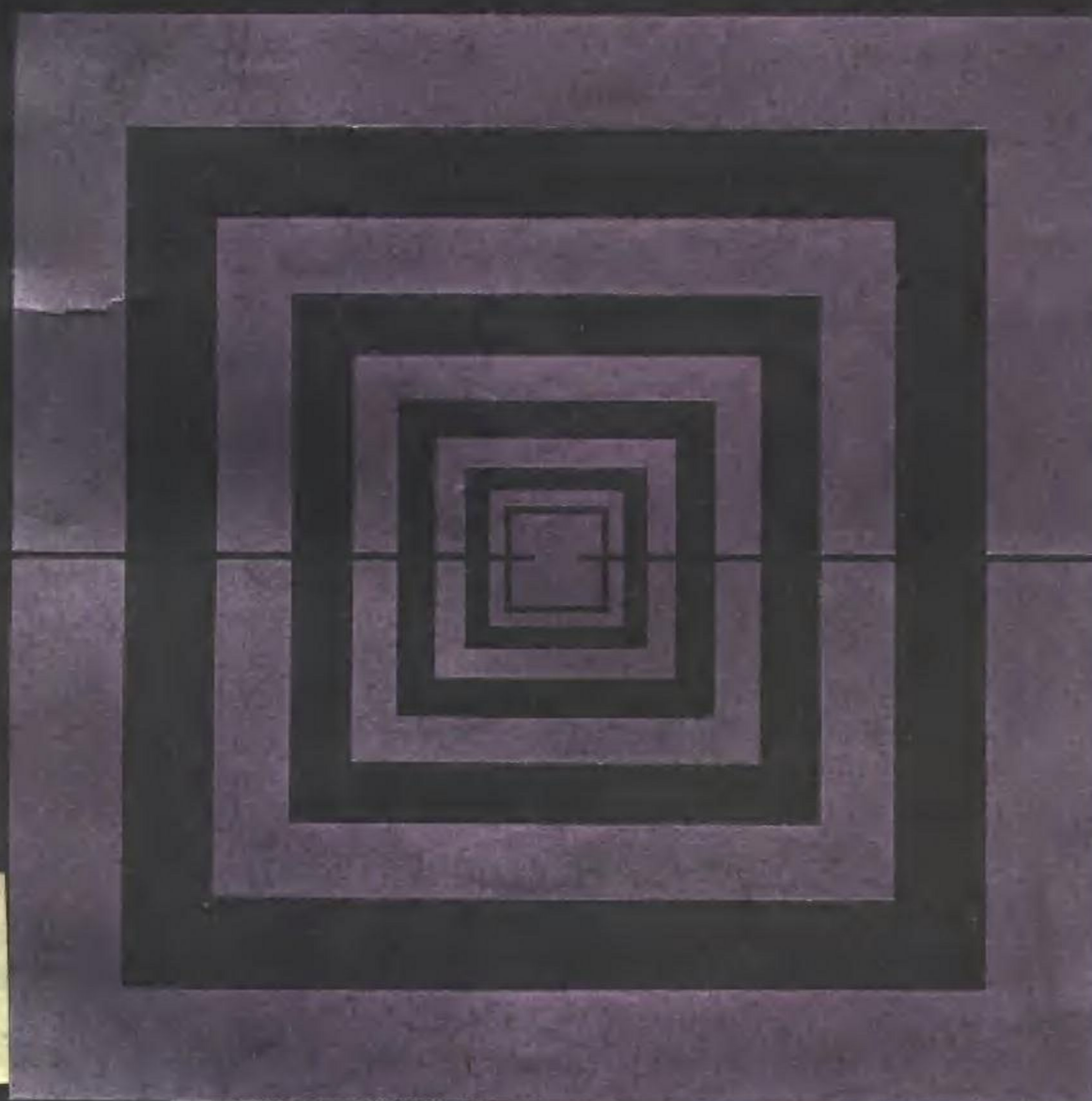


工程控制论 习题详解

GONGCHENG KONGZHILUN
XITI XIANGJIE

[日] 明石 一、金井弘之教授著
成科燕 罗振德译
王嘉新副教授审



4.2-44

工程控制论习题详解

〔日〕明石一 金井弘之教授 著

成科燕 罗崇德 译

王嘉新副教授 审

责任编辑：陈清山

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1985年11月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/16 印张：17.75 字数：438,000

印数：1—4,000

统一书号：15204·155 定价：2.80元

征订期号：湖南新书目85—7(22)

内 容 简 介

《工程控制论》是一门新兴的技术学科。其应用范围几乎扩大到一切工程控制领域。

本书简明扼要地介绍了《工程控制论》的基本概念、基本法则及其数学模型,其中包括:拉氏变换、控制系统和元件的传递函数、时间响应、频率响应、稳定判据、根轨迹法、控制系统的性能评价和设计、采样系统控制、统计控制理论、状态方程式、最优控制理论以及非线性控制理论。本书以主要篇幅详细地解答了约300道联系实际的典型例题,旨在使读者定量地巩固基本理论、并掌握解题的要领和计算方法。

本书内容全面、语言精炼、例题典型、实用,解题思路清晰,内容通俗易懂、便于自学,被誉为是培养读者具备解决实际问题能力的优秀参考书。

本书可供电气、机械、航天、航海、化工、核反应、生物工程和管理工程等工程领域的有关专业师生和技术人员自学。

本书第1~6章由成科燕译,第7~12章由罗崇德译;第7~9章由成科燕审校,全书由王嘉新副教授审校。

1980年11月第1版

序 言

为了具备解决控制工程理论实际问题的能力,必须掌握工程控制论的各种分析方法。欲达此目的,最重要的是亲自试解与实际有关的许多练习题。本书所搜集的大量练习题,涉及到控制工程的各个领域,并对这些问题作了详尽地分析和解答,旨在培养读者具备解决工程控制问题的实际能力。

本书章节的选编,虽然大部分与共立出版社出版的由明石一著的《工程控制论》一书相吻合,但本书所搜集的某些问题却超过了《工程控制论》的内容范围。

本书各章的开头,归纳并扼要地解释了一些必要的定理、定义以及解题分析的方法。进而,几乎以所有篇幅用来介绍习题及其详细的解答。

读者在基本上理解了有关诸定理、定义和解析方法之后,如能自己动手解决类似于本书上的诸问题,这便是作者的心愿。

对于本书稿的整理,曾得到京都大学系统控制研究室大学院学生们的大力协助。其姓名记录如下,一并致以谢意!

浜冢辉雄

足立正雄

喜多村直

武内良树

森胁克己

寺岛一彦

莫麦·爱比德

石川昌明

竹口知男

伊势清贵

政友弘明

山本敏夫

大曲启介

有马 甲

四方 诚

吉田 丰

著 者

一九八一年九月

目 录

第一章 拉普拉斯变换	(1)
内容提要	(1)
拉普拉斯变换的定义	(1)
拉普拉斯反变换的定义	(1)
基本公式和定理	(1)
赫维赛德部分分式展开定理	(2)
杜哈美尔积分	(2)
习题详解	(3)
第二章 控制系统和元件的传递函数	(20)
内容提要	(20)
自动控制系统	(20)
传递函数	(20)
各种典型环节传递函数的一般表达式	(21)
方框图	(21)
开环传递函数和闭环传递函数	(22)
习题详解	(23)
第三章 时间响应	(41)
内容提要	(41)
时间响应的求法	(41)
阶跃响应	(41)
脉冲响应	(41)
反馈控制系统的时间响应和主根	(41)
过渡响应特性	(42)
稳态特性	(42)
由给定值变化引起的稳态偏差	(42)
由干扰引起的稳态偏差	(43)
习题详解	(43)
第四章 频率响应	(56)
内容提要	(56)
频率传递函数	(56)
向量轨迹	(56)
伯德 (Bode) 图	(56)
伯德图的折线逼近	(59)
伯德图的合成	(59)
增益-相位图	(59)

闭环控制系统的频率响应	(59)
$M-\alpha$ 轨迹	(60)
尼柯尔斯图	(60)
习题详解	(61)
第五章 稳定判据	(78)
内容提要	(78)
稳定性的定义	(78)
赫维茨稳定判据	(78)
劳斯稳定判据	(79)
奈奎斯特稳定判据	(80)
稳定度	(81)
利用伯德图的稳定判据	(82)
习题详解	(82)
第六章 根轨迹法	(98)
内容提要	(98)
根轨迹的定义	(98)
根轨迹的求法	(98)
根轨迹的性质	(98)
习题详解	(101)
第七章 控制系统的性能评价和设计	(117)
内容提要	(117)
控制系统的特性	(117)
稳定性	(117)
快速响应和衰减特性	(117)
指数响应	(117)
频率响应	(117)
控制系统 (伺服机构) 的设计	(118)
调整增益	(118)
串联校正	(118)
反馈校正	(118)
习题详解	(119)
第八章 采样系统控制	(146)
内容提要	(146)
采样器和保持器	(146)
Z 变换的定义	(146)
用拉普拉斯变换求 Z 变换的方法	(146)
Z 反变换的定义和求法	(147)
幂级数展开法	(147)
留数法	(147)
基本公式和定理	(147)
脉冲传递函数	(148)
采样系统控制的响应	(148)

稳定偏差	(149)
稳定判据	(149)
劳斯—古尔威茨判据	(150)
奈奎斯特判据	(150)
根轨迹法	(150)
采样系统控制的设计	(150)
扩展 Z 变换	(151)
扩展脉冲传递函数	(151)
扩展 Z 反变换	(151)
习题详解	(151)
第九章 统计控制理论	(179)
内容提要	(179)
随机变量 $x(t)$ 的时间均值定义	(179)
随机过程 $x(t)$ 的集合均值定义	(179)
各态历经性的定义	(179)
概率分布函数 $F(x)$ 的定义	(179)
高斯分布(正态分布)的定义	(179)
自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$ 的定义	(179)
互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$ 的定义	(179)
功率-谱密度 $\phi_x(\omega)$ 的定义	(179)
自相关函数和功率谱密度的关系	(179)
互谱密度的定义	(179)
互相关函数和互谱密度的关系	(180)
环节 G 的输入 $x(t)$ 的谱密度与输出 $y(t)$ 的均方误差关系	(180)
密度和 $G(j\omega)$ 的关系	(180)
习题详解	(180)
第十章 状态方程式	(199)
内容提要	(199)
向量和矩阵	(199)
行列式	(200)
矩阵运算	(200)
向量的线性相关和矩阵的秩	(201)
特征值	(201)
约当标准型	(202)
二次型	(202)
向量和矩阵的微分和积分	(203)
状态方程	(203)
状态方程和传递函数的关系	(204)
由传递函数求状态方程模型的方法	(204)
转移矩阵和状态方程的解	(206)
可控性和可观性	(207)
稳定性	(208)
离散时间系统的状态方程	(208)

习题详解	(209)
第十一章 最优控制理论	(232)
内容提要	(232)
最优控制问题	(232)
庞德里亚金最大值定理	(232)
动态规划法	(233)
习题详解	(234)
第十二章 非线性控制系统	(252)
内容提要	(252)
描述函数的定义	(252)
描述函数的求法	(252)
零存贮型非线性元件的定义	(252)
关于非线性系统稳定的波波夫定理	(252)
关于非线性系统稳定的圆板定理	(253)
相平面分析的定义	(253)
等斜线法	(253)
利恩阿德方法	(253)
李雅普诺夫函数的定义	(254)
关于稳定判据的李雅普诺夫定理 (李雅普诺夫的第二法或直接法)	(254)
习题详解	(254)

第一章 拉普拉斯变换

内 容 提 要

拉普拉斯变换的定义 我们将 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 定义为:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (\text{或记为 } \mathcal{L}[f(t)]) \tag{1.1}$$

拉普拉斯反变换的定义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}ds \quad (\text{或记为 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)]) \tag{1.2}$$

【注意】 必须记住拉普拉斯变换的定义, 但没有必要记拉普拉斯反变换的定义。

表1.1 拉普拉斯变换
的基本公式

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

表1.2 拉普拉斯变换的基本定理

	$f(t)$ 在 t 区域的运算	$F(s)$ 在 s 区域的运算
1	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
2	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
3	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
4	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
5	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
6	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty} F(x)dx$
7	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
8	$f(t-b)u(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
9	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \equiv f \bullet g$ (称为 f 和 g 的卷积)	$F(s)G(s)$
10	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (终值定理)
11	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ (初值定理)

基本公式和定理 关于拉普拉斯变换的基本公式和定理, 见表1.1和表1.2。

【注意】 最好记住表1.1和表1.2中给定的基本公式和定理, 因为以这些公式和定理为基

础, 便能推出表中尚未列出的种种函数的拉普拉斯变换和反变换。

赫维赛德部分分式展开定理 用式(1.2) 能由 $F(s)$ 求出相应的反变换。但是, 若进行积分却很麻烦。当 $F(s)$ 是有理式时, 把 $F(s)$ 分解成为部分分式, 就可以容易地求出拉普拉斯反变换。

因为, $F(s)$ 是有理式, 所以, 能表示成如下形式的多项式之比。

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

方程式 $q(s) = 0$ 的根, 称它为 $F(s)$ 的极点。如将 $F(s)$ 的极点分为全单极点和多重极点这样两种情况, 则将展开定理叙述如下:

当 $F(s)$ 的极点全是单极点时, 令 $F(s)$ 的极点为 $s_1, s_2, \dots, s_n$, 这时, 可将 $F(s)$ 展开成为如下形式的部分分式

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)} + \frac{k_2}{(s-s_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s-s_n)} \quad (1.3)$$

式中

$$k_i = [(s-s_i)F(s)]_{s=s_i} \quad (1.4)$$

当 $F(s)$ 的极点有多重极点时, 令 $F(s)$ 的极点为 $s_1, s_2, \dots, s_n$, 若设 $s_1 = s_2 = \dots = s_m$ 为重极点, 那么, 把 $F(s)$ 记为

$$F(s) = \frac{p(s)}{(s-s_1)^m (s-s_{m+1}) \dots (s-s_n)}$$

这样, 就能将其 $F(s)$ 展开成为如下形式的部分分式

$$F(s) = \frac{k_{1,m}}{(s-s_1)^m} + \frac{k_{1,m-1}}{(s-s_1)^{m-1}} + \dots + \frac{k_{1,1}}{(s-s_1)} + \frac{k_{m+1}}{(s-s_{m+1})} + \dots + \frac{k_n}{(s-s_n)} \quad (1.5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k_{1,m} &= [(s-s_1)^m F(s)]_{s=s_1} \\ k_{1,m-1} &= \left[\frac{d}{ds} (s-s_1)^m F(s) \right]_{s=s_1} \\ k_{1,m-i} &= \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} (s-s_1)^m F(s) \right]_{s=s_1} \\ k_{1,1} &= \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} (s-s_1)^m F(s) \right]_{s=s_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

另外, 由式(1.4) 能求出 $k_{m+1}, \dots, k_n$ 。

杜哈美尔积分 (Duhamel's integral)

$$x(t) = \int_0^t a(\tau) \left\{ \frac{d}{dt} f(t-\tau) \right\} d\tau + a(t) f(0)$$

$[a(t)$, 系统的单位阶跃响应 (indicial response)]

$$x(t) = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

$[g(t)$, 系统的冲激脉冲响应 (impulse response), 也称权函数 (weighting function)]。

以上积分称为杜哈美尔积分。

习 题 详 解

【1.1】 试证下列各式

$$(a) \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n > 0 \text{ 的整数})$$

$$(b) \mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\omega \text{ 是实数})$$

$$(c) \mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\omega \text{ 是实数})$$

【解】 (a) 据定义, 则有

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} t^n e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

式中, 因其右边的第一项为零, 若设 $\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt \equiv I_n$, 则

可将上式记为

$$I_n = \frac{n}{s} I_{n-1}$$

又因, $I_1 = \frac{1}{s^2}$, 所以

$$I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{s^2} I_{n-2} = \dots = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2}{s^{n-1}} I_1 = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

于是, 可得

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(b) 由 sine 函数和指数函数的关系得

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

故

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

则

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

(c) 和 (b) 问一样, 因为

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

所以

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

由此得

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

【1.2】 试证明下列诸定理:

$$(a) \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$(b) \mathcal{L}\left[\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{t_0}^0 f(\tau)d\tau$$

$$(c) \mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_0^\infty F(s)ds$$

式中, $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$ 。

【解】(a) 先取 $n=1$ 时的情况, 根据定义可得

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (1)$$

式中, 因为 $f(t)$ 是个可能进行拉普拉斯变换的函数, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$$

则

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = -f(0) + sF(s) \quad (2)$$

次设

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0) \quad (3)$$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f^{(k)}(t)\right] = \int_0^\infty \left\{\frac{d}{dt}f^{(k)}(t)\right\} e^{-st}dt \\ &= [f^{(k)}(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty f^{(k)}(t)e^{-st}dt \\ &= [f^{(k)}(t)e^{-st}]_0^\infty + s \cdot \mathcal{L}[f^{(k)}(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

式中, 因为 $f^{(k)}(t)$ 是个可能进行拉普拉斯变换的函数, 故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t)e^{-st} = 0$$

因此, 由式(3) 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(k+1)}(t)] &= -f^{(k)}(0) + s\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] \\ &= s^{k+1}F(s) - s^k f(0) - \dots - f^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (5)$$

根据式(2)、(3)、(5), 用数学归纳法便能证明该式。

(b) 由定义得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty \left\{\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau\right\} e^{-st}dt \\ &= \left[\left\{\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau\right\} \left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt \end{aligned}$$

式中, 因 $\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau$ 是可能进行的拉普拉斯变换, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau \cdot e^{-st} = 0$$

故

$$\mathcal{L}\left[\int_{t_1}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st} + \frac{1}{s}\int_{t_1}^0 f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{t_1}^0 f(\tau)d\tau$$

(c) 由定义得

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

则

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt d\sigma = \int_0^\infty \int_s^\infty f(t)e^{-\sigma t}d\sigma dt \\ &= \int_0^\infty f(t)\left[-\frac{e^{-\sigma t}}{t}\right]_s^\infty dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}f(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

因此, 得到该式之证明。

【1.3】 试求下列函数的拉普拉斯变换:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} u(t-a) & \text{(c)} \frac{1}{\sqrt{t}} \\ \text{(b)} te^{-at} & \text{(d)} \frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at}) \end{array}$$

【解】(a) $\mathcal{L}[u(t-a)] = e^{-sa}\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}e^{-sa}$

(b) $\mathcal{L}[te^{-at}] = F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2}$ (设 $\mathcal{L}[t] = F(s)$)

(c) $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

(d) $\mathcal{L}\left[\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})\right] = \frac{1}{a^2}(a\mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[u(t)] + \mathcal{L}[e^{-at}])$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{s^2(s+a)} = \frac{1}{s^2(s+a)}$$

【1.4】 试求如下函数的拉普拉斯变换:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \cos(\omega t + \phi) & \text{(d)} \frac{\sin 2t}{t} \\ \text{(b)} t\sin\omega t & \text{(e)} te^{-t}\sin 2t \\ \text{(c)} e^{-at}\sin\omega t \end{array}$$

【解】(a) $\mathcal{L}[\cos(\omega t + \phi)] = \mathcal{L}[\cos\omega t \cdot \cos\phi - \sin\omega t \cdot \sin\phi]$

$$= \cos\phi \mathcal{L}[\cos\omega t] - \sin\phi \mathcal{L}[\sin\omega t]$$

$$= \cos\phi \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \sin\phi \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s\cos\phi - \omega\sin\phi}{s^2 + \omega^2}$$

(b) 若设 $F(s) = \mathcal{L}[\sin\omega t]$, 则

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

因此, 由表1.2的(5) 得

$$\mathcal{L}[t \sin \omega t] = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

(c) 若设 $F(s) = \mathcal{L}[\sin \omega t]$, 则由表1.2的(7)得

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = F(s+a) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

(d) 因为

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 2^2} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right] &= \int_s^\infty \frac{2}{x^2 + 4} dx \quad (\text{见表1.2的(6)}) \\ &= \left[-\tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)\right]_s^\infty = \tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) \end{aligned}$$

(e) 若设 $\mathcal{L}[\sin 2t] = F(s)$, 那么, 因为 $F(s) = \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4}$, 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[te^{-t} \sin 2t] &= -\frac{d}{ds} F(s+1) \quad [\text{见表1.2的(5)和(7)}] \\ &= -\frac{d}{ds} \left\{ \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \right\} = \frac{4(s+1)}{\{(s+1)^2 + 4\}^2} \end{aligned}$$

【1.5】 绘出下列函数的坐标图, 并求其拉普拉斯变换:

(a) $f(t) = (t-a) \cdot u(t-a)$

(b) $f(t) = t - a$

【解】(a) $f(t)$ 的坐标图, 如图1.1所示。而其拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(t-a)u(t-a)] &= e^{-sa} \mathcal{L}[t] \quad [\text{见表1.2的(8)}] \\ &= e^{-sa} \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

(b) $f(t)$ 的坐标图, 如图1.2所示。而其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[t-a] = \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[a] = \frac{1}{s^2} - \frac{a}{s}$$

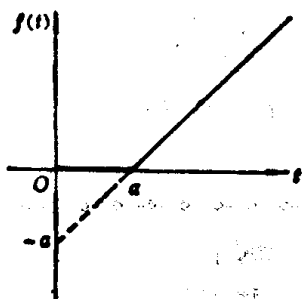


图1.1 $f(t) = (t-a) \cdot u(t-a)$ 的坐标图

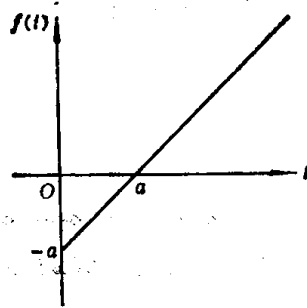


图1.2 $f(t) = t - a$ 的坐标图

【1.6】 试对下列函数进行拉普拉斯变换:

(a) $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$

(b) $e^{-t} \int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$

【解】 (a) 若设 $F(s) = \mathcal{L}[\sin at]$, 则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right] \quad [\text{见表1.2的(4)}]$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \int_s^\infty F(x) dx \quad [\text{见表1.2的(6)}]$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \int_s^\infty \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{s} \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

(b)

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}(t \cos 2t) \quad [\text{见表1.2的(4)}]$$

$$= \frac{1}{s} \left[-\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cos 2t) \right] \quad [\text{见表1.2的(5)}]$$

$$= -\frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 4} \right] = \frac{s^2 - 4}{s(s^2 + 4)^2}$$

因此, 由表1.2的(7)得

$$\mathcal{L}\left[e^{-t} \int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau\right] = F(s+1) = \frac{(s+1)^2 - 4}{(s+1)[(s+1)^2 + 4]^2}$$

【1.7】 求 $f(t) = b(1 - e^{-at})$ 的拉普拉斯变换, 并根据初值定理和终值定理, 求 $f(0)$ 及 $f(\infty)$ 。式中, $a > 0$ 。

【解】 因

$$\mathcal{L}[f(t)] = b(\mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[e^{-at}]) = b\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{ab}{s(s+a)}$$

故

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ab}{s+a} = 0$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{ab}{s+a} = b$$

【1.8】 试对如下函数作拉普拉斯变换:

$$(a) f(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < a, \quad b < t) \\ 1 & (a \leq t \leq b) \end{cases}$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} 3t & (0 < t \leq 2) \\ 6 & (2 < t) \end{cases}$$

【解】(a) $f(t)$ 如图1.3所示, 由拉普拉斯变换的定义, 得

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_a^b e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_a^b = \frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$$

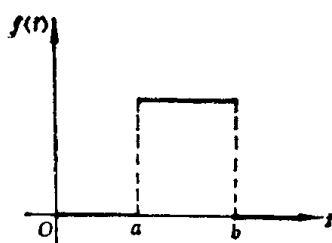


图1.3

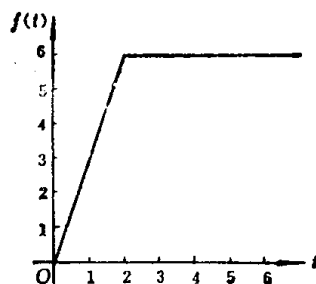


图1.4

(b) $f(t)$ 如图1.4所示, 由拉普拉斯变换的定义, 得

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^2 3te^{-st}dt + \int_2^{\infty} 6e^{-st}dt \\ &= \left[3t \cdot \frac{e^{-st}}{(-s)} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{3e^{-st}}{(-s)}dt + \left[\frac{6e^{-st}}{(-s)} \right]_2^{\infty} \\ &= -\frac{6e^{-2s}}{s} - \left[\frac{3e^{-st}}{s^2} \right]_0^2 + \frac{6e^{-2s}}{s} = \frac{3}{s^2}(1 - e^{-2s}) \end{aligned}$$

【1.9】一具有周期 T 的周期函数 $f(t)$, 当 $0 \leq t \leq T$ 时, 如果连续且有界, 试证明下式成立。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

并且, 求出以图1.5和图1.6形式所示之周期函数的拉普拉斯变换。



图1.5

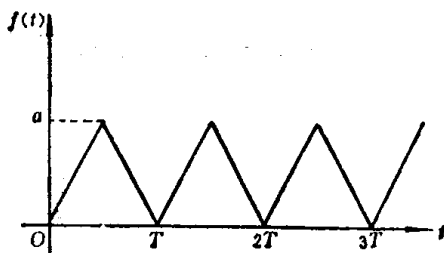


图1.6

【解】根据拉普拉斯变换的定义及 $f(t)$ 是周期函数, 则有

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st}dt + \dots$$

因上式中有如下关系

$$\begin{aligned} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt &= \int_0^T f(\tau + nT)e^{-s(\tau + nT)}d\tau = \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}e^{-snTs}d\tau \\ &= e^{-snTs} \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (t = \tau + nT, n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

所以, 得

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snTs} \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

