金建铭(美) 著
王建国 译
葛德彪 校

电磁场有限元方法

西安电子科技大学出版社

电磁场有限元方法

金建铭(美)　著
王建国　　　译
葛德彪　　　校

西安电子科技大学出版社
1998

内容简介

本书首次系统地讲述了电磁场有限元的原理和方法。首先，简要回顾了有限元方法的基础：里兹变分法和伽辽金方法，并用例子介绍了有限元方法的概念和基本步骤。然后，描述了一维、二维和三维问题的有限元分析，建立了每类问题的严格有限元解的一般形式，由此可导出特定问题的解。本书描述了电磁场有限元方法的最新发展，包括有限元—吸收边界条件方法、有限元—边界积分方法、有限元—本征函数展开方法等混合法，同时给出了开区域电磁散射和辐射问题的有限元解法；讲述了各种变分原理，可用于建立实际物理问题的变分有限元公式；给出了各种二维和三维棱边有限元方法，其应用使电磁场有限元方法进入了新的时代。本书还给出了大量的有限元应用的例子，包括静电场和静磁场的计算、波导和腔体特性的确定，以及散射和辐射分析等。书中附有大量的参考文献和一定数量的习题。

本书可作为大学高年级本科生和研究生的教科书，也可供电磁学研究者参考。

电磁场有限元方法
金建铭（美）著 王建国译
葛德彪 校
责任编辑 [illegible]惠萍

西安电子科技大学出版社出版发行
西安市高陵县印刷厂印刷
各地新华书店经销
开本 787×1092 1/16 印张 20 12/16 字数 482 千字
1998 年 1 月第 1 版 1998 年 2 月第 1 次印刷 印数 1－1 000

ISBN 7－5606－0569－9/TN·0112 定价：26.80 元

译 者 序

虽然有限元方法在电磁学中的应用已有30余年的历史，但是，在实际工作中，很难找到一本合适的电磁场有限元方法方面的参考书。有关资料分散在期刊杂志中，这给研究工作带来了很多不便。金建铭教授的专著《电磁场有限元方法》一书可以满足教学和科研方面的需求。

金建铭教授长期从事电磁理论和有限元方法的研究，在电磁场有限元方法研究领域中具有很深的造诣。本书首次系统地讲述了电磁场有限元的原理和方法。首先，简要回顾了有限元方法的基础——里兹变分方法和伽辽金方法，并用例子引入了有限元方法的概念和基本步骤，这样会使读者感到更加自然和易于理解。然后，描述了一维、二维和三维问题的有限元分析，建立了每类问题的严格有限元解的一般形式，从此可导出特定问题的解。本书描述了电磁场有限元方法的最新发展，包括有限元—吸收边界条件方法、有限元—边界积分方法、有限元—本征函数展开方法等混合法。开放区域的散射和辐射问题通常是有限元方法的难点之一，本书用混合法给出了这类问题的有限元解。在一般有限元方法书中，通常先给出所需要的泛函，然后再证明它，这样会使读者感到迷惑不解，而本书则不同，它讲述了标准变分原理、修正变分原理和广义变分原理，根据这些变分原理导出被研究问题的泛函，从而可建立实际物理问题的变分有限元公式。本书还讨论了各种二维和三维棱边有限元方法，这些新型单元的应用克服了传统有限元方法的缺点，从而使电磁场有限元方法的研究进入了新的时代。本书还给出了大量的有限元应用的例子，这些应用遍及标量场和矢量场、静态场和时谐场，主要包括静电场和静磁场的计算、波导和腔体特性的确定，以及散射和辐射分析等。书中附有大量的参考文献和一定数量的习题。

葛德彪教授在繁忙的工作中抽出时间来认真校对了本书全稿。西北核技术研究所的乔登江院士、陈雨生研究员、范如玉研究员和刘国治博士等人给译者以热情的鼓励和帮助。在翻译过程中，吴良超博士和本人进行了多次有益的讨论。乔永芝女士整理了本人的译稿。译者对所有为本译著做出贡献的同志们表示深深的感谢！

由于时间仓促，译本中不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正。

为尊重原著作者意见，本书中的参考文献仍保持原著中的格式。

王 建 国

1997年3月于西北核技术研究所

原　著　序

尽管有限元方法用于电磁问题的分析已有近30年的历史，并且在此期间已有大量的研究论文发表，但是，这方面的教科书和研究专著还较少，在散射和辐射方面更是如此。这与其它工程领域(例如结构分析、流体力学)的情况形成了鲜明的对照。在那些研究领域中，从有限元方法的理论到有限元方法的应用等方面都出版了许多教科书。

作者认为需要有一部描述电磁场有限元方法的理论和应用方面的专著。这主要有两个原因。第一，在计算电磁学方面，随着有限元方法在电磁器件的分析和设计方面的应用的不断增加，许多大学开设了电磁场有限元方法课程，但是目前还缺少一部合适的研究生阶段的教科书*。第二，电磁学研究者为了广泛了解该方面的研究问题，日益需要有一本描述有限元方法的综合参考书，这种合适的参考书的缺乏已长期使许多电磁学研究者感到不方便。

本书就是在上述两种原因下写成的，它既可当作研究生的教科书，也可供电磁学研究者参考。

本书具有如下一些不同于其它专著的特点：

1. **有限元方法的系统描述**

本书从易于阅读的导论开始，然后描述有限元方法，接着处理一维、二维和三维问题。对每一类问题，首先建立严格有限元解的一般形式，然后从一般形式导出特定问题的解。因此，这些问题的有限元解不需重复。

2. **在电磁问题中的广泛应用**

本书描述了有限元方法在许多电磁问题中的应用。这些应用遍及标量场和矢量场，以及静态情形和时谐情形。本书给出了静电场和静磁场的计算问题、微波和光波导特性确定问题、二维和三维散射计算问题，以及微带贴片天线分析问题等。本书借助于许多例子来说明这些应用，其中大部分例子是由作者本人建立的。

3. **开区域散射和辐射问题的分析**

本书重点放在开区域散射和辐射问题的处理上，这是重要且困难的论题，在过去的任何书中都没有涉及到这些问题。对许多特定的问题，本书讨论了不同的解决途径，既有近似方法，又有精确解法。

4. **包含了最新的发展**

本书包含了电磁学有限元方法的最新发展，包括矢量有限元方法和混合方法。这些方法在过去的书中同样没有涉及到。

---

* 注：有两本很好的大学阶段课程教科书。一是 P. P. Silvester and R. L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1990)；另一本是 S. R. H. Hoole, Computer Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices (New York: Elsevier Press, 1989)。

5. 变分问题的公式建立

本书花一章的篇幅来描述用于建立变分有限元公式所需泛函的变分原理。人们通常认为变分公式是有限元方法最困难的障碍。在许多书中，通常先列出所需的泛函，然后加以证明，而不是从原问题中导出。因此，学生常常对其来源感到迷惑不解。在阅读本书时，希望不出现这种情况。

本书由十一章和三个附录组成。第一章简要回顾了电磁理论的一些基本方程和概念。重点强调微分方程和边界条件(包括辐射条件)，因为有限元方法可直接处理它们。

第二章介绍有限元方法。我们首先简要回顾两个基本方法：里兹变分方法和伽辽金方法，它们构成了有限元方法的基础。然后用一个简单例子来先说明它们的应用过程，接着再引入有限元方法的概念。作者认为这种引入方法更加自然，且初学者易于掌握。接下来不针对任何特定问题描述了有限元方法的通用基本步骤，最后给出另一种推导以更加清楚地突出有限元方法的基本原理。

第三章描述了通常一维问题的有限元分析。然后，将结果应用于金属衬底介质片对平面波的散射问题，并将表面辐射条件方法应用于阻抗柱散射中出现的微分方程问题。第一个问题说明直线问题的分析方法，第二个问题说明该方法在处理曲线方面的能力。本章结尾部分引入了高阶单元的概念，并说明了一阶、二阶和三阶单元的性能。

第四章处理二维空间的有限元方法及其应用。我们仍然先考虑通用的二维边值问题，然后再讨论将结果应用于特定的电磁学问题。这些问题包括静电和静磁势(场)的计算、平板波导中不连续特性的确定，以及结合吸收边界条件计算柱结构散射等。最后给出高阶单元的公式，并评估了高阶单元的性能。

第五章描述了一般三维标量问题的有限元分析，并将其应用于静电问题。本章也包括了需要处理矢量的静磁和时谐电磁问题的解，然而，由于电磁场的特殊性质，该方法在电磁问题中还没有得到广泛的应用。本章的结尾讨论了有关的困难。

第六章描述了电磁学问题的变分公式的建立。讨论了通常用于建立所需变分表达式或泛函的各种变分原理，其中广义变分原理是非常简单且十分有用的，并能够应用于电磁学中出现的多数问题。这使得我们能够根据变分模型来建立本书中其它有限元解的公式。

第七章描述了本征值问题的有限元分析。与前面几章中分析的问题相比，本征值问题是非确定型的，所考虑的问题涉及各种波导结构，包括介质填充波导、微带传输线、光纤，以及三维腔体。本章还讨论了开放结构的处理和伪解的出现问题。

为了描述电磁场的特殊性质，第八章介绍了矢量有限元。这种单元比较新，因此，在过去的有限元书中并没有讨论。然而，正是这种单元，才使得有限元分析可直接用电场矢量和磁场矢量来表示。正如我们将要看到的那样，它们尤其适合于表达电磁场矢量，并且对有限元方法在电磁场的将来应用中特别重要。在本章中，我们首先列出二维的棱边基三角形单元、矩形单元和四边形单元的公式，然后再考虑三维的棱边基矩形块单元、四面体单元和六面体单元。本章用例子来说明这种新型单元的优点。

第九章讨论了电磁散射和辐射的最大困难之一——开放区域或开放边界。本章引入了有限元方法和适用于无约束空间的边界积分方程的混合途径。本章从二维散射问题开始，接着讨论三维散射和天线问题。本章结尾讨论了混合方法的一些重要问题，其中包括著名的内部谐振问题。

第十章讨论了解决开放区域问题的另一种途径，其中采用了本征函数展开法。本章首先考虑波导不连续性问题，接着讨论散射问题的各种公式，包括著名的单矩法。

最后一章给出求解有限元离散所得到的线性代数方程组的一些方法和算法，包括带状矩阵法、轮廓存储法，以及共轭梯度法和双共轭梯度法。本章还简要讨论了标准本征值问题和广义本征值问题的求解。

本书包含了与相应主题有关的三个附录。附录A列出了电磁学问题有限元公式建立中常用的一些矢量恒等式和积分定理。附录B描述了应用于包含复共轭函数的泛函的里兹方法。附录C讨论了开放区域散射和辐射问题中各种常用吸收边界条件的推导和性能。

本书采用的时间约定是$e^{j\omega t}$，并且全部被约去。参考文献列在每一章的结尾。为了进一步说明和加强所描述的概念和思想，本书还给出了一定数量的练习。

最后，作者恳请读者指出他们在阅读本书中所发现的任何错误。作者还欢迎对本书的任何评述和建议。

金建铭　于密执安安阿伯

原著作者简介

金建铭，1962 年 2 月生，江苏省常熟市人。1982 年和 1984 年在南京大学分别获学士和硕士学位，1989 年在美国密执安大学获电子工程博士学位并留校任研究员，1992 年在美国一高科技电子公司任高级研究员，1993 年至今任教于伊利诺大学，担任该校计算电磁学研究中心的副主任。现为美国电机电子工程学会高级会员及其天线和电波传播会刊的副编辑。致力于计算电磁学、电磁理论和核磁共振成像技术的研究。著有专著两本，发表论文五十多篇。1994 年获美国国家科学基金会颁发的杰出青年研究奖，1995 年获美国海军研究部颁发的杰出青年研究奖。

目　录

第一章　基础电磁学概述

电磁分析问题实际上是求解给定边界条件下的麦克斯韦(Maxwell)方程组问题。在这一章中，我们简要回顾一下本书中经常用到的一些基本电磁理论概念和方程。我们重点介绍用有限元方法求解边值问题中的各种微分方程和边界条件。至于完整的电磁理论描述，读者可参考一些现有较好的教科书，例如参考文献[1]至[5]。如果读者已熟悉电磁理论，则可略过此章。

1.1　麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是支配所有宏观电磁现象的一组基本方程。这组方程既可写成微分形式，又可写成积分形式，但我们在此只给出它们的微分形式，因为它们能给出用有限元方法处理电磁问题的微分方程。

1.1.1　一般微分形式

对于一般的时变场，微分形式的麦克斯韦方程组可写成

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(法拉弟定律)} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(麦克斯韦 — 安培定律)} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{(高斯定律)} \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(磁场高斯定律)} \tag{1.4}$$

式中：

$\boldsymbol{E}$=电场强度(V/m，伏特/米)

$\boldsymbol{D}$=电通量密度(C/m^2，库仑/米^2)

$\boldsymbol{H}$=磁场强度(A/m，安培/米)

$\boldsymbol{B}$=磁通量密度(Wb/m^2，韦伯/米^2)

$\boldsymbol{J}$=电流密度(A/m^2，安培/米^2)

ρ=电荷密度(C/m^3，库仑/米^3)

另一个基本方程是连续性方程，可以写成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1.5}$$

它表示电荷守恒。

方程(1.1)～(1.5)式中只有三个是独立的，称为独立方程。前三个方程(1.1)～(1.3)式，或前两个方程(1.1)式和(1.2)式以及(1.5)式，都可被选作这种独立方程。其它两个方程，(1.4)式和(1.5)式或(1.4)式和(1.3)式可从独立方程导出，因此被称为辅助方程或相关方程。

1.1.2 静电场和静磁场

当场量不随时间变化时，我们得到静态场。在这种情况下，(1.1)式、(1.2)式和(1.5)式可写成

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{1.7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{1.8}$$

而(1.3)式和(1.4)式保持不变。在这种情形下，电场和磁场之间显然没有相互作用，因此，我们能够单独考虑静电和静磁情形。(1.3)式和(1.6)式描述静电情形，(1.4)式和(1.7)式描述静磁情形，(1.8)式是(1.7)式的必然结果。

1.1.3 时谐场

当麦克斯韦方程组中的场量是单频的谐振函数时，我们得到时谐场。用复相位因子表示法[2]，(1.1)式、(1.2)式和(1.5)式可写成简单的形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} = \boldsymbol{J} \tag{1.10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\mathrm{j}\omega \rho \tag{1.11}$$

式中，用了时间约定 $e^{j\omega t}$，并被消去，ω 是角频率。在这种情形下，电场和磁场显然必须同时存在，并发生相互作用。同样很显然，静态场是时谐场在角频率 ω 趋于零时的极限情况。

1.1.4 本构关系

前面描述的五个麦克斯韦方程中只有三个是独立的。因为方程数少于未知量个数，所以，三个独立方程是非定解的形式。当场量间的本构关系确定后，麦克斯韦方程组就变成定解形式。本构关系描述了被考虑媒质的宏观性质。对于简单媒质，它们是

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

式中，本构参数 ϵ、μ 和 σ 分别表示媒质的介电常数(F/m)、磁导率(H/m)和电导率(S/m)。对各向异性媒质，这些参数是张量；对各向同性媒质，它们是标量。对非均匀媒质，它们是位置的函数；对均匀媒质，它们不随位置变化。

1.2 标量势和矢量势

为了求解麦克斯韦方程组，我们可以首先将包含两个场量的一阶微分方程化成只包含一个场量的二阶微分方程。在此，用静电和静磁情形来说明这种转换过程。

1.2.1 静电场的标量势

如前所述，静电场由(1.3)式和(1.6)式支配。将电场 $\boldsymbol{E}$ 表示成

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi \tag{1.15}$$

则(1.6)式得到满足。这里的 Φ 称为标量势。将(1.15)式代入(1.3)式，应用(1.2)式得到

$$-\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\Phi)=\rho \tag{1.16}$$

这是 Φ 的二阶微分方程。(1.16)式是著名的泊松(Poisson)方程。

1.2.2 静磁场的矢量势

静磁场由(1.4)式和(1.7)式描述。将磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 表示成

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.17}$$

则(1.4)式得到满足。这里的 $\boldsymbol{A}$ 称为矢量势。将(1.17)式代入(1.7)式，应用(1.3)式得到二阶微分方程

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{J} \tag{1.18}$$

然而，这个方程不能唯一地确定 $\boldsymbol{A}$，因为如果 $\boldsymbol{A}$ 是(1.18)式的一个解，那么，不管 f 的形式如何，任意函数 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla f$ 也是(1.18)式的解。因此，为了唯一确定 $\boldsymbol{A}$，必须对 $\boldsymbol{A}$ 的散度强加一个条件，这种条件被称为规范条件。此条件的一种自然选择为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{1.19}$$

上面的讨论仅适用于静态场。在时谐场情形下，也可用类似于上面的方式引进标量势和矢量势来表示电场和磁场[1]。但是，因为本书中处理时谐场问题时直接用电场和磁场，所以，在此不讨论时谐场中的矢量势和标量势。

1.3 波动方程

正如刚才所述，我们直接用电场和磁场来处理时谐场情形。为此，必须从包含电场和磁场的麦克斯韦方程组出发，推导出只包含任意一个场量的控制微分方程。

1.3.1 矢量波动方程

利用本构关系(1.12)～(1.14)式，从(1.9)式和(1.10)式中消去 $\boldsymbol{H}$，可得到 $\boldsymbol{E}$ 的微分方程：

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}\right)-\omega^2\varepsilon_c\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{J}_i \tag{1.20}$$

同样可以消去 $\boldsymbol{E}$ 而得到 $\boldsymbol{H}$ 的微分方程：

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_c}\nabla\times\boldsymbol{H}\right)-\omega^2\mu\boldsymbol{H}=\nabla\times\left(\frac{1}{\varepsilon_c}\boldsymbol{J}_i\right) \tag{1.21}$$

在上面两式中，$\boldsymbol{J}_i$ 是外加电流或源电流，$\varepsilon_c(=\varepsilon-\mathrm{j}\sigma/\omega)$ 是感应电流($\sigma\boldsymbol{E}$)和位移电流($\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$)的综合贡献；然而，为简单起见，我们以后仍用 ε 表示 ε_c。方程(1.20)式和(1.21)式被称为非齐次矢量波动方程。

1.3.2 标量波动方程

在电磁分析中，我们尽可能采用二维模型来近似三维问题，从而可大大简化分析过程。假设场和有关媒质不随某一笛卡尔坐标(例如 z 坐标)变化，那么，可以证明：(1.20)式和(1.21)式的 z 分量分别变成

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_r}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_r}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)+k_0^2\varepsilon_r\right]E_z = \mathrm{j}k_0 Z_0 J_z \tag{1.22}$$

以及

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)+k_0^2\mu_r\right]H_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}J_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}J_x\right) \tag{1.23}$$

式中，$\varepsilon_r(=\varepsilon/\varepsilon_0)$和$\mu_r(=\mu/\mu_0)$分别表示相对介电常数和相对磁导率，在此假设它们是位置的复标量函数；$k_0(=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})$是自由空间波数；$Z_0(=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0})$是自由空间的特征阻抗；电常数$\varepsilon_0(=8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m})$和磁常数$\mu_0(=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m})$分别为自由空间的介电常数和磁导率。(1.22)式和(1.23)式类型的方程叫做非齐次标量波动方程。

1.4 边界条件

在感兴趣范围内求解上面给出的微分方程，可以得到许多解，但是，它们中只有一个是该问题的真实解。为了求得真实解，就应该知道相应区域的边界条件。换句话说，一个电磁问题的完整描述应包含微分方程和边界条件的全部信息。在本节中，我们将给出适用于许多实际问题的一些边界条件。

1.4.1 两媒质间的界面

在两媒质的边界面上(例如媒质 1 和媒质 2)，边界条件的数学表达如下：
对于电场有

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{1.24}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0 \tag{1.25}$$

同样，对于磁场有

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0 \tag{1.26}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \tag{1.27}$$

这里$\hat{\boldsymbol{n}}$是垂直于界面的单位矢量，由媒质 2 指向媒质 1(图 1.1)。上面四个方程也可称为场

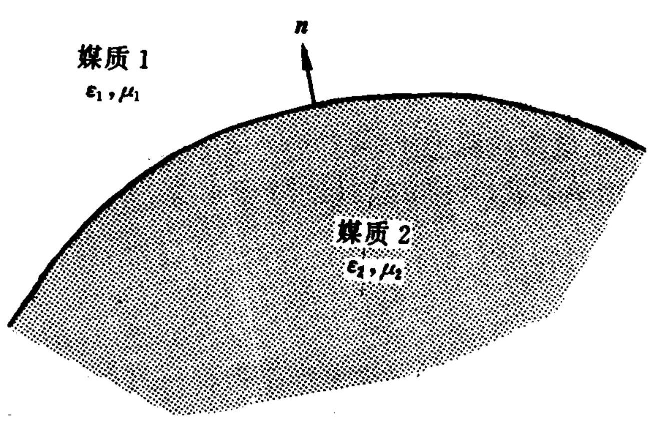

图 1.1 两媒质间界面

的连续性条件。在这四个边界条件中，只有两个是独立的，一个是(1.24)式或(1.27)式，另一个是(1.25)式或(1.26)式。

注意：在(1.25)式和(1.26)式中，假设了在界面上既没有面电流又没有面电荷存在。如果在界面上确实存在面电流密度(用 $\boldsymbol{J}_s$ 表示)和面电荷密度(用 ρ_s 表示)，那么，这两个方程必须修正如下：

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_s \tag{1.28}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s \tag{1.29}$$

1.4.2 理想导体面

当两媒质之一是理想导体时，例如媒质 2，边界条件可简化为一特殊情形。因为理想导体内部不存在场，(1.24)式变为

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.30}$$

而(1.27)式退化为

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.31}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是导体外部的场，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是导体的外法向单位矢量。在这种情形下，边界始终有面电流($\boldsymbol{J}_s=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}$)和面电荷($\rho_s=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{D}$)存在。

1.4.3 非理想导电面

当媒质 2 是非理想导体时，可以证明[6]：导体边界面上的电场和磁场关系为

$$\boldsymbol{E} - (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E})\hat{\boldsymbol{n}} = \eta Z_0 \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H} \tag{1.32}$$

或者

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = \eta Z_0 [(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H})\hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{H}] \tag{1.33}$$

式中，$\eta=\sqrt{\mu_{r2}/\epsilon_{r2}}$为媒质 2 的归一化特征阻抗。方程(1.32)式或(1.33)式称为阻抗边界条件。在二维情形下，当 $\boldsymbol{E}=\hat{z}E_z$ 时，可以写成

$$\frac{\partial E_z}{\partial n} = \mathrm{j}k_0 \frac{\mu_{r1}}{\eta} E_z \tag{1.34}$$

当 $\boldsymbol{H}=\hat{z}H_z$ 时，可以写成

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \mathrm{j}k_0 \epsilon_{r1} \eta H_z \tag{1.35}$$

通常，第一种情形称为 E_z 极化；第二种情形称为 H_z 极化。

1.5 辐射条件

当区域的外边界延伸至无穷远时，此区域被称为“无约束的”或“开放的”区域。同样，为了得到问题的唯一解，在外边界处也必须确定一个条件，这种条件被称为辐射条件。

1.5.1 索末非辐射条件

假设所有源和物体均在自由空间中，并位于距坐标系原点有限的距离内，那么，电场和磁场应该满足

$$\lim_{r \to \infty} r\left[\nabla \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix} + \mathrm{j}k_0 \hat{\boldsymbol{r}} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{1.36}$$

式中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。通常称方程(1.36)式为一般三维场的索末菲(Sommerfeld)辐射条件。对于二维场，索末菲辐射条件变成

$$\lim_{\rho \to \infty} \sqrt{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + \mathrm{j}k_0 \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{1.37}$$

式中，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$。

1.5.2 高阶辐射条件

在数值分析中，通常希望外边界尽可能靠近目标，从而可减小计算区域的大小。对于二维场，可以证明[7]：在包围辐射源的虚构圆柱面上(图 1.2)，场 E_z 和 H_z 满足高阶辐射条件：

$$B_m \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = O(\rho^{-2m-1/2}) \qquad m = 1,2,3,\cdots \tag{1.38}$$

这里 ρ 表示所选面的半径。当 $m=1$ 和 2 时，B_m 是如下算符：

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathrm{j}k_0 + \frac{1}{2\rho} \tag{1.39}$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial \rho} + jk_0 + \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{8\rho(1+\mathrm{j}k_0\rho)} - \frac{1}{2\rho(1+\mathrm{j}k_0\rho)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{1.40}$$

这里(ρ,φ,z)是通常的柱坐标。注意：索末菲辐射条件(1.37)式是(1.38)式在 $m=\frac{1}{2}$ 和 $B_{1/2}=\partial/\partial\rho+\mathrm{j}k_0$ 条件下的特例。方程(1.38)式也称为吸收边界条件，其物理解释为：当在此边界处应用(1.38)式时，只有少部分入射功率从边界处被反射回来。

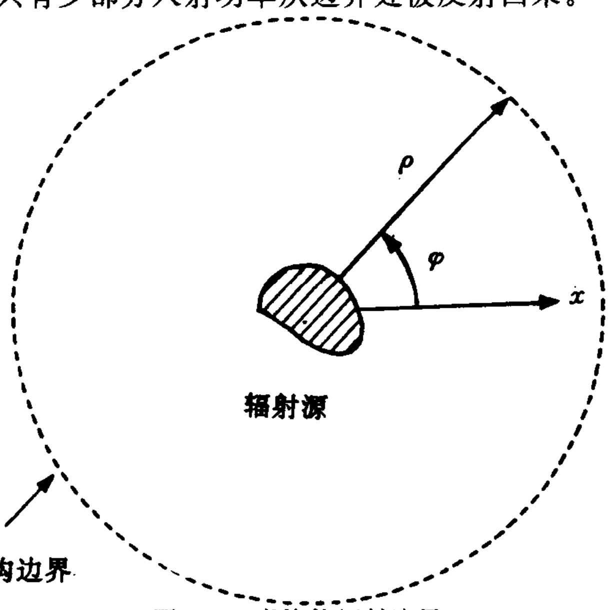

图 1.2 虚构的辐射边界

对于三维情形，可以证明[8]：在包围辐射源的球面上，场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足高阶辐射条件：

$$B_m \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix} = O(r^{-2m-1}) \qquad m = 1,2,3,\cdots \tag{1.41}$$

当 $m=1$ 和 2 时，算符 B_m 为