实用生物数学基础

[illegible] 编著

陕西科学技术出版社

实用生物数学基础
杨芳霖　袁志发　梅福生　编著
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）
新华书店经销　　西安市委党校印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32开本　7印张　147千字
1987年7月第1版　　1987年7月第1次印刷
印数：1—10,000
ISBN 7—5369—0045—7/N·1

统一书号：13202·104　定价：1.65元

前　　言

生物数学于1974年被联合国教科文组织列为一门独立学科，与生物化学、生物物理鼎足而立，成为生命科学门类中一支生力军．

从形式上看生物与数学的有机结合是生物数学的特点，它的分支频多．生物数学可粗分为生物数学与数学生物两大类，前者着重于数学，后者着重于生物学．生物数学主要有生物统计、生物运筹、生物信息论、生物方程、生物控制论，系统分析、分类分析、生物几何学等．数学生物主要有数量遗传、数量生态、数量生理、数量分类和生物力学等．随着生物科学的发展，一些新的生物数学分支还在不断涌现，这体现了生物科学对它的迫切需要和它的强大的生命力．

当前，有不少的数学工作者在生物数学这块园地上辛勤地耕耘着，越来越多的生物学家亦迫切需要掌握一定的数学工具，以便将他们的研究深入下去和参加更深入一些的学术活动．生物学家与数学工作者携手共进是生物科学发展中的一个必然趋势．为此，我们编写《实用生物数学基础》一书，向生物学、医学、农学工作者介绍一些常用的数学知识和它们在生物科学中的应用，也为进一步学习和掌握生物数学各分支打下一个基础．然而，这本书究竟是一个入门的小册子，并不包罗万象．如果读者看过这本书后，感到抽象的数学并不是与生物学无缘，而是密切相关的，那么这本书也

就起到了它的作用.

著名数学家华罗庚讲过："客观事物的出现一般讲来有两大类现象. 一类是必然的现象——或称因果律. 一类是大数现象——或称机遇律. 表示必然现象的数学工具一般是方程式，它可以从已知数据推出未知数据来，从已知现象的性质推出未知现象的性质来. 通常出现的有代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等等（特别是微分方程）. 处理大数现象的数学工具是概率论与数理统计. 通过这样的分析便可以看出大势所趋，各种情况出现的比例规律."本着这一观点，全书的编写分为两大部分，其中第一、二章为第一部分，主要是结合生物科学中遇到的表示生命现象及其生存环境的数量关系规律的常见重要函数类型、极值问题、生长与繁殖速率及其分析等问题，介绍表示生命必然现象的函数与微积分基本概念；第三、四、五章为第二部分，主要是结合生物科学中遇到的统计分析问题，介绍处理大数现象的概率论与数理统计的基本概念，以及与计算有关的线性方程组的实用解法.

这本书名前冠以"实用"一词，其用意在于不想陷入冗繁的数学推导，着重从"实用"的角度，阐述数学中的有关概念和公式在生物科学研究中的开拓与应用. 我们将以这本小册子作为前导，陆续对生物科学中常用的一些数学方法分门别类地加以编写.

本书在编写、出版过程中李文才、王金谊二位同志，做了大量工作，在此表示感谢. 这本小册子是数学向生物学靠近和结合的尝试，难免有不当之处，望读者批评指正.

编者　　1987.2.2.

目　录

引　言

生物数学是运用数学研究生命现象及其生存环境的有关空间形式和数量关系规律的科学，是人类长时期以来对农业、林业、畜牧业、水产业、医药卫生以及发酵工业等，运用数学进行科学研究和指导生产实践的科学总结．是廿世纪发展中的自然科学和技术科学互相渗透的产物．生物数学将使研究生命现象及其生存环境的科学，从传统的定性文字描述化阶段进入到现代的定量数学化阶段．它的产生和迅速发展，再次显示了伟大的革命导师马克思的“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步”这一英明论断的无比正确性。

生物数学从1901年皮尔逊创办“生物统计学”杂志开始，在1870年到1960年约90年间，发表约4500篇生物数学论文，其中1930年到1960年竟占了73.1%．50年代应用电子计算机后，生物数学发展更快，1970年出版生物数学杂志23种，到1976年一跃而为42种，这不仅说明电子计算机是当代生物数学发展的基础，而且也说明了数学与生物科学的充分结合并综合发展的必然性。

恩格斯对数学曾作过精辟的刻画，“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”．那么纯数学研究的对象——空间形式和数量关系和我们生物科学中研究的生命现象及其生存环境有什么关系呢？下面我们通过一个实例来考察：

沙棘是一种具有医疗和饮用价值的落叶灌木. 其果实富含维生素C. 为了合理的开发利用这种具有较高生态效益和经济效益的植物资源，需要对它的分布和生长状态进行调查研究. 所谓分布是指沙棘在现实世界的空间中以什么样的形式存在着. 如经过踏勘我们知道它的分布是以整片的（盖度在0.3以上，面积在30亩以上）林子和零散的单株（丛）两种形式存在，如果从数学观点来看，就是以面积和点这两种几何类型存在，因而说到底沙棘分布是一个空间形式表示问题. 所谓生长状态是指沙棘在现实世界中生物学数量的变化过程. 如我们需要调查测定和分析沙棘的不同品种在不同盖度下的生物学产量；在不同海拔、不同经纬度上的生物学产量；不同立地条件的生物学产量；不同年龄及各生长阶段的生物学产量和生长率；根、茎、皮、叶、果实、种子各生物学产量及产量之间的关系；繁殖的速率等，如果从数学观点来看，就是沙棘的生物学产量在各种条件下的数量变化，所以沙棘生长状态又是一个数量关系刻画问题. 其实，在现实世界中这种分布的空间形式表示与生长状态的数量关系刻画，对研究植物、动物、微生物的生命现象及其生存环境是一个普遍的共性问题，统一到纯数学里就是一个空间形式与数量关系的问题.

生命现象是一种高级的物质运动，它以相互联系、互相制约、大量重复、多种多样的形式表现出来，在时间上和空间上构成了极为错综复杂的有机整体. 基于生命现象的复杂性，只有数学、化学、物理学等各自然学科的交叉综合攻关，才可望揭开生物学的奥秘. 对于生命现象及其生存环境进行宏观研究和更深层次的微观研究，作为自然科学的基础

——数学，更有其得天独厚的能力，它与生物学的结合，意味着生物科学已进入一个定量化和精确化的新阶段，使现代的生物学变成了创造生物与改造大自然的工程学。

第一章　函数与生物科学

在生物科学中，我们常遇到各种不同量．例如，长度、面积、体积、重量、密度、盖度、浓度、温度、时间、速度等等．

观察某种生命现象过程，我们往往可以注意到，在这种现象过程里面所遇到的种种不同的量，有着非常不同的状态．其中有的量，在过程的进行中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；但另外一些量却有变化，也就是可取各种不同的数值，这种量叫做变量．例如，观察一片沙棘林的生长状态，显然在当年林子里的沙棘株（丛）个数保持一定，所以是常量；但相反地，根、茎、叶、果实的生物学产量随各生长阶段天数的变化而发生变化，所以它们就是变量．

我们必须注意到上述常量与变量的概念，要依赖于研究这个现象所在的场合．同一个量，在某种情况下可以认为是常量；而在别的情况下，就可能是变量．例如，前面提到的林子里的沙棘株（丛）个数，要认清在当年沙棘株（丛）个数可以认为是常量；若隔年因根系的繁殖生长，则林子里的沙棘株（丛）个数就不能算做常量而是变量．

在数学中讨论的量，不管是常量还是变量，都可不顾它们的生物学意义而只注意它们的数值．常量一般用字母a、b、c、…等来表示；变量一般用字母x、y、z、…等来表示．

量x的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来代表它．如果量x是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果量x是变量，则用数轴上的动点表示．

往往在观察同一个生命现象过程中，同时会有几个变量共同变化着．但这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互有联系的，遵循一定的规律在变化着．具体地拿两个变量来讲就是，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一变量就有确定的值与之对应．通常把两个变量之间的这种对应关系叫做函数关系．下面我们给出函数的数学定义．

§1.1 函数的定义

设D是给定的一个数集．若有两个变量x和y，当变量x在D中取某个特定值时，变量y依确定的关系f也有一个确定的值，则称y是x的函数，f称为D上的一个函数关系，记为$y=f(x)$，x称为自变量，y称为因变量．当x取遍D中各数，对应的y就构成一数集R，D称为定义域或自变数域，R称为值域或因变数域．

在我们研究的生物科学中，运用函数关系来表示生命现象及其生存环境的数量关系的规律方面已有大量的实例：

例1.1 在水、肥等条件保持不变的情况下，玉米幼苗的株高y随着天数x的变化而变化．对于每一个天数x的值对应着一个株高y的值，这种对应规律就是所谓函数关系，可表示为

$$y=f(x)$$

式中f表示y与x的对应关系，不能看作f乘x．x叫自变量，y

叫因变量.

例1.2 德国化学家、现代农业化学的倡导者李比希(Von Liebig) 1843年在《化学在农业和植物生理学上的应用》第三版，针对“田间作物产量的增减和厩肥中所供给的矿质养分成比例”提出的著名最小养分律，就是在瓦格诺尔(Wagner) 和麦耶 (Adolf Mayer)等人的支持下用函数关系式

$$y=a+bx$$

给以表达，从而使这个定律更加通俗易懂. 式中y表示总产量. x表示施入养分量. a表示施肥前的产量水平. b为系数值. 此式可用于表示在某一定范围内，某一速效养分与产量的关系，以及低量N、P、K类肥料在植株吸收方面的反应等问题. 如西北农业大学有人作过实验，当N肥供应充足时，冬小麦籽粒产量与土壤有效磷含量呈如下函数关系：

$$y=264.9+6.54x$$

式中y代表小麦产量. x代表0.5M$NaHCO_3$浸出的土壤有效磷含量 (P_2O_5, ppm) .供试范围在土壤有效磷含量2.4——100.8ppm内.

例1.3 对乌尔尼 (Wollny) 教授指出的“关于限制因子施用超过最适数量时就变成毒害因素，使产量降低”的观点，费佛尔 (Pfeiffer) 教授等用函数关系式

$$y=a+bx+cx^2$$

给出了表达. 揭示了施肥剂量与作物产量的规律，其工作无疑把营养科学向前推进了一步. 式中y是由一定量肥料所得的产量. x为肥料用量. a代表不施肥的产量. b和c为常数.

例1.4 有人对小鼠注射磺胺药物. 在给药后20分钟到

420分钟内进行观察，发现在小鼠身上药物的浓度与时间，取对数后结果可用函数关系式

$$y=-1.06+2.59x-0.77x^2$$

表示．式中$y=\lg$（药物浓度mg/100ml）．$x=\lg$（经历的时间，分）．

例1.5 米采利希（E、Mitscherlich）根据他所发现的肥料效应与报酬递减律相吻合的现象，在数学家布尔(Boule)的协作下，于1909年拟定了著名的米氏方程式，其函数关系表达式为

$$\mathrm{Log}(A-y)=\mathrm{Log}A-cx \quad 或 \quad y=A(1-10^{-cx})$$

式中A为增施某一养分可能达到的最高产量，y为该养分量为x时的实际产量，c称效应系数．

例1.6 一个母细胞分裂成2个子细胞后死亡，然后由子细胞再进行分裂．这种生命现象的繁殖，用函数关系式表达就是

$$y=y_0 2^x$$

式中y_0表示开始时细胞群的大小，即细胞总数；x表示繁殖的代数；y表示x代数时的细胞总数．

例1.7 植物生理学中关于酶促反应与底物浓度之间的相互关系，有一个著名的米——曼（Michaelis——Menten）方程式给予了表达，其函数关系式为

$$y=\frac{y_{max}\cdot x}{k_m+x} \quad 或 \quad y=\frac{y_{max}}{1+k_m/x}$$

式中x为底物浓度；y为x时的酶促反应速度；y_{max}为最大反应速度，k_m为中间产物的解离平衡常数．

例1.8 生态学中的自然生长方程是以函数关系式

$$y=\frac{r/k}{\left[1+\left(\frac{r/k-y_0}{y_0}\right)e^{-rt}\right]}$$

的形式给出的．式中y为时间t时的种群总数；r为相对生长率；y_0为开始时种群总数；k为常数，e为自然常数．

总之，在生物科学的研究工作中，以函数关系表示生命现象及其生存环境的例证是大量存在的，也是非常有用的．关于这一点通过上述例题我们也能看到．

本节最后要说明：

1．对于自变量x的某一个值a，函数f(x)的对应值叫做函数当x＝a时的函数值，用记号f(a)来表示．例如，函数f(x)＝3x＋2当x＝2时，函数值为8，即f(2)＝8．

2．函数的定义域D在生物科学的实际问题中是根据所考虑的问题的实际意义来确定的，例如在前面例1.1的玉米植株生长过程中，天数x有一定的变化范围，这种范围叫做函数y＝f(x)的定义域，意指若x值超出了这种范围，对株高y来讲已无意义．y的取值范围叫做函数的值域．再如例1.2中小麦产量y是土壤有效磷含量x的函数，定义域D是区间〔2.4，100.8〕ppm；例1.4中药物浓度y是时间x的函数，定义域D是区间〔20，420〕分；例1.6中细胞总数y是繁殖代数x的函数，定义域D是区间（0，＋∞）．

3．但在数学的一般研究中，如果函数用一个公式（或分析表达式）y＝f(x)给出而没有表明它的定义域时，就认为这函数的定义域是使这表达式保持有意义的一切x值．换句话说，是这样一些数的全体，当这种数代替公式中的x时，能

求得确定的实数值．y例如函数$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域D是区间（－1，1）；函数$y=\sqrt{x^2-1}$的定义域D是区间（-∞，－1〕与〔1，+∞）．

§1.2 函数的表示方法

两个变量之间的函数关系——从已给自变量值求出其对应函数值的对应法则，可以用各种方式表达出来．最常用的表示方法有公式法、图示法及表格法三种．

1．公式法：如果两个变量之间的函数关系可以借助数学公式来表示，这样表示函数的方法叫做函数的公式表示法或简称公式法．例如前面例1.2—1.8中的

$$y=a+bx,\quad y=264.9+6.54x,\quad y=a+bx+cx^2,$$

$$y=-1.06+2.59x-0.77x^2,\quad y=A(1-10^{-cx}),$$

$$y=y_0 2^x,\quad y=\frac{y_{max}}{1+k_m/x},\quad y=\frac{r/k}{\left[1+\left(\frac{r/k-y_0}{y_0}\right)e^{-rt}\right]}$$

等等都是用公式法表示的函数．

函数公式法的优点是便于用数学分析的方法来对函数进行理论的研究．

2．图示法：如果两个变量之间的函数关系可以借助平面直角坐标系中的一条曲线（直线看成是特殊情况下的曲线）来表示，即当自变量x值等于曲线上点的横标时（或说横标是自变量x值），对应的函数y值等于该点的纵标（或说纵标是对应的函数y值），这样表示函数的方法叫做函数的

图象表示法或简称图示法.

函数的图示法在生命现象的研究中是常用的.

例1.9 在生物膜的透性研究中，关于溶质透过细胞膜的转移方式的刻划，其速度y与浓度x的函数关系就是用图示法来表示的，见图1.1.

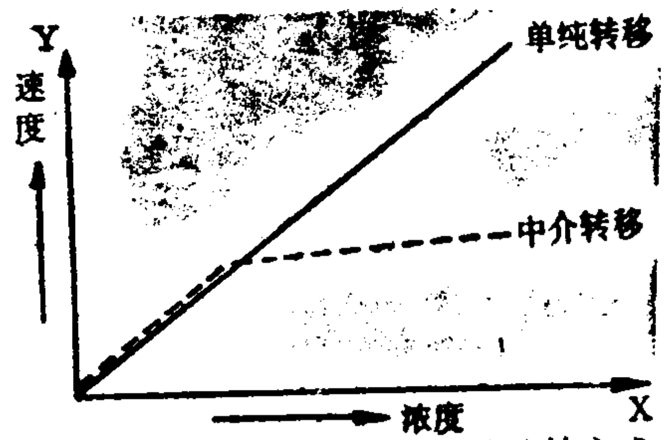

图1.1 溶质透过细胞膜的移转方式

例1.10 小麦胚脱氢酶y与温度x的函数关系也用图示法来表示，见图1.2.

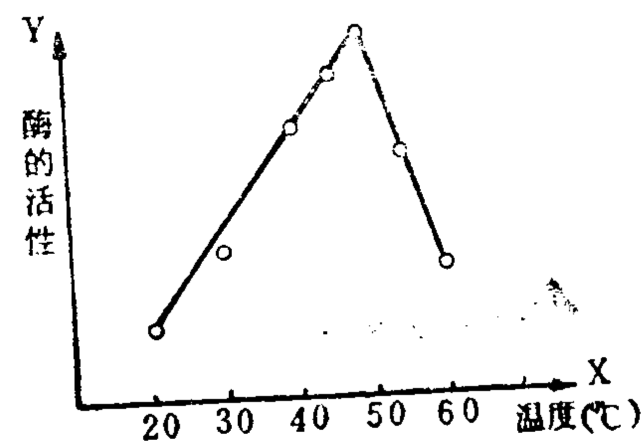

图1.2 小麦胚脱氢酶与温度的关系

例1.11 鳄梨果实呼吸强度y与采收

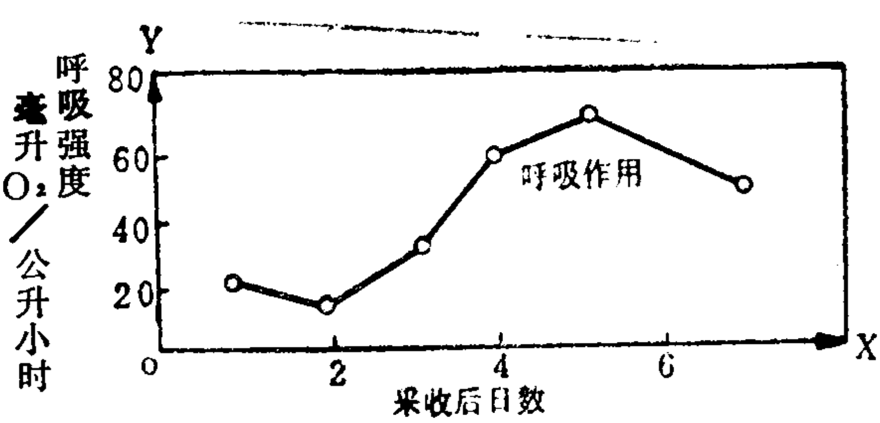

图1.3 鳄梨果实呼吸跃变