新概念 XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI 学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

高三数学

学科主编：刘汉文
本册主编：肖平安　丁明忠
编　　者：肖平安　张卫兵　方牡丹
丁明忠　蔡　欣　任　重
刘　刚　金　榜　卓凤献
武　龙　冼　才　伍月珍
石　松　常　青　程善祥
康　健

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念学科竞赛完全设计手册. 高三数学 / 师达主编.
—2版. —北京：中国少年儿童出版社，2002.6
ISBN 7—5007—5660—7

Ⅰ.新… Ⅱ.师… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第032143号

奥 赛 急 先 锋

高三数学

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

主　　编：师　达　　装帧设计：钱　明
责任编辑：惠　玮　　封面设计：徐　枝
责任校对：刘　新　　责任印务：栾永生

社　址：北京东四十二条二十一号　　邮政编码：100708
电　话：010—64032266　　咨询电话：65956688-31

印　刷：南京通达彩印有限公司　　经　销：全国新华书店

开 本：850×1168　1/32　　印 张：9.375印张
2002年6月北京第1次修订　　2002年7月南京第1次印刷
字 数：206千字　　印 数：1—10000册

ISBN 7—5007—5660—7/G·4451
(全三册)总定价：29.40元　　本册定价：9.80元

前 言

国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad简称IMO），是一种国际性的以中学数学为内容、以中学生为参赛对象的竞赛活动。第一届国际数学奥林匹克于1959年夏天在罗马尼亚举行，当时只有保加利亚、捷克、匈牙利、波兰、罗马尼亚和前苏联派代表队参赛，竞赛活动每一年举办一次，1980年因故停办一次。以后每年的国际数学奥林匹克参赛国都在不断地增加，参赛规模都在不断地扩大，如同国际体育奥林匹克竞赛一样，国际数学奥林匹克也已深深地扎根于广大中小学师生的心田中。

在我国奥林匹克竞赛活动始于1956年，当时在著名数学大师华罗庚教授的亲自参与并指导下，在北京举办了首次数学奥林匹克竞赛。“文革”后全国性及地区性的各级各类数学竞赛活动如雨后春笋，深受师生的厚爱。1986年我国首次正式派代表队参加国际奥林匹克数学竞赛，并取得骄人的成绩。更为可喜的是，中学生的数学学

科竞赛活动影响并带动了物理学、化学、生物学、计算机学、俄语、英语等学科的竞赛活动，在相应的国际各学科竞赛活动中，我国都取得了令世人瞩目的优异成绩，充分显示了中华民族的勤劳、智慧、也证明了改革开放后的我国基础教育在国际上是处于领先地位的。各学科竞赛活动的深入发展，也强有力地推动了课堂的学科教学，培养了大批有个性有天赋的中华学子。奥林匹克竞赛活动在40多年的历史中，形成了自己特有的人才培养模式；形成了自己特有的教材、辅导书系列；形成了一套完整的竞赛考试、评估机制。这对改变我国目前基础教育教材版本单一，人才培养模式单调，千军万马挤“普高”独木桥的状况，应该说具有很大积极意义。

奥林匹克教材及辅导图书相对于现行中学教材而言，最大的优势就在于它承认并适应学生的个体差异，在培养个人特长，开发个人潜能，造就拔尖人才方面具有独特的功能。

本书在内容编写上的主要特点有:

1、本书对近年奥林匹克竞赛活动具有集成性。这里所说的集成性含义有二：一是指书中收集到的例题、习题是近几年国内外竞赛和中高考优秀试题；二是指书中对的年奥赛解题思路、方法进行了总结归纳，具有全新的解题方略。

2、恰当处理奥赛和课内学习的关系。本书章节结构的设置既遵循奥赛的规则，同时又参照了中小学教学大纲和现行教材。从内容上讲既能保证学生在各级奥赛中取得好名次；同时又能对应课堂教学，从知识和能力的层面

上强化课内学习，帮助考生在中高考中取得优异成绩。

3、正确处理知识积累与能力培养、打好基础与研究难题的关系。知识的占有是能力形成的基础，掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。只有打好坚实的基础，才会具有研究难题，探究未知的能力。书中设计了一些“难题”。“难题”不同于“怪题”、“偏题”，“怪题”、“偏题”不可取。对“难题”则应下功夫研究。所谓“难题”有两种：一种是综合性强的题，另一种是与实际联系比较密切的题。解析综合性强的题需要使用多个概念、规律，需要把学过的知识有机地联系在一起，有时还需要用到其他学科的知识进行整合。解析联系实际的题需要分析研究实际问题，从大量事实中找出事物所遵循的规律，光靠对知识的死记硬背是不行的。对于这两种“难题”，必须下功夫研究，这种不间断的研究、探究，并持之以恒，就一定会形成学科特长，就一定会在不远的将来成长为拔尖人才。

本丛书含数、理、化、语文、英语、生物学、信息学（计算机）七科，跨小学、初中、高中三个阶段，共40册。

本丛书由师达总体策划并担任丛书主编，由刘汉文、周向霖、金新担任学科主编，由北京、浙江、江苏、湖北重点中小学的特级、高级老师编写，尤其是湖北黄冈市教研室的著名老师们的加盟，更使本丛书增辉。《新概念学科竞赛与题解方略》将帮助每一位学生、家长、老师实现心目中的理想与渴望，我们衷心祝愿每一位朋友成功。

书中难免有一些缺憾，望广大师生及学生家长指正，以便再版时订正。

好学生终于有了训练本

·本·书·特·色·

着眼于课本　落脚于奥赛

把握基础知识　培养创新能力

解题层层递进　另辟提高蹊径

好学生不能不读的训练本

目　录

第一讲　平面几何(一)

欧几里德平面几何是数学领域中一门最古老、最富有生命力的学科，两千多年来人类对她始终保持着极大的兴趣，数学奥林匹克有史以来，几何问题一直作为一大主要题型被各级数学竞赛所广泛采用。这里，仅就竞赛中经常涉及的一些重点内容与方法加以讨论.

1.1　三角形的五心

三角形的五心是指三角形的重心、外心、内心、垂心、旁心，它们是三角形中重要的点，解决与五心有关的几何问题经常用到下面的性质.

1．重心

设 G 是 $\triangle ABC$ 重心，AG 的延长线交 BC 于 D，则有

(1) $BD=DC$；　(2) $AD^2=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$；

(3) $AG:AD=2:3$；　(4) $S_{\triangle GBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

2．外心

设 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的半径为 R，则有：

(1) $OA=OB=OC$；(2) $\angle BOC=2\angle A$；(3) $S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}$.

3．内心

设 $\odot I$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，半径为 r，切边 AB 于 P，AI 的延长线交外接圆于 D，则有：

(1) $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$;

(2) $AP = r\text{ctg}\,\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b + c - a)$;

(3) $DB = DI = DC$;

(4) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a + b + c)\cdot r$.

4. 垂心

设$\triangle ABC$三条高线AD, BE, CF交于H,则有:

(1) B、C、E、F四点共圆;

(2) $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$;

(3) $AB\cdot CF = AC\cdot BE = AD\cdot BC$;

(4)(欧拉定理)O, G, H三点共线.

且$OG:GH = 1:2$,其中O, G分别为$\triangle ABC$的外心和重心.

5. 旁心

三角形一条内角平分线与另两个内角的外角平分线相交于一点,是旁切圆的圆心,称为旁心. 设$\triangle ABC$在$\angle A$内的旁心为I_1,切AB的延长线于P_1,半径为r_1,则有:

(1) $\angle BI_1C = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$;

(2) $AP_1 = r_1\cot\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c)$;

(3) $\angle AI_1B = \frac{1}{2}\angle C$;

(4) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(b + c - a)r_1$.

【典型范例】

●例 1 若$\triangle ABC$的外接圆和内切圆的半径分别为R和r, I为$\triangle ABC$的内心, AI的延长线交外接圆于D,则$AI\cdot ID = 2Rr$.

思路分析 由内心性质$BD = ID$,于是转证$AI\cdot BD = 2Rr$,

即$\dfrac{AI}{r}=\dfrac{BD}{2R}$,设法构造两三角形相似,使 AI 和 BD,r 和 $2R$ 分别成为对应边.

证明　如图 1-1,作$\triangle ABC$ 的外接圆 O 的直径 DE,连结 BD,BE,则$\angle EBD=90°$,设内切圆 I 切 AC 于 F,连结 IF,则 $IF\perp AB$,又因$\angle E=\angle 1$,

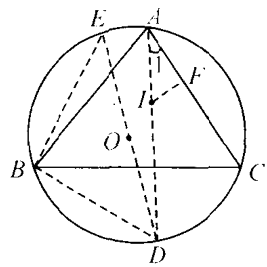


图 1-1

所以$\triangle AIF\backsim\triangle EDB$,

$AI\cdot BD=DE\cdot IF=2Rr.$　　(1)

连结 BI,因 I 为内心,所以

$$\begin{aligned}\angle BID&=\angle BAD+\angle ABI\\&=\angle 1+\angle IBC\\&=\angle DBC+\angle IBC=\angle IBD.\end{aligned}$$

$\therefore\quad BD=ID.$

代入(1),得　$AI\cdot ID=2Rr.$

说明　从题目的结论出发,容易得到著名的欧拉公式:$OI^2=R^2-2Rr$. 它有一个简单的推论:三角形内切圆半径不超过外接圆半径之半.

●**例 2**　设 G 为$\triangle ABC$ 重心,M 是平面上任意一点,求证:$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$.

思路分析　如图 1-2,不妨设 M 点在$\triangle ABC$ 内部. $\triangle ADM$ 中,$AG:GD=2:1$,可用余弦定理建立 MG 和 AM,DM,AG,DG 的关系,再在$\triangle BMC$ 中,利用中线长公式可得 MD 和 MB,MC,BD 的关系,从而可使结论获得证明.

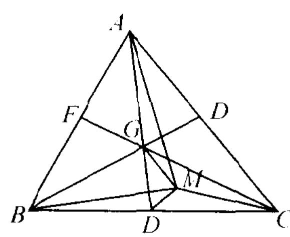


图 1-2

证明　设$\triangle ABC$ 三条中线分别为 AD,BE,CF,

在$\triangle ADM$中，$AM^2=AG^2+GM^2-2AG\cdot GM\cos\angle AGM$，

$DM^2=DG^2+GM^2+2DG\cdot GM\cos\angle AGM$.

又$DG=\frac{1}{3}AD$，$GA=\frac{2}{3}AD$，代入上两式化简

有 $$MG^2=\frac{1}{3}MA^2+\frac{2}{3}MD^2-\frac{2}{9}AD^2. \quad (1)$$

在$\triangle MBC$中，由中线长公式，得

$$MD^2=\frac{1}{2}(MB^2+MC^2)-\frac{1}{4}BC^2. \quad (2)$$

又$AD^2=9GD^2$，在$\triangle GBC$中，

$$GD^2=\frac{1}{2}(GB^2+GC^2)-\frac{1}{4}BC^2. \quad (3)$$

(2)(3)代入(1)式，得

$$\begin{aligned}3MG^2&=MA^2+MB^2+MC^2-(GB^2+GC^2)-4GD^2\\&=MA^2+MB^2+MC^2-GB^2-GC^2-GA^2.\end{aligned}$$

$\therefore \quad MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$.

说明 从上式可以看出，当M不同于重心G时，有$MA^2+MB^2+MC^2>GA^2+GB^2+GC^2$，这就是说，到三角形三顶点的距离的平方和为最小的点是三角形的重心.

●**例3** (2001年，全国联赛)如图1-3，$\triangle ABC$中，O为外心，三条高AD、BE、CF交于点H，直线ED和AB交于点M，FD和AC交于点N.

求证：(1)$OB\perp DF$，$OC\perp DE$；

(2)$OH\perp MN$.

思路分析 (1)中两结论对等，只需证明$OB\perp DF$，即可，为证$OH\perp MN$可利用关于垂线的一个事实：

D为$\triangle ABC$边BC上的点，E为

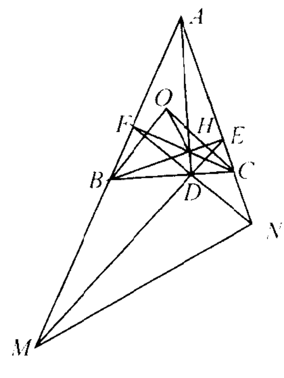
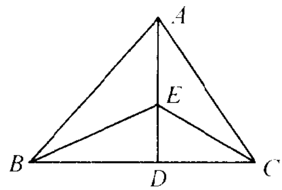


图1-3

AD 上的点,则 $AD\perp BC \Leftrightarrow BA^2-BE^2=CA^2-CE^2$.



证明　(1)$\because A,C,D,F$ 四点共圆,

$\therefore\ \angle BDF=\angle BAC$.

又$\because$ $\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)$

$=90^\circ-\angle BAC$

$\therefore\ OB\perp DF$,同理 $OC\perp DE$.

(2)$\because\ CF\perp MA$

$\therefore\ MC^2-MH^2=AC^2-AH^2$.　①

$\because\ BE\perp NA$,

$\therefore\ NB^2-NH^2=AB^2-AH^2$.　②

$\because\ DA\perp BC$,

$\therefore\ BD^2-CD^2=BA^2-AC^2$.　③

$\because\ OB\perp DF$,

$\therefore\ BN^2-BD^2=ON^2-OD^2$.　④

$\because\ OC\perp DE$,

$\therefore\ CM^2-CD^2=OM^2-OD^2$.　⑤

①－②＋③＋④－⑤,得

$NH^2-MH^2=ON^2-OM^2$.

$MO^2-MH^2=NO^2-NH^2$.

所以 $OH\perp MN$.

说明　(1)充分利用垂直的条件,找出基本图形是解决问题的关键.

(2)本题(2)也可用向量法、解析法、三角法,读者不妨一试.

●**例 4**　I,O 分别是$\triangle ABC$ 的外心和内心,AD 是 BC 边上的高,I 在线段 OD 上,求证:$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

思路分析 结论要证明外接圆半径与旁切圆半径相等,而与旁切圆半径相关的问题主要是通过面积和计算的手段加以解决.

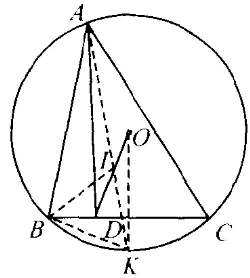


图 1-4

证明 如图 1-4,记 $AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,设 AI 的延长线交$\triangle ABC$ 的外接圆O 于K 点,则 $OK\perp BC$,所以 $OK/\!/AD$,从而 $\dfrac{AI}{IK}=\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AD}{K}=\dfrac{C\sin B}{K}=2\sin B\sin C$.

又$\angle ABI=\angle IBC=\dfrac{B}{2}$,$\angle CBK=\angle CAK=\dfrac{A}{2}$,

$\angle AKB=\angle C$,$\angle BAK=\dfrac{A}{2}$,所以,

$$\frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{AB\sin\frac{B}{2}}{BK\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{AB}{BK}\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

于是,$2\sin B\sin C=\dfrac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$$\therefore\quad 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1.$$

设$\triangle ABC$ 的BC 边上的旁切圆半径为 r_a,则

$$\frac{1}{2}r_a(b+c-a)=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A,\ r_a=\frac{bc\sin A}{b+c-a},$$

$$\therefore\quad r_a=\frac{2K\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

$$=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=2r\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{R}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=R.$$

说明　利用几何量中的度量关系把要证明的结果直接算出来,是几何证题中的一种重要方法.

●例 5　在锐角$\triangle ABC$中,$\angle A=60^\circ$, H,I,O分别为其垂心,内心,外心,且$BH=OI$,求$\angle B$和$\angle C$的度数.

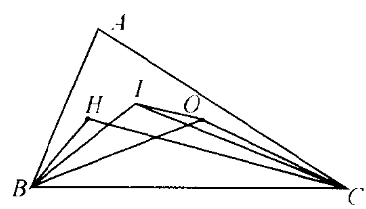


图 1-5

思路分析　注意到B,H,I,O,C五点共圆,$BH=OI$的条件,可转化为$\angle B$和$\angle C$的等量关系,然后解方程组即可求出$\angle B$和$\angle C$.

解　如图 1-5 中,$\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C=120^\circ$,

$\angle BHC=180^\circ-(90^\circ-\angle C)-(90^\circ-\angle B)=120^\circ$,

$\angle BOC=2\angle BAC=120^\circ$,

$\therefore\quad B,H,I,O,C$共圆.

而$BH=OI$,　$\therefore \angle BCH=\angle OCI$.

$\therefore\quad 90^\circ-\angle B=\left|\frac{180^\circ-120^\circ}{2}-\frac{1}{2}\angle C\right|$

又　$\angle B+\angle C=120^\circ$,

$\therefore \quad \angle B=80^\circ, \angle C=40^\circ$.

说明 (1)方程的思想在几何量的计算中经常用到.

(2)在较为复杂的平面几何题中,若能引入适当的辅助圆,往往带来意想不到的效果.

【练习 1.1】

1. 已知 H 是$\triangle ABC$ 的垂心,且 $AH=BC$,试求$\angle A$ 的度数.

2. 设$\triangle ABC$ 中,O 为外心,H 为垂心,D 是 BC 中点. 求证:$OD=\frac{1}{2}AH$.

3. 设 P 为$\triangle ABC$ 所在平面上一点,过 P 向$\triangle ABC$ 三边作垂线,垂足为 A_1、B_1、C_1,设$\triangle ABC$ 的外心为 O,外接圆半径为 R,$OP=d$.

求证:$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{|R^2-d^2|}{4R^2}S_{\triangle ABC}$.

4. 四边形 $ABCD$ 内接于圆, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ 的内心依次记为 I_A, I_B, I_C, I_D. 试证明:$I_AI_BI_CI_D$ 是矩形.

5. 设 H 是锐角$\triangle ABC$ 的垂心,R 和 r 分别是其外接圆和内切圆半径,则 $AH+BH+CH=2(R+r)$.

6. 在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=30^\circ$,O 是外心,I 是内心,边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E 使得 $AD=BE=AB$. 求证:$OI\perp DE$,且 $OI=DE$.

7. 设 a、b、c 为$\triangle ABC$ 三边的长,R 为外接圆半径,O、H 分别为$\triangle ABC$ 的外心和垂心. 求证:$OH^2=9R^2-a^2-b^2-c^2$.

8. 设 G、I 分别是$\triangle ABC$ 的重心和内心,且 $CI\perp GI$,又 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,求证:$\frac{a+b+c}{3}=\frac{2ab}{a+b}$.

9. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，H_1,H_2,H_3,H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4,\triangle A_3A_4A_1,\triangle A_4A_1A_2,\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证：H_1,H_2,H_3,H_4 四点在同一个圆上，并定出该圆的圆心位置.

10. 设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的任一内点，r_1、r_2、r 分别是 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径；q_1、q_2、q 分别是这些三角形的在 $\angle ACM$、$\angle BCM$、$\angle ACB$ 内的旁切圆半径. 试证：$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

1.2　共线点与共点线

一、共线点问题一般都转化为三点共线问题.

证明　A,B,C 三点共线有以下方法：

(1)如图 1-6，设 B 在线段 DE 上，证明 $\angle ABD+\angle CBD=180^\circ$，或 $\angle ABD=\angle CBE$；而在图 1-7 中应证明 $\angle ABD=\angle CBD$.

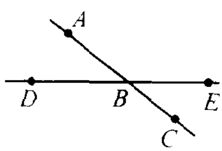


图 1-6

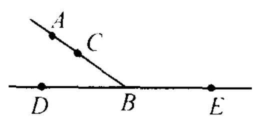


图 1-7

(2)证明 $AB+BC=AC$.

(3)证明由 AB、BC、AC 围成图形的面积 $S_{\triangle ABC}=0$.

(4)利用梅涅劳斯(Menelaus)定理.

设 X,Y,Z 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC,CA,AB 边或其延长线上的点，则 X,Y,Z 三点共线的充要条件是 $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$.

二、证明几条直线共点，常用的方法有：

(1)设其中两条直线相交于点 A，然后证明 A 在其他直线上，即化为证明 A 与其他任一条直线上的两点共线.

(2)证明各条直线都经过某个特殊点.

(3)利用塞瓦(Ceva)定理，即

设 X，Y，Z 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC，CA，AB 边或其延长线上的点，且有偶数个点在边延长线上，则 AX，BY，CZ 三线共点或互相平行的充要条件是 $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$.

【典型范例】

●**例 1** 从三角形 ABC 的外接圆上任意一点 P 向 BC，CA，AB 或它们的延长线引垂线，垂足分别为 D，E，F，则 D，E，F 三点共线.

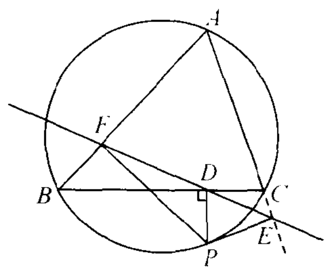


图 1-8

思路分析 欲证 D，E，F 三点共线，可证 $\angle FDP+\angle EDP=180^\circ$，即证 $\angle FDB+\angle PDE=90^\circ$.

证明 如图 1-8，由于 B，P，D，F 和 D，P，E，C 均四点共圆，

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle FDB &= \angle FPB = 90^\circ-\angle FBP = 90^\circ-\angle PCE\\ &= 90^\circ-\angle PDE.\end{aligned}$$

$\therefore\quad \angle FDB+\angle PDE=90^\circ$.

即 $\angle FDP+\angle PDE=180^\circ$.

$\therefore\quad D$，E，F 三点共线.

说明 (1)所证命题叫西姆松(Simson)定理，直线 DEF 叫做 $\triangle ABC$ 的关于 P 点的西姆松线.

(2)西姆松定理的逆定理也成立，请读者自己完成证明.