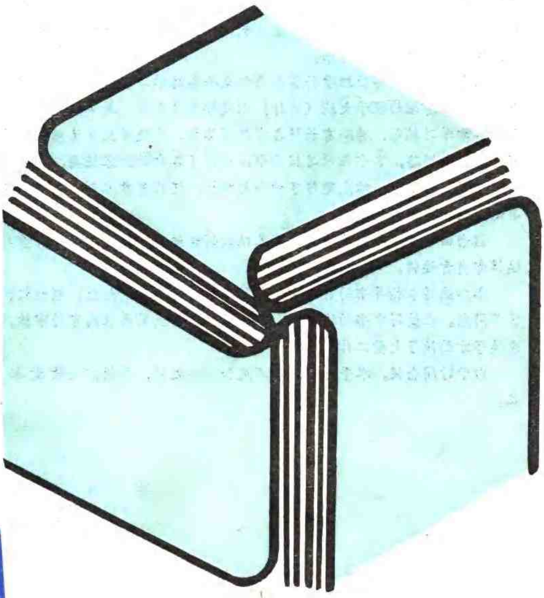
经济应用数学基础学习指导书

九二级学生用书（一）

中央电大经济应用数学基础编写组撰



中央广播电视大学出版社

94
F224.0
26
2

目　　录

北京图书馆藏
991421
3 0116 4467 5

《经济应用数学基础》教学大纲（试行）

经济应用数学基础，包括一元函数微积分与线性代数（含投入产出模型），作为广播电视大学经济类各专业的公共必修基础课。总共90学时、播出81学时。

一、教学目的与任务

为加速实现四个现代化，为适应经济计划和经济管理对数学方法的需要，本课程介绍一元函数微积分与线性代数的基本概念、基本理论和基本计算方法。培养学生的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力，提高学生运用变量数学方法分析和处理经济现象中数量关系的能力，为学习后继课和在经济计划与经济管理中运用数学方法打下良好基础。

二、教学内容与要求

第一篇　一元函数微积分

(一)函数

1. 内容：常量与变量、函数概念、经济现象中的常见函数举例、函数的几个性质、反函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、初等函数作图法举例。

2. 要求：理解函数概念；了解反函数、复合函数和初等函数的定义；了解函数的主要性质；掌握基本初等函数及其性质、图形；对简单的应用问题，特别是常见的经济应用题，要求会建立函数关系式。

(二)极限与连续

1. 内容：极限概念及性质、无穷小量与无穷大量的概念及两者的关系、无穷小与有极限变量的关系、极限的四则运算、极限存在准则与两个重要极限、函数的连续性及连续函数的性质。

2. 要求：了解极限（包括左、右极限）与无穷小量及函数连续的概念；知道无穷小阶的比较和闭区间上连续函数的性质；熟练掌握极限的运算法则和两个重要极限，以及各种求极限的方法。

(三)导数与微分

1. 内容：导数概念、导数的基本公式、导数的四则运算法则、复合函数与反函数及隐函数的求导法则、函数弹性、高阶导数、微分概念及运算法则、导数及微分的简单应用。

2. 要求：理解导数概念，了解微分概念及其与导数的关系，以及函数连续与可导的关系；知道导数与微分的几何意义；牢记导数的基本公式与运算法则，熟练掌握初等函数的求导方法，并会运用它们熟练求出复合函数、隐函数等的导数和微分；了解函数弹性在经济中的应用；掌握二阶导数的计算。

(四)中值定理与导数应用

1. 内容：微分中值定理（罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理）、罗必塔法则、函数的单调性与极值、曲线的凹凸性与拐点、微分方法作函数图形、最大值与最小值问题及其在经济分析中的应用。

2. 要求：知道罗尔定理及拉格朗日中值定理的条件与结论，并会简单应用；掌握用罗必塔法则求$\frac{0}{0}$型与$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限的方法；掌握函数的增减性与极值，以及曲线凹凸性与拐点的判别方法；会用微分方法作简单的初等函数图形，掌握求解导数在经济分析中的应用问题的方法。

(五)不定积分

1. 内容：原函数和不定积分的概念、不定积分的性质、基本积分公式、换元积分法和分部积分法、简单有理函数的积分、积分表使用简介。

2. 要求：理解原函数与不定积分概念；牢记不定积分的基本公式；掌握不定积分的性质，熟练掌握第一换元积分法与分部积分法，能熟练地求常见函数的积分，会求简单的有理函数的积分；知道积分的简单经济应用。

(六)定积分

1. 内容：定积分概念及基本性质、微积分基本公式、定积分的换元积分法与分部积分法、定积分的近似计算、用定积分求平面图形的面积与旋转体体积、定积分在经济问题中的应用、广义积分。

2. 要求：理解定积分的定义及性质；熟练掌握牛顿——莱布尼兹公式，理解其意义；熟练掌握定积分的第一换元积分法和分部积分法；掌握用定积分求解平面图形面积，会用定积分求简单经济应用问题；了解广义积分概念、会求简单的广义积分。

第二篇　线性代数

(含投入产出数学模型)

(一)行列式

1. 内容：二、三阶行列式定义及计算，n 阶行列式定义及性质；余子式与代数余子式概念，n 阶行列式按一行（列）展开定理；克莱姆法则。

2. 要求：了解行列式、余子式和代数余子式概念以及行列式的性质；熟练掌握行列式的两种计算方法；知道克莱姆法则的条件与结论。

(二)矩阵

1. 内容：矩阵定义、零矩阵、负矩阵；矩阵运算（相等、加法、减法、数乘矩阵、转置、矩阵乘法）及其规则；特殊矩阵（对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵、三角矩阵、对称与反对称矩阵、正交矩阵）；可逆矩阵、逆矩阵的定义及性质，求逆矩阵的伴随法及初等行变换法；分块矩阵的概念、作用及运算。

2. 要求：理解矩阵、可逆矩阵与伴随矩阵的概念；熟练掌握矩阵运算（加、减、数乘、乘法、转置）和求逆矩阵的方法；了解逆矩阵的主要性质；掌握对称矩阵、反对称矩阵及单位矩阵的概念和性质；知道矩阵的分块及运算。

(三)线性方程组

1. 内容：消元法解线性方程组及解的情况讨论；矩阵的初等变换、阶梯形矩阵、行简化阶梯形矩阵；向量的概念与运算、向量组的线性相关性、极大线性无关组及向量组的秩；矩阵的秩及其求法；线性方程组有解判别定理；齐次线性方程组有非零解的充要条件以及解的性质、基础解系、全部解；非齐次线性方程组解的性质及结构。

2. 要求：了解 n 维向量、向量的线性表出、线性组合、线性相关、线性无关、向量组的秩等概念；掌握用消元法化方程组为阶梯形方程组，讨论解的情况并求解；熟练掌握矩阵的初等行变换法，会求矩阵的秩；会判别向量组的线性相关与线性无关；了解基础解系概念，熟练掌握线性方程组有解判定定理和解的结构、全部解的表示方法。

(四) 矩阵特征值

1. 内容：矩阵特征值、特征向量的概念及求法，特征值和特征向量的基本性质。

2. 要求：了解特征值、特征多项式、特征方程、特征向量等概念，知道其性质。会求特征值、特征向量。

(五) 投入产出数学模型

1. 内容：价值型投入产出表的结构、模型的平衡方程；直接消耗系数的概念及其经济意义；完全消耗系数和完全需要系数的概念及其经济意义、三个系数的关系及计算方法；投入产出方法在计划工作中的应用举例。

2. 要求：了解投入产出表的结构，了解投入、产出、中间产品、最终产品、总产品等概念；了解三个系数的概念并掌握它们的关系及计算方法，了解其经济意义及主要性质；掌握投入产出模型的两类平衡方程表示形式和它们的求解方法，知道它们的某些应用。

三、学时分配

共 90 学时。各章学时分配如下：

第一篇(56 学时)：(一) 函数 (8 学时)、(二) 极限与连续 (10 学时)、(三) 导数与微分 (10 学时)、(四) 中值定理与导数应用 (10 学时)、(五) 不定积分 (7 学时)、(六) 定积分 (11 学时)。

第二篇 (34 学时)：(一) 行列式 (6 学时)、(二) 矩阵 (8 学时)、(三) 线性方程组 (12 学时)、(四) 矩阵特征值 (3 学时)、(五) 投入产出数学模型 (5 学时)。

各章学习辅导

第一篇　一元函数微积分

第一章　函　数

初等数学与高等数学的根本区别在于变量进入了数学。反映变量间相互依赖关系的函数是微积分的研究对象，也是微积分中重要的基本概念之一。

本章重点是函数概念及初等函数的复合关系、基本初等函数及其性质与图形，并熟悉常见的经济函数模型。

Ⅰ　内　容　提　要

一、基本概念

1. 常量与变量

讨论一个量是常量还是变量，应注意：

(1) 变量的相对性、与过程相关联。

(2) 找出变量的变化范围——变域。

2. 函数　设有非空实数集 D 和对应规律（法则）f，使得对于每一个 $x\in D$，按照对应规律 f，都有唯一的变量 y 与之对应，就称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y=f(x)$ 。x 是自变量，y 是因变量（函数），D 就是定义域，亦常记为 $D(f)$。对某一值 $x_0\in D$，对应值 $y_0=f(x_0)$，y_0 是 x_0 的函数值。全体函数值构成函数的值域。

3. 函数的主要性质

(1) 奇偶性　若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$f(x)$ 称为偶函数；若满足 $f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 称为奇函数。

(2) 单调性　任意 x_1、$x_2\in D(f)$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$，称 $f(x)$ 是单调增加（减少）的。

(3) 周期性　存在正数 a，使 $f(x+a)=f(x)$，称 $f(x)$ 为周期函数。满足此式的最小正数 a 为 $f(x)$ 的周期。

(4) 有界性　存在正数 M，对于所有 $x\in D(f)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 $D(f)$ 上有界。

4. 反函数　设函数 $y=f(x)$。由此式确定的 x 是 y 的函数 $x=\varphi(y)$ 就是函数 $y=f(x)$ 的反函数，常记为 $y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$。见例 1.5。

5. 复合函数　设 $y=f(u)(u\in D(f))$，$u=\varphi(x)$，$(x\in D(\varphi))$。当 $x\in D(\varphi)$ 时，若 $u=\varphi(x)$ 的值域落入 $D(f)$ 内，则 y 是 x 的函数，记为 $y=f(\varphi(x))$，称 y 是 x 的复合函数，u 是中间变量。

6. 基本初等函数　表 1.1.1 中的函数都是基本初等函数。

7. 初等函数　基本初等函数经过有限次四则运算和复合构成的函数叫做初等函数。

注意：分段函数不是初等函数。

二、基本方法

1. 函数表示方法

(1)公式法(解析法)

① 显函数：若 $y=f(x)$，则称 y 为 x 的显函数。

② 隐函数：因变量 y 与自变量 x 的函数关系用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示。称 y 为 x 的隐函数。

(2)表格法。

(3)图象法（图形法）。

(4)分段函数　用两个或两个以上的式子，分段表示一个函数，叫“分段函数”。如

$$y=f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

注意：它表示一个函数，而不是两个函数。

2. 函数定义域的确定方法　见例 1.2。

3. 建立函数关系的方法　见例 1.7–例 1.9。

4. 初等函数作图方法

三、常见的经济函数

1. 成本函数

(1)总成本函数　产量为 x 个单位的总成本函数 $C(x)$

$$C(x)=C_0+C_1x \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

其中：① C_0 是固定成本，指厂房、机械设备、…固定的资产费用，有 $C_0=C(0)$；② C_1 是单位产品的变动成本，指劳动力、原材料、动力、…的变动资本；③ a、b 是产量的最低、最高限度。

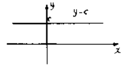
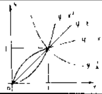
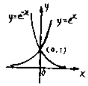
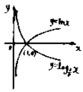
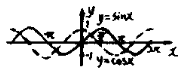
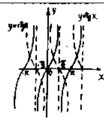
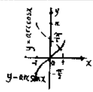
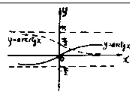
(2) 平均成本函数　产量为 x 的平均成本函数，记为 $A(x)$(或 $\overline{C}(x)$)，$A(x)=\dfrac{C(x)}{x}(=\overline{C}(x))$

2. 价格函数　价格 P 是销售量 x 的函数

$$P=P(x) \qquad (0<x\leqslant b)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

表 1.1.1　基本初等函数一览表

名称	表达式	定义域	简单性质	图　形
常量	$y=c$	$-\infty<x<+\infty$	图形是平行于 x 轴的直线，截距为 c	
幂函数	$y=x^{\alpha}$（α 为实数）	随 α 不同取值，定义域有所不同	当 $0<x<+\infty$ 时，图形过 (1，1) 点	
指数函数	$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$）	$-\infty<x<+\infty$	值域 $0<y<+\infty$，图形过(0,1)点。 $0<a<1$，是减函数 $a>1$，是增函数	
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）	$0<x<+\infty$	值域 $-\infty<y<+\infty$，图形过 (1，0) 点。 $0<a<1$，是减函数 $a>1$，是增函数	
三角函数	$y=\sin x$	$-\infty<x<+\infty$	$-1\leqslant y\leqslant 1$，以 2π 为周期。$\sin x$ 为奇函数，$\cos x$ 为偶函数。	
	$y=\cos x$			
	$y=\mathrm{tg}x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$	$-\infty<y<+\infty$，以 π 为周期，是奇函数	
	$y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$		
反三角函数	$y=\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，是增的奇函数	
	$y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$，是减函数	
	$y=\mathrm{arctg}x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$，是增的奇函数	
	$y=\mathrm{arcctg}x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$，是减函数	

$P>0$，b 是有限正实数。通常是减函数。

3. 需求函数　需求量 Q 是价格 P 的函数

$$Q=Q(P)\qquad(0<P\leqslant b)$$

$Q>0$，通常是减函数。

4. 供应函数　供应量 Q 是指生产单位供给市场的商品量，它是价格 P 的增函数

$$Q=Q(P)\qquad P>0,\quad Q>0$$

需求函数与供应函数均为价格的函数，但它们的变化趋势相反。

5. 总收入(收益)函数　当商品价格 P 不变时，总收入 R 是销售量 q 的增函数　$\mathrm{R}=\mathrm{R}(q)=Pq$

定义域：$0\leqslant q\leqslant b$　（b 为有限正实数）

6. 利润函数　总收入 R 去掉总成本 C，就是利

润函数 L，$L=L(q)=R(q)-C(q)=pq-(C_0+C_1q)$
其中 q 既是产量，也是销量。

7. 损益分歧点　利润为 0 的产量(销量)q_0，称为损益分歧点。

$$R(q)=C(q)\quad 即\quad Pq=C_0+C_1q$$

的解 q_0 就是损益分歧点。即收支平衡点($L(q_0)=0$)。

8. 库存函数(库存数学模型)

我们讨论的库存函数（库存数学模型）只限于需求量是确定的，不允许缺货的简单模型。对这种模型需做如下假设：

(1)若计划期为 T(一般以一年为计)，在计划期 T 内，对货物的需求量 Q 是确定的。

(2) 货物均匀地分批购进。在计划期 T 内分 n 批进货，每批的进货量为 $q=\frac{Q}{n}$，进货周期（两次进货间的时间间隔）为 $t_s=\frac{T}{n}$。

(3)每次(批)的订货费用为常数，记为 C_2，每件货物贮存单位时间的贮存费用也是常数，记为 C_1。

(4)货物均匀投放市场。一般地，货物先入库暂存，然后均匀提出。这时，库存货物量 $q(t)$的最大值就是每次的进货量 q，随时间的推移均匀降至零。一旦库存量为零，立即得到货物补充，而且进货瞬时完成。因此，货物的库存量 $q(t)$的图形如图 1.1.1。

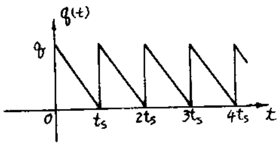


图 1.1.1

在以上条件下，有

总进货费用：$E_2=C_2n=C_2\frac{Q}{q}$

总贮存费用：$E_1=\bar{q}C_1T=\frac{1}{2}qC_1T$

$=\frac{1}{2}qC_1nt_s$

其中$\bar{q}$ 是平均库存货物量，$\bar{q}=\frac{1}{2}q$，这点从图 1.1.1 容易看出。图中三角形的面积$\frac{1}{2}qt_s$ 与 C_1 的乘积正好是一个进货周期内的贮存费用。一个计划期 T 内有 n 个进货周期，于是得总贮存费用公式。

总费用：总进货费用与总贮存费用之和就是总费用，用 E 表示

$$E=E_1+E_2=\frac{1}{2}qC_1T+C_2\frac{Q}{q}$$

$$=\frac{1}{2}qC_1nt_s+\frac{C_2Q}{q}$$

这就是库存函数或库存数学模型。

Ⅱ　例　题　分　析

一、函数概念

学习函数概念要着重理解以下几点：

1. 确定函数的关键是两个要素　定义域和对应规律。值域是它们派生的。若两个函数的定义域和对应规律分别相同，那么这两个函数就相同。而定义域或对应规律之一不相同，则这两个函数就不相同。

2. 函数的意义及符号使用　函数$f(x)$是一种对应规律，它把定义域的点（元素）对应到值域中去。如面粉单价是 0.57 元 / 公斤，定义域是面粉重量 x（单位：公斤），值域就是金额。对应规律f就是自变量的 0.57 倍，

$$x\xrightarrow{f(\ )=0.57(\ )}y(=0.57x)(元)$$

即f：$x\to 0.57x$。圆面积中的自变量 R 通过平方的 π 倍对应到面积值 s

$$R\xrightarrow{f(\ )=(\ )^2\pi}s\ (=R^2\pi)$$

即f：$R\to R^2\pi$。因此，函数 $y=f(x)$ 就是把自变量 x 放到对应规律的表达式中自变量位置运算的结果。见例 1.1。这里的自变量可以是具体数、表示数的字母或表达式，甚至是函数。有时简记为 $y=y(x)$，等式右边的 y 是对应规律。

3. 单值性　我们讨论的函数是单值函数。如 $y=\pm\sqrt{x}\,(x\geqslant 0)$ 是多值函数，即每一个 $x\in D(f)$，对应多个(两个)y 的值。这类多值函数，不是我们定义的函数。而 $y=\sqrt{x}\,(x\geqslant 0)$，$y=-\sqrt{x}\,(x\geqslant 0)$ 都是函数。

4. 实在性　函数的定义域 D 必须是非空集合。如 $y=\sqrt{1-x}\,(2<x<3)$ 不是我们定义的函数。

5. 函数定义域的确定　研究函数，必须明确

函数在什么范围内有意义，也就是确定函数的定义域。有以下常用的参考原则：

(1)用分析式表示的函数，其定义域就是使分析式有意义的自变量取值范围。常见的有：

①函数式含有分式时，分母不得为零；

②函数式有偶次根式时，根号下的表达式必须非负；

③函数式有对数函数时，对数的真数部分表达式必须为正；

④$\arcsin x$，$\arccos x$ 出现在函数式时，要求$|x|\leqslant 1$；

⑤ 函数式中含有 $\mathrm{tg}x$ 或 $\mathrm{ctg}x$ 时，对 $\mathrm{tg}x$ 要求 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，对 $\mathrm{ctg}x$ 要求 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

⑥函数式由几个表达式组成，其函数定义域是使所有表达式都成立的自变量取值的公共部分。如例 1.2 (2)；

⑦分段函数的定义域是使各段上表达式有意义的自变量取值范围的所有区间或点。见例 1.2(3)。

(2)用表格方式表示的函数定义域是表格所列自变量取值的全体。

(3)图象给出的函数，其定义域是曲线图所对应的自变量取值全体。

(4)对于实际问题建立的函数，其定义域是使实际问题有意义的自变量取值全体。如例 1.7–1.9.

例 1.1 (1) 设$f(x)=2x^2-3x+1$，求$f(1)$、$f(-2)$、$f(a+1)$、$f(a)+1$、$f(\frac{1}{x})$

(2)设$g(t)=\begin{cases}t & -2<t<0\\ t^2+1 & t\geqslant 0\end{cases}$ 求$g(3)$，$g(a)$

(3) 设$f(x)=\frac{x}{1-x}$、$g(x)=x^2$，求 $f[f(x)]$、$f[g(x)]$、$g[f(x)]$

解 这是求函数值一类的问题。求函数值就是用对应规律对自变量进行运算的结果。

(1) 函数$f(x)=2x^2-3x+1$，其对应规律f为

$$f(\ )=2\cdot(\ )^2-3\cdot(\ )+1$$

求函数$f(x)$当 $x=1$ 时的值，即把 $x=1$ 代入到表达式 $2\cdot(\ )^2-3\cdot(\ )+1$ 的括号内进行运算所得到的值。即

$$f(1)=2\cdot(1)^2-3\cdot(1)+1=2-3+1=0$$

同理 $f(-2)=2(-2)^2-3(-2)+1=8+6+1=15$

$$f(a+1)=2(a+1)^2-3(a+1)+1=2a^2+a$$

$$f(a)+1=[2(a)^2-3(a)+1]+1$$
$$=2a^2-3a+2\neq f(a+1)$$

$$f(\frac{1}{x})=2(\frac{1}{x})^2-\frac{3}{x}+1=\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}+1\ (x\neq 0)$$

(2)$\because t=3>0$，$\therefore$用 $t>0$ 时的表达式

$g(3)=3^2+1=10$

求 $g(a)$，要依 a 的取值不同，采用函数在不同段上的表达式。

当$-2<a<0$ 时

$$g(a)=g(t)\Big|_{t=a}=t\Big|_{t=a}=a$$

当$a\geqslant 0$时

$$g(a)=g(t)\Big|_{t=a}=(t^2+1)\Big|_{t=a}=a^2+1$$

注意：因为函数的定义域是 $(-2,+\infty)$、假若求 $g(-4)$就没有意义。

(3)由定义

$$f[f(x)]=\frac{x}{1-x}\Big|_{x=f(x)}=\frac{f(x)}{1-f(x)}$$

$$=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

$$(x\neq 1、x\neq\frac{1}{2})$$

$$f[g(x)]=\frac{x}{1-x}\Big|_{x=g(x)}=\frac{g(x)}{1-g(x)}$$

$$=\frac{x^2}{1-x^2}\quad(x\neq\pm1)$$

$$g[f(x)]=[f(x)]^2=[\frac{x}{1-x}]^2=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$(x\neq 1)$

例 1.2 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)}$

(2) $g(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{x-1}{3}$

(3) $\varphi(t)=\begin{cases}t+1 & t\leqslant 0\\ \frac{t^2+1}{t-1} & t>0\end{cases}$

解 依前面给出的确定函数定义域的参考原则，求解本例。

(1) 函数表达式有对数式且出现在分母，要使函数有意义，必须

$x-1>0$，$\ln(x-1)\neq 0$

同时成立，即

$$x>1 \text{且} x\neq 2$$

所以 $f(x)$ 的定义域为 $1<x<2$，$2<x<+\infty$ 或者表为 $(1,2)\bigcup(2,+\infty)$

(2) 分析 函数的表达式由无理函数和反正弦函数组成。要函数有意义，必须

$x^2-x-6\geqslant 0$ 且 $\left|\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 1$

即 $\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0\\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x+2\geqslant 0\\ -3\leqslant x-1\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-3\leqslant 0\\ x+2\leqslant 0\\ -3\leqslant x-1\leqslant 3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 3\\ x\geqslant -2\\ -2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x\leqslant -2\\ -2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$

取不等式的公共部分为其解，得

上式左端不等式的解为：$3\leqslant x\leqslant 4$

上式右端不等式的解为：$x=-2$

所以函数 $g(x)$ 的定义域为

$\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}\bigcup\{x|x=-2\}$

(3) 当 $t\leqslant 0$ 时，$\varphi(t)=t+1$，是有意义的。

当 $t>0$ 时，$\varphi(t)=\dfrac{t^2+1}{t-1}$，在 $t=1$ 处，$\varphi(t)$ 无意义。故 $0<t<1$ 和 $1<t<+\infty$ 时，$\varphi(t)$ 都有意义。

综上所述，$\varphi(t)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$。

可以看出，求定义域主要是解不等式（或不等式组）。

例 1.3 下列函数对是否相同？

(1) $g(x)=x-1$ 与 $\varphi(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

(2) $y=\dfrac{e^x}{x-1}$ 与 $x=\dfrac{e^t}{t-1}$

(3) $f(x)=\ln(1-x)+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=\ln(1-x)(1+x)$

(4) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $u=x$

分析 由前述确定函数的要素来判别两函数是否相同。一般先看定义域，后看对应规律。

解 (1)求两函数的定义域

$D(g)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，

$D(\varphi)=\{x|x\neq -1\}$

它们的定义域不相同，故两个函数不相同。

假若只限定在区间 $(-\infty,-1)$ 或 $(-1,+\infty)$ 内进行讨论时，则 $\varphi(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1=g(x)$，即两函数相同。

(2)两函数的定义域均为 $(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$ 且对应规律完全一样，故两函数相同。

这说明，不管自变量与因变量采用什么字母表示，只要定义域及对应规律分别相同，就是相同的函数。

(3)可求得它们的定义域

$D(f)=\{x|-1<x<1\}$，

$D(g)=\{x|-1<x<1\}$

即两函数定义域相同。当 $-1<x<1$ 时

$f(x)=\ln(1-x)+\ln(1+x)=\ln(1-x)(1+x)=g(x)$

可见其对应规律也相同。所以两函数是相同的。

注：两相同的函数，对应规律表面看来可能不同，一般都可以互相转化。

(4)易得两函数的定义域均为

$$-\infty<x<+\infty$$

但是 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，而 $u=x$

故它们的对应规律不相同。所以，$y=\sqrt{x^2}$ 与 $u=x$ 是不同的函数。

不同的函数，其值域不同是显然的，如本小题 $y>0$，而 $-\infty<u<+\infty$。

二、函数性质

主要讨论函数的奇偶性。判别函数的奇偶性方法有：

1. 用定义判别最常用

2. 利用图形判别

奇函数的图形关于原点对称。

偶函数的图形关于 y 轴对称。

3. 根据奇偶函数的运算规律判别

(1)两奇(偶)函数之和或差仍为奇(偶)函数；

(2)两偶函数之积为偶函数；两奇函数之积亦为偶函数。

(3) 一偶函数与一奇函数之积为奇函数。如例1.4 (2)。

注意：讨论奇偶性必须是在对称区间上定义的函数才可进行，即 $x\in D(f)$，且 $-x\in D(f)$ 时，才可讨论奇偶性。如 $f(x)=x^2(x\in[0,2])$，在 $[0,2]$ 上就不能说 $f(x)=x^2$ 是偶函数。

不具备奇偶性质的函数是大量的。

例 1.4 判别下列函数的奇偶性

$(1)g(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}(a>0,a\neq1)$

$(2)\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\sin x$

$(3)f(x)=x^3+\cos x$

解 (1) 求定义域：$D(g)=(-\infty,+\infty)$，是对称区间。

因为 $g(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}$

$=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=g(x)$，故 $g(x)$ 是偶函数。

$(2)D(\varphi)=\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$ 是对称区间。

因为 $\varphi(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}\sin(-x)=$ $-\sqrt{1-x^2}\sin x=-\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$是奇函数。

或者因$\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数，$\sin x$ 是奇函数，它们的乘积是奇函数。

$(3)D(f)=(-\infty,+\infty)$

$f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x$ $\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq-f(x)$，故 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

三、反函数与复合函数

求反函数：先从 $y=f(x)$ 中解出 x，表成 $x=\varphi(y)$，再把自变量写成 x，因变量记为 y，有 $y=\varphi(x)$，或记 $y=f^{-1}(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数。要知道

1. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)(=\varphi(x))$ 互为反函数；

2. 在同一直角坐标系中，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称；

3. 只有单调的一一对应的函数，才有反函数。

例 1.5 求下列函数的反函数：

$(1)y=\dfrac{x+2}{x-2}$ $\qquad(2)y=x^2$

解 (1) 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ 即 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$，从中解得

$$x=2\cdot\frac{y+1}{y-1}$$

所以，$y=\dfrac{x+2}{x-2}$的反函数为

$$y=\varphi(x)=2\frac{x+1}{x-1}，即y=f^{-1}(x)=2\cdot\frac{x+1}{x-1}$$

不难看出：$D(f)=\{x|x\neq2\}$，值域：$\{f(x)|f(x)\neq1\}$，而 $D(\varphi)=\{x|x\neq1\}$，其值域：$\{\varphi(x)|\varphi(x)\neq2\}$，即一个函数的定义域，是其反函数的值域；一个函数的值域，则是其反函数的定义域。

(2) 因为 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调，要在单调区间上讨论其反函数。

当 $x\geqslant0$ 时，$y=x^2$ 是单调的，从 $y=x^2$ 解出 $x=\sqrt{y}$

这时，$y=x^2$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}(x\geqslant0)$。

当 $x<0$ 时，$y=x^2$ 也是单调的，由 $y=x^2$ 解得 $x=-\sqrt{y}$，得 $y=x^2$ 的反函数为 $y=-\sqrt{x}$ $(x\geqslant0)$。

注 当函数不单调时，要分成单调区间求反函数。

例 1.6 将下列函数分解成基本初等函数的合成：

$(1)y=a^{\sqrt{x}}(a>0,a\neq1)$

$(2)y=\log_3\sin(x^2+2)$

$(3)y=\mathrm{tg}^2(2x-3)+\arcsin x^2$

分析 把一个初等函数表成一系列基本初等函数的运算或复合，叫做函数的分解，对学习数积分，尤其是求导数极为重要。分解过程是从外层向里层（或从左向右）逐步分解。经过几个中间变量，最后到达中间变量对自变量的函数。每步都必须是基本初等函数或其线性组合。

解 (1) 设中间变量为 u，有 $y=a^u$（是指数函数），$u=x^{\frac{1}{2}}$（是幂函数）。

故 $y=a^{\sqrt{x}}$ 由 $y=a^u$，$u=x^{\frac{1}{2}}$ 复合而成。

$(2)y=\log_3\sin(x^2+2)$ 是由 $y=\log_3u$、$u=\sin v$，$v=x^2+2$ 复合而成。

$(3)y=u^2+z$，$u=\mathrm{tg}v$，$v=2x-3$，$z=\arcsin t$，$t=x^2$。

注意：不是任何几个函数都能构成复合函数。如 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{x^2+2}$，就不能构成复合函数。因为 $y=\arccos u$ 要求 $|u|\leqslant 1$，但是 $u=\sqrt{2+x^2}\geqslant\sqrt{2}>1$，即 u 的值不在 $y=\arccos u$ 的定义域内，此表达式的成立范围是空集合。

四、建立函数关系——经济函数实例

要解决某些实际问题，就需要给出数学模型，即建立函数关系。建立函数关系要做到：

首先，明确自变量、因变量，并设出代表符号。

其次，根据题意，把自变量与因变量联结成等式。

再次，确定定义域，求解。见下例。

例 1.7 某厂生产一种元器件，设计能力为日产 100 件。每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元。

(1) 试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数；

(2) 若每件售价 14 元，试写出总收益函数；

(3) 试写出利润函数并求损益分歧点。

解 (1)设日产量为 x 件的日总成本为 C 元，由题设日产量设计能力知，定义域为 $0<x\leqslant 100$。

显然成本是日产量 x 的函数。总成本由固定成本（不随产量变化）和可变成本（随产量的增加而加大的成本部分）构成。由题设，固定成本为 150 元，而可变成本为 $10x$(元)。

故总成本(为固定成本与可变成本之和)：

$C=C(x)=150+10x$（元）$(0<x\leqslant 100)$

设平均成本 $A(x)$即每件的成本，日产量为 x 件时，总成本为 $C(x)$，故平均成本

$$\overline{C}=A(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{150}{x}+10\quad(0<x\leqslant 100)$$

(2)设总收益函数为 R，显然它与销售量有关。假设生产的元器件可以全部售出，即日产量与日销售量相同，均为 x，于是

$R=R(x)=14x$(元) $(0<x\leqslant 100)$

(3)收入扣除成本即为利润，设利润函数为 L，它是销售量 x 的函数(由(2)知产量与销量相同)，于是有

$$L=L(x)=R(x)-C(x)=14x-150-10x$$
$$=-150+4x(\text{元})\quad(0<x\leqslant 100)$$

损益分歧点，即收支平衡点（$L(x)=0$ 的点）

$R(x)=C(x)$ $(L(x)=0)$

解 $-150+4x=0$ 得 $x=37.5$(件)

即每天至少生产 38 件产品方可不亏本。

例 1.8 运输公司规定货运价格为：在 a 公里以内，每吨公里 k 元；超过 a 公里时，超过部分按八折收费。试写出运费与里程的关系式。

解 设每吨货物运费为 m(元)，公里数为 s

由题意（按规定），

当 $0<s\leqslant a$ 时 $m=ks$（元）

当 $s>a$ 时，s 小于 a 的部分仍以 k 元收费，剩余的公里数 $(s-a)$ 部分按八折即 k 的 80% 为 $0.8k$（元）收费，于是

$m=ka+0.8k(s-a)$（元）$(s>a)$

得每吨货物的运费与公里数的关系式

$$m=\begin{cases}ks & 0<s\leqslant a\\ ka+0.8k(s-a) & s>a\end{cases}$$

这是分段函数。

例 1.9 商店销售某种商品，预计年销售量为 a 件。商品均匀上市。为节约库存费用，少占用流动资金，一年分几批进货。每批进货 x 件（即批量为 x）。已知每批进货的费用是 b 元（手续费、搬运费等），每件商品的月储存费为 c 元。试列出库存费、进货费与批量 x 间的函数关系。

解 设年总库存费用为 E_1，年总进货费用为 E_2，显然它们都是批量 x 的函数。

由前面关于库存函数的分析和本例题设知，平均库存量为 $\overline{q}=\dfrac{x}{2}$

一年内的进货次数为$\dfrac{a}{x}$，进货周期为$\dfrac{12}{a/x}=\dfrac{12x}{a}$(月)。于是

$$E_1=c\cdot\overline{q}\cdot\frac{12x}{a}\cdot\frac{a}{x}=6cx$$

$$E_2=b\cdot\frac{a}{x}=\frac{ab}{x}$$

那么，一年总的费用

$$E=E_1+E_2=6cx+\frac{ab}{x}(\text{元})\ (0<x\leqslant a)$$

教材"习题一：12"为

$a=48000$，$b=160$，$c=0.02$，$x=q$，有

$$E=6\times 0.02q+\frac{48000\times 160}{q}$$

$$=\frac{3q}{25}+\frac{768\times 10^4}{q}$$

五、函数作图 函数作图的主要方法有：

1. 描点作图法 是最基本的作图方法。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

2. 利用函数性质(对称性、周期性) 作图。

3. 平移作图法　已知 $y=f(x)$ 的图形，求作 $y=f(x)+b$ 的图形或 $y=f(x+a)$ 的图形。

4. 伸缩作图法　已知 $y=f(x)$ 的图形，求作 $y=kf(x)$ 的图形或 $y=f(mx)$(设 $m>0$) 的图形。

以上内容均可参阅教材。

Ⅲ　练习题

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f(2)=$______，$f(1-a)=$______$(a\neq 0)$，$f[f(x)]=$______$(x\neq 0)$，$f(x)$的定义域是______。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3^x & -1<x\leqslant 0\\ 0 & 0<x<2\\ x-1 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$

则 $f(-0.5)=$______，$f(1)=$______，$f(3)=$______，$D(f)=$______。

3. 已知产品的固定成本为 1000 元，每生产一件产品成本增加 6 元，又每件产品销售价格为 10 元。若产品能全部售出，则总成本函数 $C(x)=$______（产量为 x 件时），总收益函数是 $R(x)=$______（x 表示销售量），产量为 x 时的平均成本函数 $\bar{C}(x)=$______、利润函数 $L(x)=$______。损益分歧点为 $x=$______。

二、单项选择题

1. 函数 $f(x)=\arcsin(1-x)+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是(　　)。

A. $0\leqslant x\leqslant 2$　　B. $0\leqslant x\leqslant 1$

C. $1<x\leqslant 2$　　D. $x>1$

2. 下列函数对中，不相同的函数对是(　　)。

A. $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$　与　$g(x)=1$

B. $y=\ln x^2$　与　$y=2\ln x$

C. $\psi(x)=x^2+2x+1$　与　$\varphi(x)=(x+1)^2$

D. $y=e^{ax}$　与　$u=e^{at}$

3. 下列函数中，(　　)是奇函数。

A. $f(x)=x^2e^x$　　B. $\varphi(x)=x\sin x+x\cos x$

C. $g(x)=\frac{\sin^2x}{1+\cos x}$

D. $y=f(x^2)\sin x$，$f(x)$定义域为$(-\infty,+\infty)$

4. 函数$y=x^2(1+\cos^3x)$的图形关于(　)对称。

A. x 轴　　B. y 轴

C. 坐标原点　　D. 直线 $y=x$

三、下列函数由哪些基本初等函数复合而成

1. $y=\ln\sqrt{1+x}$　　2. $y=e^{\sin^2(x^2-1)}$

四、证明一偶函数与一奇函数之商（分母不为零）是奇函数。

五、列函数式

1. 某车间设计最大生产能力为月生产 100 台机床，至少要完成 40 台方可保本。当生产 x 台时的总成本函数 $C(x)=x^2+10x$(百元)。按市场规律，价格为 $P=250-5x$（x 为需求量），可以销售完毕。试写出月利润函数。

2. 某商店出售电视机，零售价每台 2400 元。若一次购买超过 10 台，减价 5%；若一次购买超过 15 台，可再降价 5%。试写出收款与台数的关系式。

3. 某厂年产收音机 20 万台，均匀生产，产后入库。每年分几批外运，每批外运费用为 2 万元。每台每月库存费用为 0.05 元，每台收音机的平均生产成本为 80 元。试将年总贮存费以及总成本表成批数的函数。

Ⅳ　练习题答案或提示

一、填空题

1. -1；$\frac{1}{a}$；$\frac{x-1}{x}$；$x\neq 1$ 或 $(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$。

2. $\frac{1}{\sqrt{3}}$；0；2；$(-1,2)\bigcup(2,4]$。

3. $1000+6x$；$10x$（x 为销售量）；$6+\frac{1000}{x}$；$4x-1000$；250。

二、单项选择题

1. C；2. B；3. D；4.B。

三、1. $y=\ln u$，$u=v^{\frac{1}{2}}$，$v=1+x$。

2. $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=x^2-1$。

四、设出偶函数 $f(x)$，奇函数 $g(x)$，直接用定义验证$\frac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x)\neq 0$ 时)，或$\frac{g(x)}{f(x)}$($f(x)\neq 0$ 时)为奇函数。

五、列函数式

1. $L(x)=240x-6x^2(40\leqslant x\leqslant 100)$

2. 收款数 R，台数为 x

$$R=R(x)=\begin{cases}2400x & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 2280x & 10<x\leqslant 15\\ 2160x & 15<x\end{cases}$$

3. 设 x 为批数(即分 x 批外运)

年贮存费 $C_1=\dfrac{0.05\times 200000}{2x}\cdot\dfrac{12}{x}\cdot x$

$=\dfrac{60000}{x}$

总成本为生产成本和外运、贮存费用之和，用 C 表示

$$C=1.6\times 10^7+2\times 10^4x+\frac{60000}{x}$$

第二章　极限与连续

极限概念是微积分中最基本和最重要的概念之一，是研究微积分不可缺少的重要工具。因此，必须正确理解极限概念以及无穷小、无穷大等概念，掌握极限的四则运算法则及两个重要极限，会用初等方法求极限。

与极限概念密切联系的是函数的连续性。它也是微积分中一个最基本的概念，要掌握函数连续性的概念，会判断函数的连续性。

Ⅰ　内 容 提 要

一、基本概念

1. 极限

(1) 数列的极限

定义　设有数列 $\{x_n\}$ 及常数 A，如果对于预先给定的任意小的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to+\infty$ 时以 A 为极限。

记作　$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$　或　$x_n\to A\ (n\to+\infty)$

这里，"$n\to+\infty$"称为极限过程。数列极限的上述定义，可说成"$\varepsilon-N$"说法，或"$\varepsilon-N$"语言。

(2) 函数的极限

① 当 $x\to\infty$时，函数的极限

定义　如果对于预先给定的任意小的正数 ε，总存在一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

这里，"$x\to\infty$"（指 x 的绝对值无限增大）称为极限过程，此定义也称为"$\varepsilon-X$"说法。

② 当 $x\to x_0$ 时，函数的极限

定义　如果对于预先给定的任意小的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

这里，"$x\to x_0$"（指 x 与常数 x_0 充分接近)称为极限过程，此定义也称为"$\varepsilon-\delta$"说法。

关于极限定义的几点说明：

① 定义中的 ε 是预先给定的任意小的正数。由于 ε 是任意小的正数，才能保证 $|x_n-A|$(或 $|f(x)-A|$)任意小，从而刻划出数列 $\{x_n\}$(或函数 $f(x)$)与常数 A 的接近程度(无限接近)。由于 ε 是给定的，才可以在 ε 给定后，按 $|x_n-A|<\varepsilon$(或 $|f(x)-A|<\varepsilon$)的要求确定出 N(或 X，或 δ)。

② N(或 X，或 δ)与 ε 有关。通常，给定的 ε 愈小，则所求的 N(或 X)愈大，而要求的 δ 则愈小。这里，N(或 X，或 δ)不是唯一的。

③ 有了极限的上述精确定义，便可据此去证明与函数极限有关的问题。(见例 2.1)

④ 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 是否有极限及其极限值是什么，仅与开区间 $(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$ 内的 x 所对应的函数值有关，而与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的函数值 $f(x_0)$ 无关，甚至 $f(x_0)$ 可以不存在。

(3) 单侧极限

① 当 $x\to x_0^-$（表示 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0）时，若 $f(x)$ 与常数 A 无限接近，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限。记作　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

② 当 $x\to x_0^+$（表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0）时，若 $f(x)$ 与常数 A 无限接近，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限。记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

左极限、右极限统称为单侧极限。

③ 当 $x\to+\infty$（表示 x 沿 x 轴的正方向趋于无穷）时，若 $f(x)$ 与 A 无限接近，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限。记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$

④ 可类似定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

(4) 极限的几何意义（略）

2. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量

① 定义 极限为 0 的变量称为无穷小量，简称无穷小。亦即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时是无穷小量。

显然，0 是无穷小（是把 0 理解为一个常数函数）。但除去 0 以外，无穷小是变量，即无论绝对值是多么小的数，都不是无穷小。

还要注意，一个变量是否为无穷小，除了与变量本身有关以外，还与自变量的变化趋势有关。例如 $f(x)=x^2$，当 $x\to0$ 时，$f(x)$是无穷小。除此以外，x 的任何变化趋势，$f(x)$都不是无穷小。

② 无穷小量阶的比较

定义 设 α、β 是同一极限过程(如 $x\to\infty$或 $x\to x_0$ 等)中的两个无穷小量，

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq0$（$C$ 为常数），则称 α 与 β 是同阶无穷小。特别当 $C=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$ 。

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 较高阶的无穷小。记作 $\alpha=0(\beta)$。

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 较低阶的无穷小。

(2) 无穷大量

定义 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，若 $|f(x)|$ 无限变大，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时是无穷大量，简称无穷大。记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad(\text{或 }\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty)$$

注意，无穷大不是数，不可与很大的数混为一谈。

(3) 无穷大与无穷小的关系

无穷大的倒数是无穷小；非零无穷小的倒数是无穷大。

3. 函数的连续性

(1) 函数在一点处的连续性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其邻域内有定义。若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 x_0 点的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续（此时 x_0 称为 $f(x)$ 的连续点）。否则就称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断（此时 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点）。

(2) 单侧连续性

定义 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

显然，$f(x)$在点 x_0 处连续$\rightleftharpoons f(x)$在该点左连续且右连续。

(3) 函数在一个区间内(上)的连续性

定义 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续。若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，并且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。使得函数 $y=f(x)$ 连续的区间称为 $f(x)$ 的连续区间。

二、基本定理与重要结论

1. 极限与单侧极限的关系

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\rightleftharpoons\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

定理 2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\rightleftharpoons\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

即：双侧极限存在的充要条件是左、右极限都存在，且相等。

2. 有极限的变量与无穷小量的关系

定理 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\rightleftharpoons f(x)=A+\alpha(x)$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$

3. 无穷小量的运算性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

(2) 有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小；

(3) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小。

这些性质对于极限的运算很有帮助。但需注意，两个无穷小的商不一定是无穷小。

4. 极限的四则运算

定理 若$\lim f(x)$、$\lim g(x)$都存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)$

$\lim Kf(x)=K\lim f(x)$ K为常数

(3) 当$\lim g(x)\neq 0$时，则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

注 该定理中每种运算的极限过程是同一的。

5. 极限存在准则、两个重要极限

(1) 极限存在准则

准则Ⅰ 若$u\leqslant \omega\leqslant v$且$\lim u=\lim v=A$，则$\lim \omega=A$。

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限。

(2) 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

② $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

要求正确理解两个重要极限，并掌握其特点(包括：自变量的变化趋势、函数的表达形式、变量极限所属类型、极限值是什么)，灵活运用它们求某些函数的极限。

6. 连续函数的运算

定理 若$f(x)$、$g(x)$在点x_0处连续，则

$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$也在点x_0处连续。

7. 初等函数的连续性

结论 一切初等函数在其定义域内都是连续的。

注 这个结论非常有用。例如要求初等函数在其定义域内的点x_0处的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，可利用连续性，有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。故只须求出$f(x)$在该点$x_0$的函数值$f(x_0)$即可。

8. 闭区间上连续函数的性质

定理(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上至少取得它的最大值和最小值各一次。

定理(介值定理) 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，μ是$f(a)$与$f(b)$之间的任一数，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=\mu(a<\xi<b)$。

Ⅱ 例题分析

一、极限定义

例 2.1 用$\varepsilon-X$方法证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

分析 设ε是任意给定的正数，考察是否存在X，使得当$|x|>X$时，就有$|\dfrac{1}{x}-0|<\varepsilon$成立。

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|\frac{1}{x}-0|=|\frac{1}{x}|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$$

只要$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$就行了。取$X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，

当$|x|>X$时，就有$|\dfrac{1}{x}-0|<\varepsilon$成立。

由$\varepsilon-X$定义，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

二、无穷小与无穷大

例 2.2 判别下列命题正确与否?

(1) 一个比任何正数都小的数是无穷小;

(2) 无穷小是越来越小的量;

(3) 无穷小是 0;

(4) 两个无穷大的和仍为无穷大;

(5) 两个无穷大的乘积仍为无穷大。

解 (1) 否。如$f(x)=-(x^2+1)$，在x的任何变化过程中，$f(x)$比任何正数都小，但它不是无穷小。

(2) 否。如$n\to\infty$时，$\dfrac{(-1)^n}{n}$是无穷小，但却不是越来越小的量。

(3) 不确切。无穷小可以是 0，一般不为 0，而是以 0 为极限的变量。例如当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小，但$\dfrac{1}{x}\neq 0$。

(4) 否。例如当$x\to\infty$时，x与$-x$均为无穷大，但其和的极限$\lim\limits_{x\to\infty}[x+(-x)]=0$，即变量$[x+(-x)]$为无穷小。故两个无穷大的和、差，不一定还是无穷大。

(5) 正确。事实上，若α、β都是无穷大，则$\dfrac{1}{\alpha}$与$\dfrac{1}{\beta}$皆是无穷小。由无穷小的运算性质 (3)

知，$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}$ 是无穷小。依倒数关系，$\alpha\beta$ 是无穷大。所以，两个无穷大之积还是无穷大。

例 2.3 下列变量中，哪些是无穷大？哪些是无穷小？

(1) $x^{\alpha}(\alpha>0)(x\to+\infty)$ (2) $\operatorname{tg}x(x\to 0)$

(3) e^{x} $(x\to-\infty)$ (4) $\ln x(x\to 0^{+})$

(5) $\ln x$ $(x\to 1)$

解 由定义知，(1)、(4) 均为无穷大；(2)、(3)、(5) 均为无穷小。

例2.4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x+1}$

解 因为$\frac{1}{x+1}(x\to\infty)$是无穷小，

$|\cos x|\leqslant 1$，即$\cos x$是有界变量。

根据无穷小与有界变量之积是无穷小，

故 $\frac{\cos x}{x+1}=\frac{1}{x+1}\cdot\cos x(x\to\infty)$是无穷小。

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$

三、极限的四则运算

在运用极限的四则运算法则时，应十分注意条件（各部分函数的极限都存在。在用极限的除法法则时，要求分母的极限不为 0)。

例 2.5 设

$$f(x)=\begin{cases}x^{2} & x<0\\ 1 & x=0\\ x & x>0\end{cases}$$

求：(1) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解 (1) 此函数是分段函数。当 $x>0$ 时，$f(x)=x$

故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$

(2) 由于 $x=0$ 是 $f(x)$的分段点，其左、右两侧 $f(x)$的表达式不同，故需分别求出函数在 $x=0$ 处的左极限与右极限。因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^{2}=(\lim_{x\to 0^-}x)^{2}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

可见 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

例 2.6 求 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^{2}+1}{x^{3}-3x^{2}+4}$

解 分式中分母的极限为

$\lim\limits_{x\to -3}(x^{3}-3x^{2}+4)=\lim\limits_{x\to -3}x^{3}-\lim\limits_{x\to -3}(3x^{2})+\lim\limits_{x\to -3}4$

$=(\lim\limits_{x\to -3}x)^{3}-3(\lim\limits_{x\to -3}x)^{2}+\lim\limits_{x\to -3}4=(-3)^{3}-3\times(-3)^{2}+4=-50\neq 0$ 分子的极限为 $\lim\limits_{x\to -3}(x^{2}+1)$

$=\lim\limits_{x\to -3}x^{2}+\lim\limits_{x\to -3}1=(\lim\limits_{x\to -3}x)^{2}+\lim\limits_{x\to -3}1=(-3)^{2}+1=10$

利用商的极限运算法则，得

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^{2}+1}{x^{3}-3x^{2}+4}=\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^{2}+1)}{\lim\limits_{x\to -3}(x^{3}-3x^{2}+4)}$$

$$=\frac{10}{-50}=-\frac{1}{5}$$

例 2.7 求$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^{3}})$

分析 当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{1-x}\to\infty$，$\frac{3}{1-x^{3}}\to\infty$，故不能直接应用代数和的极限运算法则。需先将函数作适当变形（进行通分）后，再求极限。

解 原极限 $=\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1+x+x^{2}}{1-x^{3}}-\frac{3}{1-x^{3}})$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}+x-2}{1-x^{3}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^{2})}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^{2}}=-1$$

例 2.8 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{2x^{2}-x-1}$

分析 分母的极限$\lim\limits_{x\to 1}(2x^{2}-x-1)=0$，故不能运用商的极限法则。此时还发现分子的极限$\lim\limits_{x\to 1}(x^{2}-1)=0$。原极限为“$\frac{0}{0}$”型未定式。

（一般地，当 $x\to x_{0}$ 时，若$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，则称$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 为“$\frac{0}{0}$”型未定式。其值求法在第四章深入讨论。）

注意到本例中的函数是有理分式函数，若将分

子、分母分别分解因式:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$$

因为当 $x\to1$ 时，$x\neq1$ 即 $x-1\neq0$，故可约去分子、分母的公因式$(x-1)$，再求极限。

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$

例 2.9 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$

分析 此题似上例，当 $x\to0$ 时，原极限为"$\frac{0}{0}$"型未定式。但分母有无理函数，难以分解因式，这种类型首先把分母有理化:

$$\frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

当 $x\to0$ 时，$x\neq0$。可约去分子、分母中不为零的公因子 x^2，再求极限。

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$

$=-\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{1+x^2})=-2$

注　若分子、分母中至少有一个含有无理函数，常采用类似方法处理。

例 2.10 求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n^2+2}{4n^3-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^4-x^2-2}$

解 (1) 当 $n\to\infty$时，分子、分母的极限都不存在（均为无穷大量），故不能用商的极限法则。对于此类极限，一般是先将分子、分母同除以它们的最高次幂（此题是 n^3），再求极限。

原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^3}}{4-\frac{1}{n^3}}=\frac{3}{4}$

(2) 分子、分母同除以 x^4，得

原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$

小结: 例 2.6、例 2.8、例 2.10，都是求有理函数的极限。它有如下规律:

设有理函数为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

(1) 当 $x\to\infty$时，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

$$=\begin{cases}0 & m<n\\ \frac{a_0}{b_0} & m=n\\ \infty & m>n\end{cases}$$

(2) 当 $x\to x_0$ 时，

① 若 $Q(x_0)\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}$

$=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

② 若 $Q(x_0)=0$ 而 $P(x_0)\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$

$=\infty$

③ 若 $P(x_0)=Q(x_0)=0$，则可先将分子、分母分解因式，约去其公因子 $(x-x_0)$ 后，再求极限。

掌握以上规律，可减少运算过程，直接写出结果。如: 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(7x-1)^{25}(2x-1)^{20}}{(2x+9)^{45}}$，由于原式的分子、分母中 x 的最高方次都是 45(属于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$，$m=n$ 的情形)，故

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb