

高等学校教学参考书

机械原理丛书

# 瞬心线及共轭曲线机构

来 度 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

机械原理丛书

# 瞬心线及共轭曲线机构

来 虔 编

高等教育出版社

## 内 容 简 介

本书共五章：1 平面高副；2 瞬心及其应用；3 瞬心线机构；4 曲率；5 共轭曲线或（互）包络线机构。书中附有部分例题和习题。

我国自1956年以后，一般大学教材中不讨论共轭曲线问题，本书可作为对这一问题的补充教材；对其他问题，除必要衔接外，尽可能不与现行大学教材的内容重复，故又可作为扩大知识面的补充读物。本书还简单介绍一些设计性问题以及理论上的结论。

本书可以作为高等工业学校机械原理或机构学课程的补充读物和教学参考书，也可供有关工程技术人员参考。

(京)112号

高等学校教学参考书

机械原理丛书

瞬心线及共轭曲线机构

来 虔 编

\*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 4.75 字数 110 000

1992 年 7 月第 1 版 1992 年 7 月第 1 次印刷

印数 0001—1 255

ISBN7-04-001034-8/TH·164

定价 3.00 元

## 序

关于瞬心线及共轭曲线问题,早在1875年文献[1]就有论述;国外教材一般亦多列专章介绍。我国鉴于学时有限,且认为不及齿轮、凸轮实用,故于1956年7月全国机械原理教师代表在哈尔滨集会制订我国自己的参考性教学大纲时,决定将此内容删去。1979年,我国编写《机械工程手册》时将该内容恢复,列为专章<sup>[14]</sup>。在1987年出版的《机械基础课程教学基本要求》中,列有“了解共轭齿廓的求法”,要求在高等工业学校机械原理课程中亦恢复讲授共轭问题。

从教学观点看,编者认为作为一门主干技术基础课程,主要应讲授三基(基本理论、基本知识和基本技能),扩大学生视野、扩大知识面、开拓并活跃解决问题的思路,而不在于论述太多的具体专业性问题。本书希望在这方面起点作用,介绍一些更概括、更普遍的结论。例如现行教材中某些传统结论:“平面高副的相对自由度为2”、“渐伸线曲率中心位于瞬心”、“渐伸线齿廓的可分性”等对其他不同的高副就不一定适合。

本书对取材来源尽可能根据作者最早编写引用或接触到的文献章节,附注于相应页码底部,以便读者了解资料来源,供读者作进一步探索、考证和核对。

考虑到当前读者学习、工作都比较繁忙,为了帮助读者顺利阅读,节约时间,对极大多数公式均附有证明、推导。

本书承合肥工业大学教授、机械原理课程教学指导小组成员丁爵曾悉心审阅,谨此表示衷心感谢。本书在编写过程中某些个别内容还曾蒙个别同志协助审阅,编者均在相应页码底部注明、

鸣谢。

本书最后仓促成文,有不少内容未经教学实践,如有错误不妥之处,欢迎读者指正。

编 者

1987年8月于西安交通大学

# 符号凡例

1. 章节及小标题编排顺序: 1、1.1、1.1.1、1.1.1.1、(1)、a)。
2. 坐标系简化代号:“(O<sub>1</sub>)”代表“坐标系 $x_1O_1y_1$ ”,例如“ $M_1(x_1, y_1)(O_1)$ ”即代表“以 $O_1$ 为原点的坐标系 $x_1O_1y_1$ 中的点 $M_1(x_1, y_1)$ ”。
3. 表示线段相等同时又平行的代号“ $\parallel$ ”,例如“ $a \parallel b$ ”表示“线段 $a$ 等于线段 $b$ ,同时 $a$ 又平行于 $b$ ”。
4. 图中表示两线段平行的标号:“ $\phi \phi$ ”或“ $\neq \neq$ ”,表示两不邻接线段垂直的标号:“ $\phi \perp$ ”或“ $\perp$ ”;表示等角的标号:“ $\angle \angle$ ”或“ $\angle \angle$ ”。
5. 角的代号:必要时用“ $\hat{x}_1x_2$ ”代表“从轴 $x_1$ 量到轴 $x_2$ 的角”,逆时针量为“+”。
6. “ $\vec{v}$ ”代表“将矢量 $v$ 按某一方向转过 $90^\circ$ 的转向矢量”。
7. “ $\rightarrow$ ”代表多种理解,如“是”、“可以求出或得出”、“表示”、“说明”、……,请读者按上、下文意具体体会。
8. “ $\odot$ ”表示“以 $O$ 为圆心、 $r$ 为半径的圆”。
9. 文中右上角的“①”、“②”、…表示文中有关内容“参阅本页文下相应编号的注释”。
10. 表示参考文献及参阅页数的代号:例如“[1]p43”、“[1]pp86”分别表示“参阅书末参考文献[1]第43页”、“参阅书末参考文献[1]第86页及以后各页”。
11. 表示相对运动的符号,例如
  - $v_{A_{15}}$ ——点 $A_1$ 相对构件5的相对速度;
  - $v_{P_{15}}$ ——代表点 $P_{15}$ 的绝对速度;
  - $v_{P_{151}}$ ——代表点 $P_{15}$ 相对构件1的相对速度;
 以上可对照图及其相应说明区分决定。
  - $\omega_{11}$ ——代表构件2相对构件3的相对角速度。

12. 一般常规符号有时不加说明, 例如

$l, d(\text{m})$ ——线距离、线位移;

$v, u(\text{m/s})$ ——线速度;

$a(\text{m/s}^2)$ ——线加速度;

$\omega(1/\text{s})$ ——角速度;

$\varepsilon(1/\text{s}^2)$ ——角加速度;

$n$  或  $nn, t$  或  $tt$ ——法线, 切线。

# 目 录

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 符号凡例                               | I  |
| 1 平面高副                             | 1  |
| 1.1 高副机构                           | 1  |
| 1.2 单接触点平面高副的运动特征                  | 2  |
| 1.2.1 相对滑移区                        | 2  |
| 1.2.2 相对转动区                        | 2  |
| 1.2.3 纯滚动高副两构件间的相对运动关系             | 3  |
| 1.3 二、三、四接触点的高副的相对滑移区及转动区          | 4  |
| 1.3.1 相对滑移区                        | 4  |
| 1.3.2 两个以上接触点的高副的相对转动区             | 6  |
| 1.4 运动副联接及其自由度                     | 7  |
| 2 瞬心及其应用                           | 11 |
| 2.1 瞬心及平面平行运动的基本概念                 | 11 |
| 2.1.1 瞬心                           | 11 |
| 2.1.2 平面平行运动的基本概念                  | 13 |
| 2.1.2.1 瞬时重合点相对速度定律                | 13 |
| 2.1.2.2 同一刚体上两点之间的速度关系             | 13 |
| 2.1.2.3 不同刚体上瞬时重合点及同一刚体上两点之间的加速度关系 | 14 |
| 2.1.2.4 高副低代                       | 15 |
| 2.2 三心定理                           | 17 |
| 2.3 瞬心求法                           | 18 |
| 2.3.1 直接观察瞬心位置                     | 18 |
| 2.3.2 应用三心定理求瞬心                    | 19 |
| 2.3.3 用三心定理难以直接求解的机构瞬心             | 22 |
| 2.4 瞬心法求速度                         | 26 |

|         |                                          |    |
|---------|------------------------------------------|----|
| 2.5     | 应用瞬心综合四杆机构 .....                         | 28 |
| 2.6     | (四杆机构)瞬心位置的变动速度及其应用 .....                | 30 |
| 2.7     | 加速度瞬心 .....                              | 33 |
| 3       | 瞬心线机构 .....                              | 36 |
| 3.1     | 转动极及静、动极多边形 .....                        | 36 |
| 3.2     | 瞬心及静、动瞬心线 .....                          | 37 |
| 3.3     | 再现低副机构运动的瞬心线机构 .....                     | 38 |
| 3.3.1   | 再现四杆机构运动的瞬心线机构 .....                     | 38 |
| 3.3.2   | 再现曲柄滑块机构运动的瞬心线机构 .....                   | 40 |
| 3.4     | 再现其他高副的运动的瞬心线 .....                      | 42 |
| 3.4.1   | 高副及齿廓啮合的基本定律 .....                       | 42 |
| 3.4.2   | 再现其他高副的运动的瞬心线 .....                      | 44 |
| 3.5     | 按给定运动规律设计瞬心线机构 .....                     | 45 |
| 3.5.1   | 设计瞬心线机构的三个基本运动关系式 .....                  | 45 |
| 3.5.2   | 图解法设计瞬心线机构 .....                         | 49 |
| 3.5.3   | 瞬心线机构设计的基本方程和基本概念 .....                  | 54 |
| 3.5.3.1 | 瞬心线机构设计的两类基本方程 .....                     | 54 |
| 3.5.3.2 | 有关高副机构设计的一些基本概念 .....                    | 55 |
| 3.5.3.3 | 两瞬心线( $s_1, s_1$ )封闭的条件 .....            | 56 |
| 3.6     | 椭圆型(齿轮的)瞬心线(或节线) .....                   | 57 |
| 3.6.1   | 椭圆极坐标方程 .....                            | 57 |
| 3.6.2   | 椭圆型瞬心线 .....                             | 58 |
| 3.6.3   | 椭圆变速传动的工程应用 .....                        | 62 |
| 3.6.4   | 椭圆轮系 .....                               | 63 |
| 3.7     | 变形椭圆、卵圆及偏心圆瞬心线 .....                     | 64 |
| 3.7.1   | 变形椭圆 .....                               | 64 |
| 3.7.1.1 | 变形椭圆的形成 .....                            | 64 |
| 3.7.1.2 | 转数比( $n_{12}=n_1/n_2$ )为1的一对变形椭圆传动 ..... | 65 |
| 3.7.2   | 卵圆 .....                                 | 69 |

|          |                                                        |            |
|----------|--------------------------------------------------------|------------|
| 3.7.2.1  | 卵圆的形成 .....                                            | 69         |
| 3.7.2.2  | 两全等卵圆传动 .....                                          | 69         |
| 3.7.2.3  | 不等叶数的卵圆传动 .....                                        | 70         |
| 3.7.3    | 偏心圆及其共轭曲线 .....                                        | 72         |
| 3.7.4    | 含卵圆的行星轮系 .....                                         | 74         |
| <b>4</b> | <b>曲率 .....</b>                                        | <b>75</b>  |
| 4.1      | 曲率的定义、法线及曲率中心的作图 .....                                 | 75         |
| 4.1.1    | 曲率的定义 .....                                            | 75         |
| 4.1.2    | 法线及曲率中心的作图 .....                                       | 76         |
| 4.2      | 曲率半径与曲率的计算公式 .....                                     | 77         |
| 4.3      | 曲率中心的坐标方程 .....                                        | 78         |
| 4.4      | 渐伸线和渐屈线或法(线)包(络)线 .....                                | 78         |
| 4.5      | 拐点圆(切向圆)和交变圆(法向圆) .....                                | 82         |
| 4.5.1    | 拐点圆(切向圆) .....                                         | 82         |
| 4.5.2    | 交变圆(法向圆) .....                                         | 83         |
| 4.5.3    | 拐点圆与交变圆的交点( $Q$ 与 $P$ )的性质 .....                       | 83         |
| 4.5.4    | 瞬心位置变动速度 .....                                         | 84         |
| 4.6      | 欧拉-萨伐利(Euler-Savary)公式 .....                           | 85         |
| 4.6.1    | 旋轮线曲率半径 .....                                          | 85         |
| 4.6.2    | 利用博比利尔(Bobillier)等角原理作连杆瞬心线公切线 .....                   | 89         |
| 4.6.3    | 用阿伦霍尔德(Aronhold)作图法求连杆曲线的曲率中心 .....                    | 91         |
| 4.6.4    | 欧拉-萨伐利公式——共轭曲线与瞬心线的曲率 .....                            | 92         |
| 4.6.5    | 由啮合线导出齿轮共轭齿廓的曲率方程及由该方程<br>导出欧拉-萨伐利公式; 博比利尔法则及其应用 ..... | 93         |
| <b>5</b> | <b>共轭曲线或(互)包络线机构 .....</b>                             | <b>101</b> |
| 5.1      | 设计共轭曲线的基本定律 .....                                      | 101        |
| 5.2      | 两种设计共轭曲线机构的图解法 .....                                   | 101        |
| 5.2.1    | 包络法 .....                                              | 101        |
| 5.2.2    | 法线法 .....                                              | 102        |

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 5.3 四种图解包络法 .....                                       | 105 |
| 5.3.1 包络法 .....                                         | 105 |
| 5.3.2 旋轮线 .....                                         | 105 |
| 5.3.2.1 摆线系旋轮线 .....                                    | 105 |
| 5.3.2.2 渐伸线系旋轮线 .....                                   | 105 |
| 5.3.3 法向等距共轭曲线 .....                                    | 108 |
| 5.3.4 辅助线法或卡姆斯(Camus)定理 .....                           | 108 |
| 5.3.5 利用特殊旋轮线进行机构综合 .....                               | 110 |
| 5.3.6 摆线针轮的形成原理 .....                                   | 112 |
| 5.4 两种设计包络线机构的解析法 .....                                 | 113 |
| 5.4.1 解析包络法 .....                                       | 114 |
| 5.4.1.1 包络线公式 .....                                     | 114 |
| 5.4.1.2 平底从动件凸轮廓线设计 .....                               | 116 |
| 5.4.1.3 等距曲线公式 .....                                    | 117 |
| 5.4.2 解析法线法 .....                                       | 119 |
| 5.4.2.1 平面坐标变换矩阵 .....                                  | 119 |
| 5.4.2.2 已知中心距、传动比及齿廓 $k_1$ , 求共轭齿廓 $k_2$ 及啮合线 $m$ ..... | 121 |
| 5.4.2.3 已知瞬心线及啮合线, 求共轭齿廓 .....                          | 123 |
| 5.4.2.4 内啮合共轭齿廓设计 .....                                 | 131 |
| 5.4.3 平面啮合的几个问题 .....                                   | 134 |
| 5.4.3.1 过渡曲线 .....                                      | 134 |
| 5.4.3.2 过切或根切界限点 .....                                  | 137 |
| 5.4.3.3 啮合界限点与两次接触 .....                                | 138 |
| 参考文献 .....                                              | 141 |

# 1 平面高副

早在 1875 年,勒洛(Reuleaux F.)就观察到<sup>①</sup>, 机器中的运动构件从不单独使用而是常常成对工作的。从实现机器的确定运动的角度来研究,组成机器的要素不是单一的零件或构件,而是两构件之间的活动联接。勒洛命名这种活动联接为运动副。各式各样的机器的确定运动就是由有限的几种运动副适当配合运用的结果。构件之间以点或线接触而构成的运动副称为高副;以面接触而构成的运动副称为低副。由于这种能作面接触的平面运动副的运动特征较少、改变运动性能的能力较低[相对运动单一(见题 1.1)],故勒洛命名其为低副<sup>②</sup>。在平面机构中,高副只有相对自由度为 2 的可转可滑的一种;低副只有相对自由度为 1 的转动副和移动副两种。

## 1.1 高副机构

平面机构按其所含活动联接(或运动副)的接触情况可分为:

(1) 高副机构——至少含有一个高副,其最基本的型式为由高副和低副组成的三构件机构(如齿轮机构和凸轮机构);(2) 低副机构——只含有低副,其中含有转动副的机构传统上常称为连杆机构,全由移动副组成的机构称为楔块机构。

根据组成高副的两构件的运动情况,高副机构又可分为作纯滚动接触的瞬心线机构和作滚动带滑动啮合的共轭曲线机构或

---

① [1]p43, p86

② [1]p116

(互)包络线机构。齿轮机构和凸轮机构是共轭曲线机构中应用最广泛的两类机构。

## 1.2 单接触点平面高副的运动特征<sup>①</sup>

平面高副有滑移和转动两个相对自由度，量度高副的参数为曲率中心  $O_1, O_2$ ，曲率半径  $\rho_1, \rho_2$ ，公法线  $n_1 n_2$  及公切线  $tt$  (图 1.1)。

### 1.2.1 相对滑移区

如图 1.1，曲线 I、II 在点  $P_1, P_2$  接触。因点  $P_2$  不能侵入曲线 I 的实体，故点  $P_2$  不可能有  $P_1 O_1$  方向的相对移动分量。任作  $t't' \parallel tt$ ，图示箭头方向为曲线 II 相对于曲线 I 可能发生的相对滑移的方向，因而  $tt$  左面为相对滑移区；右面为滑移约束区。因为上述只与切线  $tt$  有关，而与曲线 I、II 之廓形无关，故可用  $tt$  代表 I 或 II 进行讨论，例如在讨论图 1.2 中 II 相对 I 的运动自由度时，可用  $tt$  代表 I。

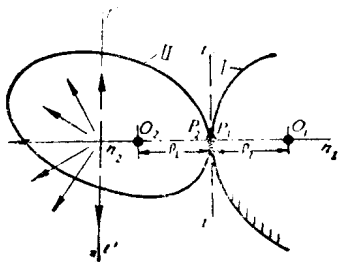


图 1.1

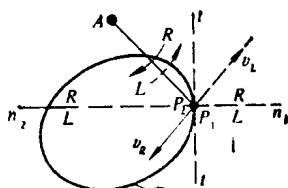


图 1.2

### 1.2.2 相对转动区

如图 1.2， $tt$  为曲线 I 与 II 在点  $P_1, P_2$  的公切线，设  $A$  为曲线 II

① [1]pp86~114

上在 $n_2P_2t$ 象限内的任意一点,则曲线II相对曲线I只能绕点A顺时针向转动(见图中 $R$ 及 $v_R$ 方向),但不能逆时针向转动(见图中虚线 $L$ 及 $v_L$ 的方向),因为 $P_2$ 不能侵入 $tt$ 右侧的滑移约束区。据此, $n_1n_2$ 上方为顺时针向转动区域,称 $R$ 区;下方为逆时针向转动区域,称 $L$ 区;曲线II相对于曲线I绕线 $P_2n_2$ 上各点可作两个方向的转动,而绕线 $P_1n_1$ 上各点则只能作瞬时的 $R$ 、 $L$ 方向的转动,以后将用这种观察法来判别可转动情况。

### 1.2.3 纯滚动高副两构件间的相对运动关系

由于引进了一个“作纯滚动”的约束条件,故高副的相对自由度成为1。此时,组成高副的两构件不论以何者为参考坐标,某一构件上一点相对另一构件的相对运动虽然总是相同的,但是这两构件上的两重合点则各自有不同的相对运动轨迹。

如图1.3,圆1和直线2相互作纯滚动;平面1上点 $P_1$ 在平面2上的相对轨迹不论何者固定都是同一条摆线 $\widehat{aa}$ ,而平面2上与1上点 $P_1$ 重合的点 $P_2$ 相对固定平面1上的轨迹则是渐伸线 $\beta\beta$ ,两者是不同的。

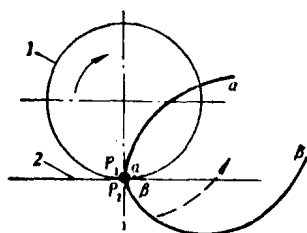


图 1.3

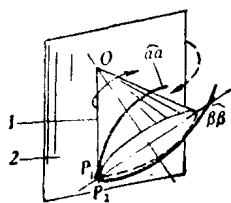


图 1.4

同样的结论亦适用于空间高副。例如图1.4中圆锥1与平面2相互滚动。当1动2不动时,1上点 $P_1$ 在静止空间2上画出球面摆线 $\widehat{aa}$ ,这是 $P_1$ 的绝对运动;若倒置,2动1不动,2上点 $P_2$

在静止空间 1 上画出球面渐伸线  $\widehat{\beta\beta}$ , 这是始位与点  $P_1$  重合的点  $P_2$  的绝对运动。 $\widehat{\alpha\alpha}$  和  $\widehat{\beta\beta}$  虽然均在以  $O$  为球心、 $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$  为半径的球面上, 但系两条不同的曲线。对同一描画点, 例如固结在 2 上的点  $P_2$ , 无论 1、2 何者固定, 当它们相对滚动时,  $P_2$  都将在 1 上画出同一  $\widehat{\beta\beta}$ 。以上概念有时可用于切削等场合。

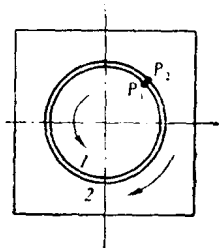


图 1.5

**题 1.1** 如图 1.5 所示低副(转动副), 通过构件 1、2 倒置, 说明: (1) 点  $P_1$ 、 $P_2$  将描画相同的绝对运动轨迹, 但方向相反; (2) 点  $P_2$  将描画相同的相对轨迹, 方向亦相同。

## 1.3 二、三、四接触点的高副的相对滑移区及转动区<sup>①</sup>

### 1.3.1 相对滑移区

图 1.6 所示的高副在  $A$ 、 $B$  两点接触, 过任意点  $O$  (现取  $n_A$ 、 $n_B$  交点) 作这两接触点切线的平行线, 即作  $t'_A \parallel t_A$ ,  $t'_B \parallel t_B$ , 则根据前述理论 (见节 1.2.1),  $t'_A Ot'_B$  为 (公共) 可滑区 (图中阴影线示出)。现增加接触点  $C$ , 过点  $O$  作  $t'_C \parallel t_C$ , 则  $t'_C$  右方成为滑移

<sup>①</sup> [1] pp86~114

约束区,使可滑区缩小为 $t'_c O t'_b$ (见图中交叉阴影线区)。过点 $O$ 作 $C$ 点法线的平行线 $n'_c$ ,即 $n'_c \parallel n_c$ ,若 $A, B, C$ 三点的位置使任两相邻法线之间的夹角都小于 $180^\circ$ ,则曲线I、II之间无相对可滑区。注意图中 $n_B, n'_c$ 之间的夹角大于 $180^\circ$ ,可滑区位于 $n_B$ 和 $n_c$ 所夹角范围内,即 $\angle t'_b O t'_c = \angle n_B O n'_c - 180^\circ$ ,故尚有不大的可滑区。

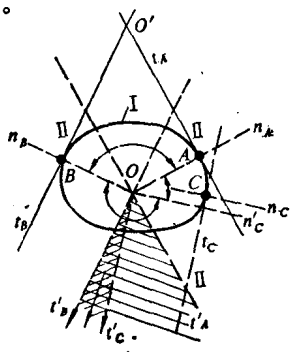


图 1.6

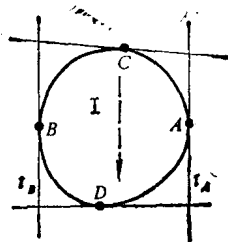


图 1.7

又如图 1.7,若 $t_A \parallel t_B$ ,则 $A, B, C$ 三点还不能约束平行于 $t_A$ 方向的滑动(见虚线箭头),必须再增加一点(如 $D$ )。因此完全约

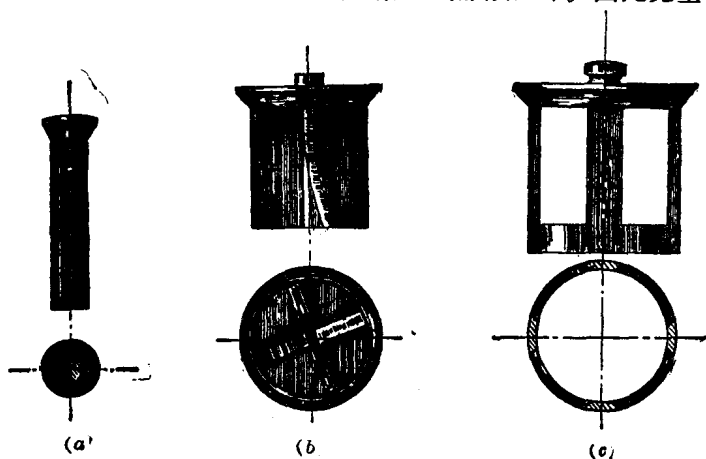


图 1.8

束高副之间的相对滑移至少要三个、有时四个接触点。图 1.8 所示的控制水管内水流的阀门,要求转动时中对位置不变,亦即无相对滑移。由于不需要考虑受力或磨损,故不采用实心圆柱体的低副,而用结构上比较经济轻巧的三点定位(如图 1.8 a,留出三条空腔)或四点定位(如图 1.8 b,只留四条螺旋状的筋;图 1.8 c 则留四条筋,下端用圈联结)。图 1.8 的结构虽凭常识或经验就可设计,但本节提供了其中的理论根据。

### 1.3.2 两个以上接触点的高副的相对转动区

如图 1.9,曲线 II 在点 A、B 分别与曲线 I<sub>A</sub>、I<sub>B</sub> 相接触。按节 1.2.2 中所述的判别方法,曲线 II 对于接触点 A 来说,  $n_A n'_A$  左上方为 R 区,右下方为 L 区;对接触点 B,  $n_B n'_B$  右上方为 L 区,左下方为 R 区。由于转动方向 R、L 相互制约,故  $n_A O n_B$  及  $n'_A O n'_B$  成为转动约束区;而  $n_A O n'_B$  为 L 区,  $n'_A O n_B$  为 R 区, O 为可瞬时 L、R 转动点。如增加接触点 C,则由于  $n_C n'_C$  右面为 R 区、左面为 L 区,故公共可转区(R 区)缩小成图 1.9 中的  $\triangle OPQ$ 。

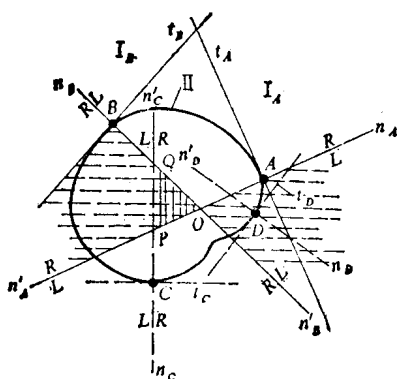


图 1.9

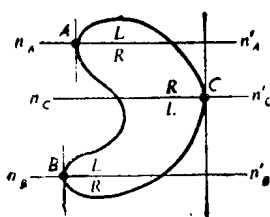


图 1.10

题 1.2 (1) 可转区为上述  $\triangle OPQ$  (R 区) 时, 曲线 II 绕点 O 的转动情