常数），则 y 是 x 的函数，这是因为自变量 x 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内不论取何值时，量 y 总等于 c 和它对应（$y=c$ 称为常函数）．值得注意的是，若 $x=c$，y 就不是 x 的函数，这是因为，$x=c$ 时，y 可任取无穷多个值，不存在某种对应法则，使 y 有确定的值与之对应；

函数关系不同于因果关系。例如，一昼夜气温变化与时间变化是函数关系，但时间变化不是气温变化的实际原因；

$y=f(x)$ 中的"f"是表示从 x 到 y 的对应法则，"f"是一个记号，不是一个数，不能把 $f(x)$ 看作 f 乘以 x．

如果函数是用公式给出的，则"f"表示公式里的全部运算．例如，$f(x)=3x^2+4$，"f"表示：与 x 对应的函数值是由括号里的 x 平方后乘以 3 再加上 4 得到的．应注意，不同的运算法则可能表示同一个函数关系．例如，$y=(x+1)^2$ 与 $y=x^2+2x+1$ 的运算法则不同，但经恒等变形，$y=x^2+2x+1$ 就是 $y=(x+1)^2$．因此，作为函数，它们的对应法则相同，二者表示的是相同的函数；

2．函数与函数表达式不同．函数表达式是表示函数的主要形式，表示函数还可以用表格、图形等形式，不要认为函数就是式子；

3．$f(x)$ 与 $f(a)$ 的区别与联系：$f(x)$ 是函数记号；$f(a)$ 是函数值记号，是函数 $f(x)$ 当 $x=a$ 时的函数值；

4．两个函数相同的条件：

（1）定义域相同；

（2）对应法则相同．

（二）函数的特性

1．有界性：设函数 $f(x)$ 在 X 内有定义（X 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在正数 M，使得当 x 取 X 内的任何一个值时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

就称函数 $f(x)$ 在 X 内有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 内无界。

注意：

(1) 正数 M 不是唯一的，但也不是任意的．例如，$f(x)=\sin x$，对于 $(-\infty,\ +\infty)$ 内任何 x 值都有 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $\sin x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内有界．这里的 $M=1$，也可取 $M=2$，这时 $|\sin x|<2$ 也满足函数有界的定义，还可以取 $M=\frac{7}{2},\cdots\cdots$，但取 $M=\frac{1}{2}$ 就不行了；

(2) 由于正数 M 不是唯一的，所以定义中的 $|f(x)|\leqslant M$ 也可以换成 $|f(x)|<M$；

(3) 函数 $f(x)$ 是否有界与所论区间有关．例如，$f(x)=\frac{1}{x}$，对于 $[1,\ +\infty)$ 上的任何 x 值都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上有界，但在 $(0,\ +\infty)$ 内无界，这是因为不存在正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,\ +\infty)$ 内的任何 x 值都成立．

2．单调性：如果函数 $f(x)$ 对于区间 $(a,\ b)$ 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是单调增加(减少)的①．

同样可定义在无限区间上单调增加（减少）函数．

在整个区间上单调增加（减少）函数称为单调函数，这个区间称为单调区间．

---

① 这是严格单调增加(减少)．若函数 $f(x)$ 对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内是广义单调增加(减少)的．

注意：

(1) 若 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是单调的，则由定义可知，当 x 在 (a, b) 内变化时，任意一个函数增量 Δy 都不等于零；

(2) 单调性与区间有关．例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，因而在 $(-\infty, 0]$ 上或在 $[0, +\infty)$ 上是单调的，但在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的．

3．奇偶性：如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意 x 都有

$$f(-x)=f(x)\,(f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶(奇)函数．

注意：

(1) 由定义知，具有奇偶性的函数的定义域关于原点对称；反之，定义域关于原点对称的函数不一定具有奇偶性．例如，$f(x)=2^x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，关于原点对称，但该函数不是偶函数，也不是奇函数．若函数的定义域不关于原点对称，则可肯定此函数不具有奇偶性；

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$．这是因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，当 $x=0$ 时，则有 $f(-0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$；

(3) 存在既是奇函数又是偶函数的函数，$f(x)=0$ 就是，而且是唯一的．这是因为，若 $f(x)$ 是奇函数又是偶函数，必有 $f(-x)=-f(x)$ 及 $f(-x)=f(x)$ 同时成立，所以 $f(x)=0$．

4．周期性：对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任何 x 都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期．

注意：

(1) $f(x+l)=f(x)$ 中的非零常数 l 与 x 无关；

(2) 若 l 是 $f(x)$ 的周期，则 $kl\,(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 也是

$f(x)$的周期. 通常说周期函数的周期是指最小正周期;

(3) 不是任何周期函数都有最小正周期. 例如, $f(x)=c$(c为常数), 因为对于任意的实数 l, 都有 $f(x+l)=f(x)=c$, 所以 $f(x)=c$ 是周期函数, 但在实数里没有最小正数, 因此, 周期函数 $f(x)=c$没有最小正周期.

(三) 反函数

定义: 设 y 是 x 的函数 $y=f(x)$, 如果把 y 当作自变量, x 当作函数, 则由关系式 $y=f(x)$所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$的反函数.

注意: 函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数, 它们在同一坐标系中的图形是同一个; 习惯上用 x 表示自变量, y 表示函数, 因此, 把 $y=f(x)$的反函数改记为 $y=f^{-1}(x)$, 这时$f(x)$与$f^{-1}(x)$互为反函数, $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 对称; 由反函数的定义知, $f^{-1}[f(x)]=x$.

(四) 复合函数

定义: 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$的函数值的全部或部分在 $f(u)$的定义域内, 那末, y 成为 x 的函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$, 这个函数称为由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.

注意:

(1) 函数的复合是有条件的, 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如, $y=\ln u$, $u=-x^2$, 因为对于 $u=-x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何 x, 所对应的函数值均有 $u=-x^2\leqslant 0$, 从而 $y=\ln u$ 没有意义, 所以, $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 不能复合成一个复合函数。可见, $u=\varphi(x)$的值域不能完全落在$f(u)$的定义域之外;

(2) 一个函数是否是复合函数与该函数的对应法则的表示方法有关. 例如, $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$, $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$, 对应法则相同, 但对应法则的表示方法不同, 前者不是复合

函数，后者则是以复合函数形式出现的（由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-v^2$，$v=\cos x$ 复合而成）.

（五）初等函数

基本初等函数（常量、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的并可用一个式子表示的函数.

$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 是一个分段函数，不是初等函数. 应注意的是，不能说“凡分段函数都不是初等函数”，例如，$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是一个分段函数，但它可用一个式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示. 事实上，$y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成，因此，这个分段函数是初等函数.

二、例　　题

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\ln(1-2\sin x)$；

(3) $f(x)=\operatorname{ctg}\pi x+\arcsin 2^x$.

解：

(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义，应有

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2}\neq 0\\ x-2\neq 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 2.\end{cases}$$

故所给函数的定义域是不等于 1 和 2 的所有实数.

注意：如果把$\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$变形为$\dfrac{x(x-2)}{x-1}$，那末，使这个式子失去意义的只有一个值 $x=1$，由此得出不等于 1 的所有实数为所给函数的定义域的结论，这就错了.

(2) 要使函数 $f(x)$ 有意义，应有

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0 & ①\\ 1-2\sin x>0 & ②\end{cases}$$

由①得 $\qquad -1\leqslant x\leqslant 1 \qquad$ ③

② 的左端 $1-2\sin x$ 是以 2π 为周期的函数。∵ ① 的解落在 $[-\pi,\ \pi]$ 中，∴ 只需在 $[-\pi,\ \pi]$ 这一周期中考虑②的解.

要使 $\qquad 1-2\sin x>0,$

即 $\qquad \sin x<\dfrac{1}{2},$

由图 1.1 知，$\qquad -\pi\leqslant x<\dfrac{\pi}{6}$ 及 $\dfrac{5\pi}{6}<x\leqslant\pi,\qquad$ ④

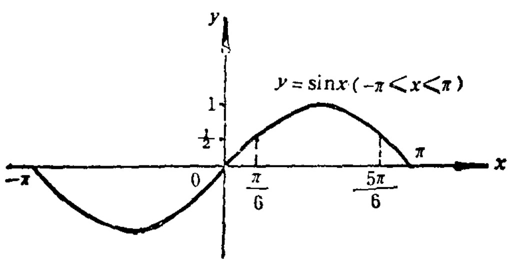

图 1.1

③和④的公共部分为

$$-1\leqslant x<\frac{\pi}{6}\text{(图 1.2)}.$$

即为所求的定义域.

(3) 要使 $\operatorname{ctg}\pi x$ 有意义，必须

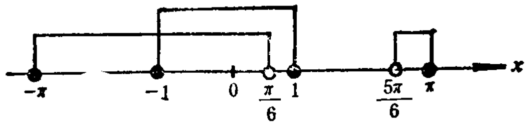

图 1.2

$$\pi x \neq k\pi,$$

即 $$x \neq k$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots),$$

要使 $\arcsin 2^x$ 有意义，须有

$$0 < 2^x \leqslant 1,$$

即 $$-\infty < x \leqslant 0,$$

则它们的公共部分为

$$-\infty < x < 0,\ 且\ x \neq -1,\ -2,\ \cdots,$$

即为所求的定义域.

例 2　求 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & -\infty < x < -1 \\ \sqrt{1+x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 的定义域及 $f(-2)$、$f(1)$.

解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,\ -1)\cup[0,\ +\infty)$,

$\because\ -\infty < -2 < -1$，$\therefore\ f(-2)=\dfrac{1}{1+(-2)}=-1$,

$\because\ 0 < 1 < +\infty$，$\therefore\ f(1)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

例 3　若 $y=f(x)$的定义域为$(0,\ 1)$，求 $y=f(\ln x)$ 的定义域.

解：$y=f(\ln x)$ 是一个复合函数，它是由 $y=f(u)$ 和 $u=\ln x$ 复合而成. 由于 $f(u)$和 $f(x)$的定义域相同，所以由题设得

$$0 < u = \ln x < 1,$$

从而 $$1 < x < e,$$

这就是 $y=f(\ln x)$的定义域.

小结：

(1) 求函数的定义域的方法：若函数是一个抽象的数学式子，则其定义域应是使这式子有意义的一切实数. 要注意到：

① 分式的分母不能为零；

② 偶次根号下应大于或等于零；

③ 对数式的真数应大于零；

④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，其$|x|\leqslant 1$；

⑤ 若函数的表达式由几项组成，则它的定义域是各项定义域的公共部分；

⑥ 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

由以上几例看到，求初等函数的定义域是以基本初等函数的定义域为基础的，所以，基本初等函数的定义域要记熟. 求复合函数的定义域时，一般是从外层向里层逐步求；

(2) 求分段函数的函数值时，应先看自变量的值落在哪一段，因为自变量在不同的段上函数的表达式不同.

例 4 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$，$g(x)=\arcsin x+\arccos x$；

(2) $f(x)=x-1$，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$.

解：

(1) $f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，$g(x)$的定义域为$[-1, 1]$. 由于定义域不同，所以这两个函数不相同.

(2) $f(x)$和 $g(x)$的定义域均为$(-\infty, +\infty)$，定义域相同，但由于 $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geqslant 1 \\ 1-x, & x<1 \end{cases}$，在$(-\infty, 1)$内 $f(x)$和 $g(x)$的对应法则不同，所以这两个函数不相同.

(3) 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $[1, 2)$， 定义域相同，在 $[1, 2)$ 内 $\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ 恒成立，从而对应法则也相同，所以这两个函数相同.

例 5 设 f 在 $[-1, 1]$ 上有定义，$f(0)\neq 0$，$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$，求 $f(1)$.

解：取 $x=1$，$y=0$，则 $xy=0$，

$$f(0)=f(1)\cdot f(0)$$

$\because$ $f(0)\neq 0$

$\therefore$ $f(1)=\frac{f(0)}{f(0)}=1$.

解此题的关键是在 $[-1, 1]$ 上取 x 和 y 为适当的值. 为了求出 $f(1)$，由题设知，取 $x=1$，$y=0$ 即可(取 $x=0$，$y=1$ 也可).

例 6 $f(x)=x^2+1$，求 $f(x^2-1)$.

解：

法一 从对应法则"f"的意义来求

$\because$ $f(x)=x^2+1$,

$\therefore$ $f(x^2-1)=(x^2-1)^2+1=x^4-2x^2+2$.

法二 从复合函数角度来求

$f(x^2-1)$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=x^2-1$ 复合而成的复合函数.

$\because f(x)=x^2+1$，$\therefore f(u)=u^2+1$，将 $u=x^2-1$ 代入上式，得

$$f(x^2-1)=(x^2-1)^2+1=x^4-2x^2+2.$$

例 7 $f(x+2)=x^2-x-2$，求 $f(x)$.

解：

法一 令 $x+2=u$，则 $x=u-2$，代入原式，得

$$\begin{aligned} f(u)&=(u-2)^2-(u-2)-2\\ &=u^2-5u+4 \end{aligned}$$