

高等数学习题集

周润泽 邵鸿飞 旋俊雄

北京航空航天大学出版社

高等数学习题集

周润泽、邵鸿飞、旋俊雄

北京航空航天大学出版社

(京)新登字166号

内 容 简 介

本习题集是按照高等工科院校数学指导委员会提出的“高等数学课程教学基本要求(参考学时190~210)”编写的。全书分习题、答案及附录三部分。习题内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分学、空间解析几何、多元函数微积分学、级数及微分方程。

本书对工科院校、函授大学和业余大学的工科学生及自学者均适用。

高 等 数 学 习 题 集

GAODENG SHUXUE XITIJI

周润泽 邵鸿飞 旋俊雄

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京密云华都印刷厂印装

*

787×1092 1/32 印张: 9.5 字数: 221千字

1992年8月第一版 1992年8月第一次印刷 印数: 15000册

ISBN 7-81012-312-2/O·020 定价: 4.10元

前 言

本习题集是按照高等工科院校数学指导委员会提出的“高等数学课程教学基本要求(参考学时190~210)”编写的。由周润泽、邵鸿飞、吴凤英、廖品熙、文益民、陈凭和旋俊雄参加并由周润泽进行总的编选,于1988年完成初稿,对初稿进行了两年试用后,在1991年又由周润泽、邵鸿飞、旋俊雄对本习题集进行了重新修订。这次出版的习题集改正了原稿中的错误,增删了部分题目,并增加了一个附录。

全书分习题集、答案及附录三部分。习题部分包括函数、极限、连续、一元函数微积分学、空间解析几何、多元函数微积分学、级数及微分方程。除有巩固性的基本运算题外,在理论证明题方面有所加强,也有意选择了一部分综合性的习题,以利于对教学基本内容的掌握;以利于培养独立思考能力和掌握解题的技巧。本书对工科院校、函授大学、业余大学的工科学生及自学者均适用。

限于水平,错误之处,敬请读者批评指正。

编者 1991.4.

目 录

前 言

第一章	函数及其图形	(1)
第二章	数列的极限及函数的极限	(14)
第三章	函数的连续性	(25)
第四章	导数及微分	(29)
第五章	中值定理	(39)
第六章	导数的应用	(44)
第七章	不定积分	(52)
第八章	定积分	(62)
第九章	定积分的应用	(76)
第十章	矢量代数与空间解析几何	(81)
第十一章	多元函数的微分法及其应用	(94)
第十二章	重积分	(110)
第十三章	曲线积分与曲面积分	(125)
第十四章	级 数	(141)
第十五章	微分方程	(155)
答 案		(167)
附 录		(262)

第一章 函数及其图形

(一) 建立函数关系

1. 设直角三角形的斜边长 $c = 5$, 直角边的长为 a 和 b , 试求 a 与 b 的依从关系式。

2. 有直径为 d 的圆木一根, 今欲做成断面为矩形之梁 (图1-1), 试求:

(1) 矩形长 x 和宽 y 之间的函数关系;

(2) 矩形面积 z 与长 x 的关系;

(3) 求上述两函数的定义域。

3. 底 $AC = b$, 高 $BD = h$ 的三角形 ABC 中 (如图1-2), 内接矩形 $KLMN$, 记其高为 x , 将矩形之周长 l 和其面积 S 表

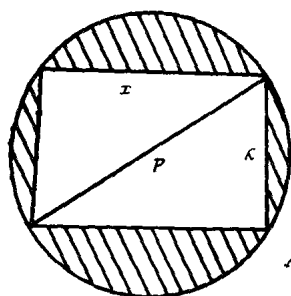


图 1-1

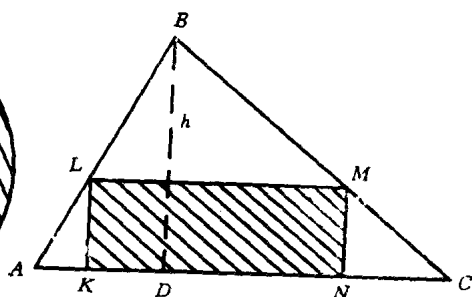


图 1-2

示成 x 的函数。

4. 水渠的横断面为等腰梯形(如图1-3), 斜角 $\varphi = 40^\circ$, 梯形 $ABCD$ 叫做过水断面, $L = AB + BC + CD$ 叫水渠的湿周, 当过水断面的面积为定值 s_0 时, 求湿周 L 与水深 h 的函数关系。

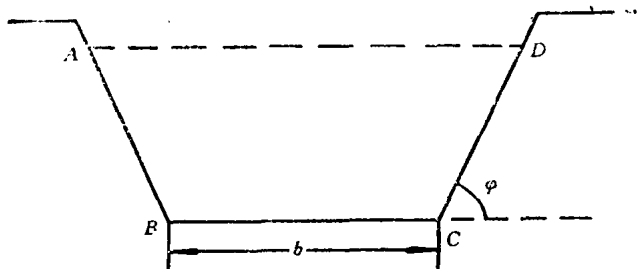


图 1-3

5. 脉冲发生器产生一个角波, 其波形如图(1-4)所示。写出电压 V 与时间 t 的函数关系($0 \leq t \leq 20$)。

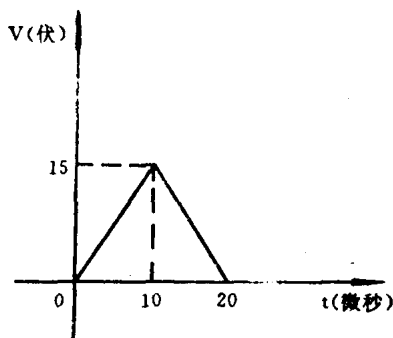


图 1-4

6. 有三个矩形，其高分别等于3米、2米、1米，而底皆为1米，彼此相距一米放着（如图1-5），假定 x （ $-\infty < x < +\infty$ ）连续变动（即直线 AB 连续地平移动），试将阴影部份的面积 S 表示为 x 的函数。

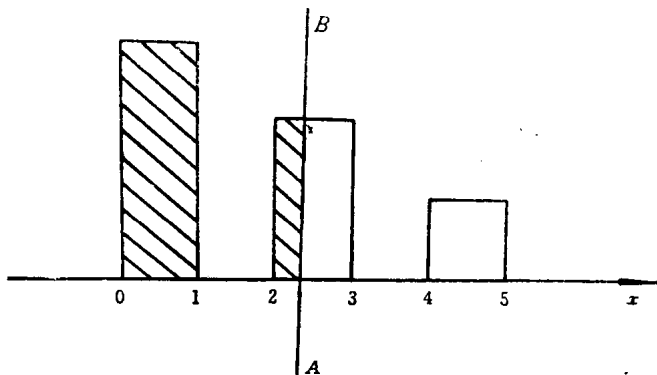


图 1-5

（二）函数值求法

7. 若 $\varphi(x) = 2^{x-2}$ ，求 $\varphi(2)$ 、 $\varphi(-2)$ 、 $\varphi(0)$ 、 $\varphi\left(\frac{5}{2}\right)$ 。

8. 已知 $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ ； $\varphi(x) = x^2 - 1$ 。求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、

$f(-2)$ 、 $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$ 、 $\varphi(a+1)$ 、 $2\varphi(2a)$ 。

9. 已知 $f(t) = ta^t$ 。求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(-1)$ 、 $f\left(\frac{1}{a}\right)$ 。

$f(-a)$ 、 $f(a)$ 。

10. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x < 0, \\ 0, & x=0, \\ 1-x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

求 $f(-2)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(2)$

11. 已知 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$

求 $\varphi(0)$ 、 $\varphi(1)$ 、 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\varphi(-\pi)$ 、 $\varphi(\pi)$ 。

12. 已知 $F(t) = t^2 + 1$ 。求 $F(t^2)$ 、 $F(t-1)$ 、 $[F(t)]^2$ 。

13. 已知 $f(x) = x^2$ 、 $\varphi(x) = 3^x$ 。求 $f[\varphi(x)]$ 、 $\varphi[f(x)]$ 、 $f[f(x)]$ 、 $\varphi[\varphi(x)]$ 、 $f[\varphi(0)]$ 、 $\varphi[f(1)]$ 。

14. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 。求 $f[f(x)]$ 、 $f\{f[f(x)]\}$ 、

$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ 。

15. 设 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ ，求 $f[f(x)]$ 。

16. 设 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ ，求 $f(x)$ 。

17. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，求 $f(x)$ 。

18. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$)，求 $f(x)$ 。

19. 设 $f(x) = \operatorname{tg} x$ ， $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ，

$h(x) = \sqrt{1 - \arccos x}$ ，求 $g(h(g(f(x))))$ 。

$$20. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases} \quad \text{求 } f[f(x)], \varphi[\varphi(x)], \\ f[\varphi(x)], \varphi[f(x)].$$

$$21. \text{ 设 } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ 求 } f_n(x) = \underbrace{f\{\dots f[f(x)]\dots\}}_{n\text{次}}.$$

$$22. \text{ 已知 } f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}), \text{ 求证 } f(x+y) + \\ f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

(三) 求函数的定义域

23. 求下列各函数的定义域

$$(1) y = \arcsin \frac{x-2}{3}; \quad (2) y = \ln\left(\sin \frac{\pi}{x}\right);$$

$$(3) y = \frac{\ln|x-1|}{\sqrt{2x+1}}; \quad (4) y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}.$$

24. 求下列各函数的定义域

$$(1) y = (x - |x|) \sqrt{-\sin^2 \pi x};$$

$$(2) y = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \log_a(2x-3), \quad (a > 1);$$

$$(3) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2};$$

$$(4) y = \log_2(\log_2 x).$$

25. 求下列各函数的定义域

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}; \quad (2) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}};$$

$$(3) y = \lg(2 + x - x^2);$$

$$(4) y = \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}};$$

$$(5) y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 1} + \sqrt{1 + x^2}.$$

(四) 函数性质讨论

26. 判断下列函数中, 哪些是奇函数、哪些是偶函数、哪些是非奇非偶函数? (各题中 $a > 1$)

$$(1) y = 5; \quad (2) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2};$$

$$(3) y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}; \quad (4) y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1};$$

$$(5) y = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}; \quad (6) y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$(7) y = 3 + 2\cos x; \quad (8) y = x \sin \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \sin x \cos x;$$

$$(10) y = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & \text{当 } \frac{1}{2} < x < +\infty, \\ \sin x^2, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}x^2, & -\infty < x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

27. 设 $f(x)$ 为定义在区间 $(-a, a)$ 内的任何函数, 试证: $F(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数。

28. 试证:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数和奇函数的乘积是奇函数。

29. 试证明任意一个定义在 $(-a, a)$ 上的函数, 总可以表为一个奇函数与一个偶函数之和。

30. 下列各函数中, 哪些是周期函数? 对于周期函数指出其周期。

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = \sin x^2$;

(3) $y = 4$; (4) $y = |\sin x|$;

(5) $y = a \sin(\omega x + \varphi)$ 。

31. 设函数 $y = f(x)$ 是周期函数, 其周期为 T , 试证明:

$f(ax)$, ($a > 0$) 也是周期函数而且其周期为 $\frac{T}{a}$ 。

32. 验证下列函数在所给区间内是单调增加的函数。

(1) $y = 2^{x-1}$, $(0, +\infty)$;

$$(2) y = \lg x + x, (0, +\infty);$$

$$(3) y = \sin x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]。$$

33. 验证下列函数在所给区间内是单调减少的函数。

$$(1) y = x^2, (-\infty, 0];$$

$$(2) y = \cos x, [0, \pi];$$

$$(3) y = 2^{-x}, (-\infty, +\infty)。$$

34. 建立下列各函数的反函数。

$$(1) y = 10^x - 1; \quad (2) y = 1 + 2\sin \frac{x-1}{x+1};$$

$$(3) y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}); (a \neq 1, a > 0)$$

$$(4) y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} + 1;$$

$$(5) y = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

35. 验证: 函数 $f(x) = \frac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数就是它本身。

(五) 函数的图形

36. 作出下列各函数的图形

$$(1) y = |x|; \quad (2) y = -|x-2|;$$

$$(3) y = \frac{1}{x^2}; \quad (4) y = |x^2 - 1|;$$

$$(5) y = 1 - \cos x; \quad (6) y = |\sin x|。$$

37. 作出下列各函数的图形

$$(1) y = \sqrt{1-x^2}; \quad (2) y = -\sqrt{1-x^2};$$

$$(3) y = 1 + \sqrt{1-x^2}; \quad (4) y = \sqrt{2x-x^2};$$

$$(5) x = -\sqrt{1-y^2}。$$

38. 利用 $y = \frac{1}{x}$ 的图形作出下列各函数图形。

$$(1) y = \frac{1}{x+1}; \quad (2) y = \frac{1}{x} - 1;$$

$$(3) y = \frac{x+2}{x+1}。$$

39. 作出下列各函数的图形

$$(1) y = \ln x; \quad (2) y = \ln |x|;$$

$$(3) y = |\ln x|。$$

40. 利用 $y = 2^x$ 的图形画出下列各函数的图形

$$(1) y = 2^x + 1; \quad (2) y = 3 \cdot 2^x;$$

$$(3) y = 2^{2x}。$$

41. 利用 $y = \sin x$ 的图形画出下列各函数的图形

$$(1) y = \sin 2x \quad (2) y = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$(3) y = \frac{1}{2} \sin x + 1; \quad (4) y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)。$$

42. 用迭加法作出下列各函数的图形

$$(1) y = x + \sin x; \quad (2) y = \sin x + \cos x;$$

$$(3) y = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x}); \quad (4) y = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}).$$

43. 画出 $y = \begin{cases} |x-1|, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & x > 2 \text{ 或 } x < 0 \end{cases}$ 的图形。

44. 已知 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T=2$, 且有

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad \text{试在 } (-\infty, +\infty) \text{ 内绘出 } y = f(x)$$

的图形。

45. 作出函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{当 } 0 < |x| \leq 1, \\ \sqrt{2-x^2}, & 1 < |x| \leq \sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2-2}, & \sqrt{2} < |x| \end{cases}$ 。

的图形, 并求定义域。

46. 若已知 $f(x)$, $g(x)$ 的图形, 试作函数 $y =$

$$\frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$
 的图形, 并说明 y 的图

形与 $f(x), g(x)$ 的图形之间的关系。

47. 作出下列函数的图形

(1) $|x| + |y| = 1;$

(2) $y = |x-1| + \frac{1}{2}|x-2|。$

48. 根据下列图形写出函数的解析表达式

(1)

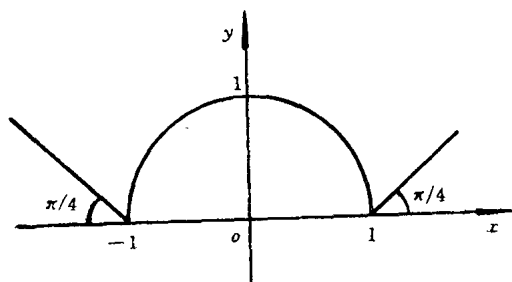


图 1-6

(2)

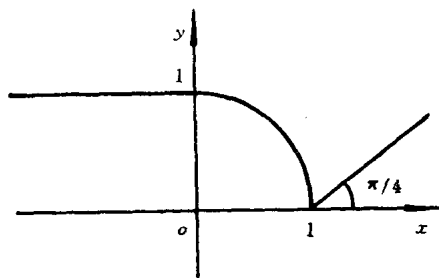


图 1-7

49. 设函数 $H = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0, \\ 1, & \text{当 } x \geq 0. \end{cases}$

试将 $f(x) = H(x) - H(x-1)$ 表示成分段函数并作图。

50. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 用下面方法来定义:

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 作出这个函数的图形, 并证明:

$|x| = x \operatorname{sgn} x$ 。

51. 函数 $y = [x]$, (数 x 的整数部分), 用下面方法定义:

若 $x = n + r$, 其中 n 为整数, 且 $0 \leq r < 1$, 则 $[x] = n$, 作出这个函数的图形。

52. 设 $y = \pi(x)$, ($x \geq 0$) 表示不超过数 x 的素数的数目, 对于自变量取 $0 \leq x \leq 20$ 的值, 作出这个函数的图形。

(六) 双曲函数及复合函数

53. 验证下列关系式:

$$(1) \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad (2) \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x;$$

$$(3) \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$(4) \operatorname{sh}(a \pm \beta) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} a \operatorname{sh} \beta.$$

$$(5) \operatorname{ch}(a \pm \beta) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} \beta;$$

$$(6) 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (7) 1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$(8) \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x; \quad (9) \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

54. 将下列各函数表成 y 是 x 的函数:

$$(1) y = u^2, \quad u = x + 1;$$

$$(2) y = \sqrt{u^3 + 1}, \quad u = \operatorname{tg} x;$$

$$(3) y = \sin u, \quad u = \ln v, \quad v = \sqrt{1 + x^2}.$$

$$(4) y = 1 + u, \quad u = \cos v, \quad v = \sqrt{1 - x^2}.$$

55. 指出下列函数是如何复合而成的:

$$(1) y = \sin^2 x; \quad (2) y = \sin x^2;$$

$$(3) y = \sin^2 6x; \quad (4) y = \sqrt{1 - x^2};$$

$$(5) y = \sqrt{\cos x^2}; \quad (6) y = \sqrt[3]{(1 + x)^2};$$