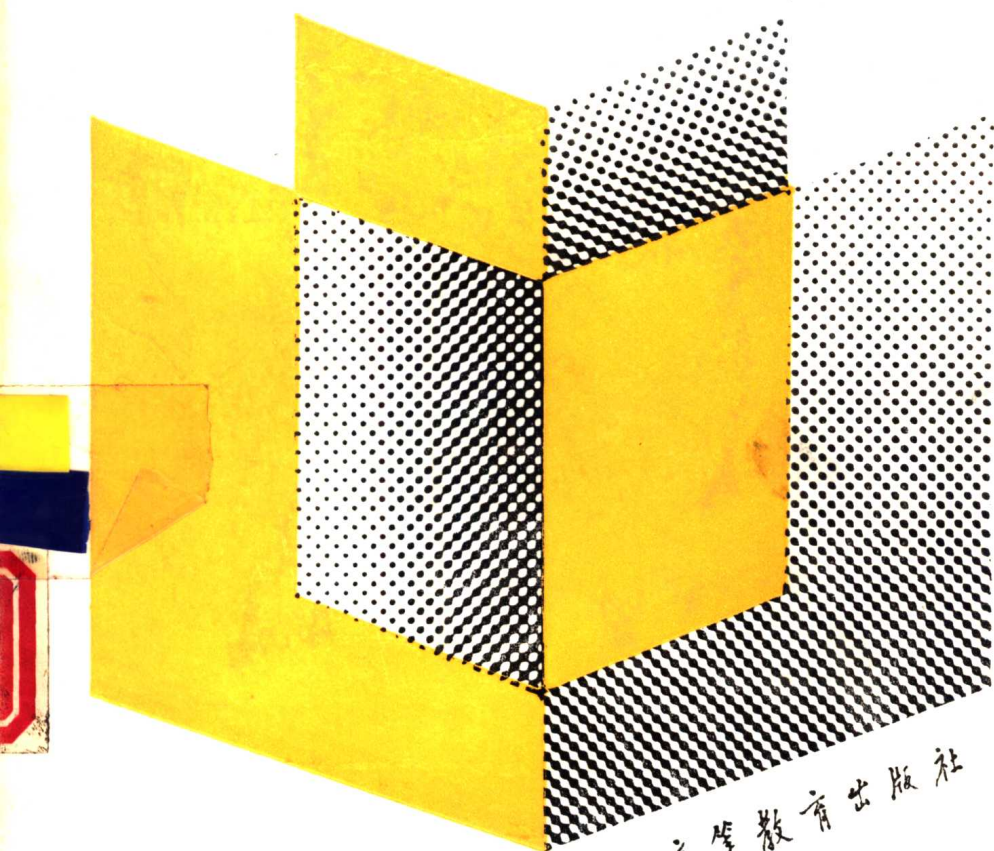


高等代数

习题课参考书

张均本 主编 李师正 邵品琮 审校



高等教育出版社

高等代数习题课参考书

张均本 主编

李师正 审校
邵品琮

高等教育出版社

本书是与我社出版的张禾瑞、郝柄新编《高等代数》(第三版)教材配套的教学用书,本书在该教材习题的基础上,增选了相当数量的旨在巩固基本概念、加强基本方法训练以及与中学数学密切相关的习题,与原教材上的习题一起编辑成册,其章、节次序完全按教材的次序排列。对书中的习题,部分予以提示或略解,较难题目给出详解;其余题目给出答案。难题用“*”号标出,供专科学生选做。本书可作为高等师范院校、教育学院、高师函授生以及电大、职大、夜大、管理干部学院的高等代数或线性代数课程的习题课参考书。

高等代数习题课参考书

张均本 主编 李师正 邵品崇 审校

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.5 字数 180 000

1991 年 4 月第 1 版 1991 年 4 月第 1 次印刷

印数 0001—5 605

ISBN7-04-002988-X/O·934

定价 3.10 元

前 言

高等教育出版社出版的张禾瑞、郝炳新编《高等代数》，曾获1987年国家教委优秀教材一等奖，该书长期以来在全国高等师范院校中被广泛地采用为教科书。

由于该书基本习题偏少，有不少章节的习题偏难，对于广大师范专科学校和教育学院的学生以及一部分青年教师来说，要给出该书习题的准确解答并不容易，甚至对有的题目感到无从下手。我们在教学中，特别是在高师函授教学中，学生常提出要求：希望多做一些有关巩固基本概念、掌握运算的基本技能技巧且与中学教学密切相关的题目。因此，我们在郝炳新教授的热情鼓励下，总结多年的教学实践经验，编写了本书。它可作为与张禾瑞、郝炳新编《高等代数》配套的教学参考书供学生使用。也可作为电大、夜大、函大、职大以及其它院校的高等代数课程的教学参考书。

本书的章、节次序完全按张禾瑞、郝炳新编1983年第三版《高等代数》书中的次序排列。一方面，我们保留了原书中的全部习题，并对其中一些难题，部分予以提示，部分给出详解，其它题目仅给出答案。详细解答的习题所占比例不超过总习题数的30%。另一方面，我们还增添了相当数量的旨在巩固基本概念和加强基本训练并与中学教学密切相关的习题，以提高中学教师的实际应用水平，促进中学数学教学质量的提高。

书中加“*”号的习题，专科院校的学生可以列为选做题。本书中所指“课本”皆指张禾瑞、郝炳新编《高等代数》第三版。

为了教师上好习题课和学生做好习题，我们还分章编写了“学习高等代数应掌握的主要方法”，附在书末。

本书由山东师范大学李师正教授和曲阜师范大学邵品琮教授审稿、校订,有的难题由两位教授直接解答。在此,向他们致以衷心地感谢!

中国石化总公司人事部教育处、中国石化总公司济南石化经济学校、济宁教育学院、济宁师专及山东省中专数学教研会的有关领导同志对编写工作给予了大力支持,我们在此深表感谢和敬意。

本书由张均本主编。参加编写的有:张均本,编写第一、三、四、五章、附录以及学习高等代数应掌握的主要方法;刘汉忠,编写第六、七、八章;许思孝,编写第二章;刘清,编写第九、十章。由于编者的水平有限,缺点和错误在所难免,恳请广大教师和读者批评指正。

编 者

一九八八年十一月

目 录

第一章 基本概念	1
1.1 集合.....	1
1.2 映射.....	2
1.3 数学归纳法.....	4
1.4 整数的一些整除性质.....	5
1.5 数环和数域.....	6
第二章 多项式	8
2.1 一元多项式的定义和运算.....	8
2.2 多项式的整除性.....	9
2.3 多项式的最大公因式.....	10
2.4 多项式的分解.....	13
2.5 重因式.....	14
2.6 多项式函数 多项式的根.....	15
2.7 复数和实数域上多项式.....	16
2.8 有理数域上多项式.....	17
2.9 多元多项式.....	18
2.10 对称多项式.....	20
第三章 行列式	22
3.1 线性方程组和行列式.....	22
3.2 排列.....	22
3.3 n 阶行列式.....	23
3.4 子式和代数余子式 行列式的依行依列展开.....	25
3.5 克莱姆规则.....	28
第四章 线性方程组	30
4.1 消元法.....	30
4.2 矩阵的秩 线性方程组可解的判别法.....	31
4.3 线性方程组的公式解.....	33

4.4 结式和判别式	35
第五章 矩阵	37
5.1 矩阵的运算	37
5.2 可逆矩阵 矩阵乘积的行列式	39
5.3 矩阵的分块	41
第六章 向量空间	44
6.1 定义和例子	44
6.2 子空间	46
6.3 向量的线性相关性	48
6.4 基和维数	51
6.5 坐标	53
6.6 向量空间的同构	54
6.7 矩阵的秩 齐次线性方程组的解空间	55
第七章 线性变换	57
7.1 线性映射	57
7.2 线性变换的运算	59
7.3 线性变换和矩阵	60
7.4 不变子空间	64
7.5 特征根和特征向量	65
7.6 可以对角化的矩阵	69
第八章 欧氏空间	72
8.1 向量的内积	72
8.2 正交基	74
8.3 正交变换	77
8.4 对称变换和对称矩阵	80
第九章 二次型	82
9.1 双线性函数和二次型	82
9.2 复数域和实数域上的二次型	85
9.3 正定二次型	86
9.4 主轴问题	88
第十章 群、环和域简介	90

10.1 群.....	90
10.2 剩余类加群.....	92
10.3 环和域.....	93
附录 向量空间的分解和矩阵的若当标准形.....	96
§ 1 向量空间的准素分解 凯利-汉密尔顿定理	96
§ 2 线性变换的若当分解.....	97
§ 4 若当标准形.....	98
提示 答案与解答.....	100
学习高等代数应掌握的主要方法.....	196

第一章 基本概念

1.1 集合

1. 试述集合的概念、表示法及其运算.

2. 用适当的符号($\in$, $\notin$, $=$, $\supset$, $\subset$)填空:

(i) $1 \underline{\hspace{1cm}} \{1\}$;

(ii) $\emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{0\}$;

(iii) $a \underline{\hspace{1cm}} \{a, b, c\}$;

(iv) $\{a\} \underline{\hspace{1cm}} \{a, b, c\}$;

(v) $\{a, b\} \underline{\hspace{1cm}} \{a, b, c\}$;

(vi) $\{c, b, a\} \underline{\hspace{1cm}} \{a, b\}$;

(vii) $\{c, b, a\} \underline{\hspace{1cm}} \{a, b, c\}$;

(viii) $0 \underline{\hspace{1cm}} \{1, 2, 3\}$

3. 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于():

(A) X ; (B) T ; (C) $\emptyset$; (D) S .

4. 设 Z 是一切整数的集, X 是一切不等于零的有理数的集, Z 是不是 X 的子集?

5. 设 a 是集 A 的一个元素, 记号 $\{a\}$ 表示什么? 写法 $\{a\} \in A$ 对不对?

6. 设 R 为实数集, $A = \{x | x \in R, -1 \leq x \leq 1\}$

$B = \{x | x \in R, x > 0\}$

$C = \{x | x \in R, -1 < x < 2\}$.

写出 $A \cap (B \cup C)$ 和 $A \cup (B \cap C)$.

7. 写出含有四个元素的集 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的一切子集.

8. 设 A 是含有 n 个元素的集. A 中含有 k 个元素的子集共有多少个?

9. 下列论断哪些是对的, 哪些是错的? 对于错的论断 举出

反例, 并且把错误的论断改正过来.

- (i) $x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \Rightarrow x \in B$.
- (ii) $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$.
- (iii) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$.
- (iv) $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$.

10. 证明下列等式:

- (i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.
- (iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

11. 写出集合 A 与 B 的积 $A \times B$.

- (i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$;
- (ii) $A = \{x | x \in \mathbf{R}, -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y | y \in \mathbf{R}, 0 \leq y < 2\}$

1.2 映射

1. 设 A, B 是两个非空集合. 什么是 A 到 B 的一个映射? 什么是 A 到 B 的一个满射? 什么是 A 到 B 的一个单射? 什么是 A 到 B 的一个双射? A 到 B 的两个映射相等的含义是什么? 什么是集合 A 的一个代数运算?

2. 设 f 是 A 到 B 的一个映射, 映射 $g: B \rightarrow A$ 是 f 的逆映射, 问映射 g 必须满足什么条件?

3. 什么是有限集合 A 的一个置换?

4. 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x, y, z\}$,

$$f: a \mapsto 1, b \mapsto 3,$$

$$g: 1 \mapsto x, 2 \mapsto y, 3 \mapsto z, 4 \mapsto z,$$

则 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射, 试写出合成映射 $g \circ f$.

5. 是不是任何两个映射都可以做合成? 能做合成的两个映射必须而且只需具备什么条件?

6. 设 A 是前 100 个自然数所成的集. 找一个 A 到自身的映射, 但不是满射.

7. 找一个全体实数集到全体正实数集的双射.

8. $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ 是不是全体实数集到自身的映射?

9. 设 f 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0 \\ 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & \text{若 } x \geq 1. \end{cases}$$

f 是不是 R 到 R 的映射? 是不是单射? 是不是满射?

10. 令 $A = \{1, 2, 3\}$, 写出 A 到自身的一切映射. 在这些映射中哪些是双射?

11. 设 a, b 是任意两个实数且 $a < b$. 试找出一个 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 的双射.

12. 举例说明, 对于一个集合 A 到自身的两个映射 f 和 g 来说, $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 一般不相等.

13. 设 A 是全体正实数所成的集合. 令

$$f: x \mapsto x, \quad g: x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \in A$$

(i) g 是不是 A 到 A 的双射?

(ii) g 是不是 f 的逆映射?

(iii) 如果 g 有逆映射, g 的逆映射是什么?

14. 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ 是映射, 又令 $h = g \circ f$, 证明:

(i) 如果 h 是单射, 那么 f 也是单射;

(ii) 如果 h 是满射, 那么 g 也是满射;

(iii) 如果 f, g 都是双射, 那么 h 也是双射, 并且

$$h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

15. 设 f_i 是整数集 Z 到偶数集 B 的如下对应法则:

$$f_1: n \mapsto 2n, \forall n \in Z;$$

$$f_2: n \mapsto 4n, \forall n \in Z;$$

$$f_3: n \mapsto n, \text{当 } n \text{ 是偶数时,}$$

$$n \mapsto n+1, \text{当 } n \text{ 是奇数时;}$$

$$f_4: n \mapsto |n|, \text{当 } n \text{ 是偶数时;}$$

$$n \mapsto |n+1|, \text{当 } n \text{ 是奇数时.}$$

$f_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是不是 Z 到 B 的映射? 如果是, 请指出哪一个映射是:

(i) 单射而不是满射;

(ii) 满射而不是单射;

(iii) 单射且又是满射;

(iv) 非单射又非满射.

16. 判断下列规则是不是所给的集合 A 的代数运算:

集 合 A	规 则
(1) 全体整数	$(a, b) \mapsto a^b$
(2) 全体整数	$(a, b) \mapsto -ab$
(3) 全体有理数	$(a, b) \mapsto 1$
(4) 全体实数	$(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$

1.3 数学归纳法

1. 试述最小数原理. 最小数原理是不是对任意数集都成立?

2. 试举例说明数学归纳法的两个步骤缺一不可.

3. 证明 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

4. 设 h 是一个正整数, 证明 $(1+h)^n \geq 1+nh$, n 是任意自然

数.

5. 证明二项式定理

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \cdots + b^n.$$

这里

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

6. 证明第二数学归纳法.

7. 证明: 含有 n 个元素的集的一切子集的个数等于 2^n .

1.4 整数的一些整除性质

1. 根据“整除”的定义, 0 只能整除什么数?

2. 给了一对整数 a, b , 若 $a \neq 0$, 那么 $a|b$ 的充要条件是什么?

3. 有没有能被任意整数整除的整数? 如有都是什么数? 为什么?

4. 我们知道 ± 1 能整除任意整数. 若一个整数能整除任意整数, 这个整数一定是 ± 1 吗? 为什么?

5. 举例说明素数、互素、两两互素这些概念的意义和区别.

6. 对于下列的整数 a, b , 分别求出 a 除 b 所得的商和余数:

(i) $a=17, b=-235$; (ii) $a=-8, b=2$;

(iii) $a=-9, b=-5$; (iv) $a=-7, b=-58$.

7. 设 a, b 是整数且不全为 0, 而 $a=da_1, b=db_1, d, a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. 证明, d 是 a 与 b 的一个最大公因数必要且只要 $(a_1, b_1)=1$.

8. 设 a, b 是不等于零的整数. 满足下列两个条件的正整数 m 叫做 a 与 b 的最小公倍数: (i) $a|m, b|m$; (ii) 如果 $h \in \mathbb{Z}$ 且 $a|h$,

$b|h$, 则 $m|h$. 证明: (a) 任意两个不等于零的整数 a, b 都有唯一的最小公倍数; (b) 令 m 是 a 与 b 的最小公倍数而 $d=(a, b)$, 则 $|ab|=dm$.

9. 设 p 是一个大于 1 的整数且具有以下性质: 对于任意整数 a, b , 如果 $p|ab$, 则 $p|a$ 或 $p|b$. 证明, p 是一个素数(定理 1.4.5 的逆命题).

10. 设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是两两不相同的素数, 而 $a=1+p_1p_2\cdots p_n$.
(i) 证明 $p_i \nmid a (i=1, 2, \dots, n)$; (ii) 利用 (i) 证明, 素数有无限多个.

1.5 数环和数域

1. 试述数环与数域的定义. 它们有什么不同? 数域有多少个? 为什么说有理数域 $\mathbf{Q}$ 是最小的数域?

2. 检查下列数集是不是数域:

(i) 全体偶数; (ii) 全体正实数;

(iii) $P=\{a+b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{Q}$ 是有理数集.

3. 证明, 如果一个数环 $S \neq \{0\}$, 那么 S 含有无限多个数.

4. 证明, $F=\{a+bi \mid i^2=-1, a, b \in \mathbf{Q}\}$ 是数域.

5. 证明, $S=\left\{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbf{Z}\right\}$ 是一个数环. S 是不是数域?

6. 证明, 两个数环的交还是数环; 两个数域的交还是数域. 两个数环的并是不是数环?

7. 设 F 是至少含两个不同数的集合. 证明, 如 F 中任两数的差与商(除数不为 0)仍属于 F , 则 F 是数域.

*8. 设 n 是一整数, 令

$$n\mathbf{Z}=\{nz \mid z \in \mathbf{Z}\}.$$

由例 1, $n\mathbf{Z}$ 是一个数环, 设 $m, n \in \mathbf{Z}$. 记

$$m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = \{mx + ny \mid x, y \in \mathbf{Z}\}.$$

证明: (i) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z}$ 是一个数环.

$$(ii) \quad m\mathbf{Z} \subseteq n\mathbf{Z} \iff n \mid m.$$

(iii) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}$, 这里 $d = (m, n)$ 是 m 与 n 的最大公因数.

$$(iv) \quad m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \iff (m, n) = 1.$$

第二章 多项式

2.1 一元多项式的定义和运算

1. 怎样确定多项式的次数? 多项式的次数是否唯一? 叙述多项式的次数定理.

2. 零多项式和零次多项式是一回事吗?

3. 下列表达式中哪些是多项式.

$$x^2+2x+3; (\sqrt{\pi}x+\sqrt{17})^2+2.752; \sqrt{2}x^3-\sin 10^\circ;$$

$$ix^3-\sqrt{3}x-i; (2-ix)^2; \frac{2}{x+3}; 2-e^x;$$

$$\lg x+1; x^2-\sqrt{x}+1; 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots.$$

4. 当 a, b, c 是什么数时, 多项式

$$f(x)=ax^3+bx^2+c+b(x^3+x^2)$$

(i) 是零多项式?

(ii) 是零次多项式?

5. 求 k, l , 使

$$(x^2+kx+1)(x^2+lx+1)=x^4+x^2+1.$$

6. 设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 是实数域上的多项式. 证明: 若是

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x), \quad (1)$$

那么 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

7. 求一组满足(1)式的不全为零的复系数多项式 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$.

*8. 证明:

$$1 - x + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(x-1)\cdots(x-n)}{n!}.$$

2.2 多项式的整除性

1. $x+1 = (x^2+x) \cdot x^{-1}$ 成立, 能不能说 x^2+x 整除 $x+1$? 为什么?

2. 试确定 a, b , 使 $g(x) = (x-1)^2$ 整除 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 11x^2 + ax + b$.

3. 在带余除法的定理中, 要求除式 $g(x) \neq 0$, 在符号 $g(x) \mid f(x)$ 中, 是否要求 $g(x) \neq 0$?

4. 下列写法是否正确? 为什么?

(i) $x+1 \mid (x^2-1) + (x+1) = (x-1) + (x+1) = 2x$;

(ii) $x+1 \mid (x^2-1) \div (x+1) = (x+1) \mid (x+1)(x-1+1) = x$.

5. 若 $g(x) \mid f(x)$, 且 $g(x), f(x)$ 都不是零多项式, 那么 $g(x)$ 与 $f(x)$ 之间的次数关系是():

(A) $\partial^\circ(f(x)) < \partial^\circ(g(x))$; (B) $\partial^\circ(f(x)) \geq \partial^\circ(g(x))$;

(C) $\partial^\circ(g(x)) < \partial^\circ(f(x))$; (D) 以上结论都不对.

6. 求 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的商式和余式:

(i) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1, g(x) = x^2 - 3x - 1$;

(ii) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 1, g(x) = x^3 - 3x + 2$.

7. 证明:

(i) 如果 $h(x) \mid f(x), h(x) \nmid g(x)$, 那么 $h(x) \nmid f(x) + g(x)$;

(ii) 如果 $h(x) \nmid f(x), h(x) \nmid g(x)$, 那么不一定有

$$h(x) \nmid f(x) + g(x)$$

8. 证明: $x \mid f^k(x)$ 必要且只要 $x \mid f(x)$.