工程控制论习题详解

GONGCHENG KONGZHILUN
XITI XIANGJIE

〔日〕明石 一、金井弘之教授著
成科燕 罗振德译
王嘉祈副教授审

工程控制论习题详解

〔日〕明石一　金井弘之教授 著
成科燕　罗崇德 译
王嘉新副教授 审
责任编辑：陈清山

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1985年11月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/16　印张：17.75　字数：438,000
印数：1——4,000
统一书号：15204·155　**定价：2.80元**

征订期号：湖南新书目85—7(22)

内 容 简 介

《工程控制论》是一门新兴的技术学科。其应用范围几乎扩大到一切工程控制领域。

本书简明扼要地介绍了《工程控制论》的基本概念、基本法则及其数学模型，其中包括：拉氏变换、控制系统和元件的传递函数、时间响应、频率响应、稳定判据、根轨迹法、控制系统的性能评价和设计、采样系统控制、统计控制理论、状态方程式、最优控制理论以及非线性控制理论。本书以主要篇幅详细地解答了约300道联系实际的典型例题，旨在使读者定量地巩固基本理论、并掌握解题的要领和计算方法。

本书内容全面、语言精炼、例题典型、实用，解题思路清晰，内容通俗易懂、便于自学，被誉为是培养读者具备解决实际问题能力的优秀参考书。

本书可供电气、机械、航天、航海、化工、核反应、生物工程和管理工程等工程领域的有关专业师生和技术人员自学。

本书第1～6章由成科燕译，第7～12章由罗崇德译；第7～9章由成科燕审校，全书由王嘉新副教授审校。

序　　言

为了具备解决控制工程理论实际问题的能力，必须掌握工程控制论的各种分析方法。欲达此目的，最重要的是亲自试解与实际有关的许多练习题。本书所搜集的大量练习题，涉及到控制工程的各个领域，并对这些问题作了详尽地分析和解答，旨在培养读者具备解决工程控制问题的实际能力。

本书章节的选编，虽然大部分与共立出版社出版的由明石一著的《工程控制论》一书相吻合，但本书所搜集的某些问题却超过了《工程控制论》的内容范围。

本书各章的开头，归纳并扼要地解释了一些必要的定理、定义以及解题分析的方法。进而，几乎以所有篇幅用来介绍习题及其详细的解答。

读者在基本上理解了有关诸定理、定义和解析方法之后，如能自己动手解决类似于本书上的诸问题，这便是作者的心愿。

对于本书稿的整理，曾得到京都大学系统控制研究室大学院学生们的大力协助。其姓名记录如下，一并致以谢意！

浜冢辉雄	足立正雄	喜多村直
武内良树	森胁克己	寺岛一彦
莫麦·爱比德	石川昌明	竹口知男
伊势清贵	政友弘明	山木敏夫
大曲启介	有马　甲	四方　诚
吉田　丰		

著　者

一九八一年九月

目　录

第一章　拉普拉斯变换

内　容　提　要

拉普拉斯变换的定义　我们将$f(t)$的拉普拉斯变换$F(s)$定义为：

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (\text{或记为}\mathscr{L}[f(t)]) \tag{1.1}$$

拉普拉斯反变换的定义

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}ds \ (\text{或记为}\mathscr{L}^{-1}[F(s)]) \tag{1.2}$$

【注意】　必须记住拉普拉斯变换的定义，但没有必要记拉普拉斯反变换的定义。

表1.1　拉普拉斯变换的基本公式

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

表1.2　拉普拉斯变换的基本定理

	$f(t)$在t区域的运算	$F(s)$在s区域的运算
1	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0)$
2	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
3	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
4	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
5	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
6	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty}F(x)dx$
7	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
8	$f(t-b)u(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
9	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\equiv f*g$ (称为f和g的卷积)	$F(s)G(s)$
10	$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$	$\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$(终值定理)
11	$\lim\limits_{t\to 0}f(t)$	$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$(初值定理)

基本公式和定理　关于拉普拉斯变换的基本公式和定理，见表1.1和表1.2。

【注意】　最好记住表1.1和表1.2中给定的基本公式和定理，因为以这些公式和定理为基

础，便能推出表中尚未列出的种种函数的拉普拉斯变换和反变换。

赫维赛德部分分式展开定理 用式(1.2) 能由$F(s)$求出相应的反变换。但是，若进行积分却很麻烦。当$F(s)$是有理式时，把$F(s)$分解成为部分分式，就可以容易地求出拉普拉斯反变换。

因为，$F(s)$是有理式，所以，能表示成如下形式的多项式之比。

$$F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$$

方程式$q(s)=0$的根，称它为$F(s)$的极点。如将$F(s)$的极点分为全单极点和多重极点这样两种情况，则将展开定理叙述如下：

当$F(s)$的极点全是单极点时，令$F(s)$的极点为s_1，$s_2,\cdots,s_n$，这时，可将$F(s)$展开成为如下形式的部分分式

$$F(s)=\frac{k_1}{(s-s_1)}+\frac{k_2}{(s-s_2)}+\cdots\cdots+\frac{k_n}{(s-s_n)} \tag{1.3}$$

式中

$$k_i=[(s-s_i)F(s)]_{s=s_i} \tag{1.4}$$

当$F(s)$的极点有多重极点时，令$F(s)$的极点为s_1、s_2、$\cdots$、s_n、若设$s_1=s_2=\cdots=s_m$为重极点，那么，把$F(s)$记为

$$F(s)=\frac{p(s)}{(s-s_1)^m(s-s_{m+1})\cdots(s-s_n)}$$

这样，就能将其$F(s)$展开成为如下形式的部分分式

$$F(s)=\frac{k_{1,m}}{(s-s_1)^m}+\frac{k_{1,m-1}}{(s-s_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{k_{1,1}}{(s-s_1)}+\frac{k_{m+1}}{(s-s_{m+1})}+\cdots+\frac{k_n}{(s-s_n)} \tag{1.5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
k_{1,m}&=[(s-s_1)^mF(s)]_{s=s_1}\\
k_{1,m-1}&=\left[\frac{d}{ds}(s-s_1)^mF(s)\right]_{s=s_1}\\
k_{1,m-i}&=\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{ds^i}(s-s_1)^mF(s)\right]_{s=s_1}\\
k_{1,1}&=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}(s-s_1)^mF(s)\right]_{s=s_1}
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

另外，由式(1.4) 能求出k_{m+1}、$\cdots$、k_n。

杜哈美尔积分 (Duhamel's integral)

$$x(t)=\int_0^t a(\tau)\left\{\frac{d}{dt}f(t-\tau)\right\}d\tau+a(t)f(0)$$

[$a(t)$；系统的单位阶跃响应 (indicial response)]

$$x(t)=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

[$g(t)$；系统的冲激脉冲响应 (impulse response)，也称权函数 (weighting function)]。以上积分称为杜哈美尔积分。

习　题　详　解

【1.1】 试证下列各式

(a) $\mathscr{L}(t^n)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$　　($n>0$的整数)

(b) $\mathscr{L}(\sin\omega t)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$　　(ω是实数)

(c) $\mathscr{L}(\cos\omega t)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$　　(ω是实数)

【解】 (a) 据定义，则有

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$$

式中，因其右边的第一项为零，若设$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt\equiv I_n$、则可将上式记为

$$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

又因，$I_1=\dfrac{1}{s^2}$，所以

$$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n(n-1)}{s^2}I_{n-2}=\cdots=\frac{n(n-1)\cdots3\cdot2}{s^{n-1}}I_1=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

于是，可得

$$\mathscr{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

(b) 由sine函数和指数函数的关系得

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

故

$$\int_0^\infty\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

则

$$\mathscr{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

(c)和(b)问一样，因为

$$\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

所以

$$\int_0^\infty\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}e^{-st}dt=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

由此得

$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

【1.2】 试证明下列诸定理：

(a) $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

(b) $\mathscr{L}\left[\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}\int_{t_0}^{0}f(\tau)dt$

(c) $\mathscr{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right]=\int_{0}^{\infty}F(s)ds$

式中，$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(s)$。

【解】(a) 先取$n=1$时的情况，根据定义可得

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=\int_0^\infty\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}e^{-st}dt=[f(t)e^{-st}]_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

式中，因为$f(t)$是个可能进行拉普拉斯变换的函数，所以

$$\lim_{t\to\infty}f(t)e^{-st}=0$$

则

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=-f(0)+sF(s) \tag{2}$$

次设

$$\mathscr{L}[f^{(k)}(t)]=s^kF(s)-s^{k-1}f(0)-s^{k-2}f'(0)-\cdots-f^{(k-1)}(0) \tag{3}$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)]&=\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}f^{(k)}(t)\right]=\int_0^\infty\left\{\frac{d}{dt}f^{(k)}(t)\right\}e^{-st}dt\\&=\left[f^{(k)}(t)e^{-st}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty f^{(k)}(t)e^{-st}dt\\&=\left[f^{(k)}(t)e^{-st}\right]_0^\infty+s\cdot\mathscr{L}[f^{(k)}(t)]\end{aligned} \tag{4}$$

式中，因为$f^{(k)}(t)$是个可能进行拉普拉斯变换的函数，故

$$\lim_{t\to\infty}f^{(k)}(t)e^{-st}=0$$

因此，由式(3) 得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)]&=-f^{(k)}(0)+s\mathscr{L}[f^{(k)}(t)]\\&=s^{k+1}F(s)-s^kf(0)-\cdots-f^{(k)}(0)\end{aligned} \tag{5}$$

根据式(2)、(3)、(5)，用数学归纳法便能证明该式。

(b) 由定义得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_{t_0}^{t}f(\tau)dt\right]&=\int_0^\infty\left\{\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau\right\}e^{-st}dt\\&=\left[\left\{\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau\right\}\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt\end{aligned}$$

式中，因$\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$是可能进行的拉普拉斯变换，所以

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau\cdot e^{-st}=0$$

故

$$\mathscr{L}\left[\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} + \frac{1}{s}\int_{t_0}^{0} f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{t_0}^{0} f(\tau)d\tau$$

(c) 由定义得

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

则

$$\int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma = \int_s^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}dtd\sigma = \int_0^{\infty}\int_s^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}d\sigma dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)\left[-\frac{e^{-\sigma t}}{t}\right]_s^{\infty}dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{t}f(t)e^{-st}dt$$

因此，得到该式之证明。

【1.3】 试求下列函数的拉普拉斯变换：

(a) $u(t-a)$　　(c) $\frac{1}{\sqrt{t}}$

(b) te^{-at}　　(d) $\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$

【解】(a) $\mathscr{L}[u(t-a)] = e^{-sa}\mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s}e^{-sa}$

(b) $\mathscr{L}[te^{-at}] = F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2}$　（设　$\mathscr{L}[t] = F(s)$）

(c) $\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

(d) $$\mathscr{L}\left[\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})\right] = \frac{1}{a^2}(a\cdot\mathscr{L}[t] - \mathscr{L}[u(t)] + \mathscr{L}[e^{-at}])$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{s^2(s+a)} = \frac{1}{s^2(s+a)}$$

【1.4】 试求如下函数的拉普拉斯变换：

(a) $\cos(\omega t+\phi)$　　(d) $\frac{\sin 2t}{t}$

(b) $t\sin\omega t$　　(e) $te^{-t}\sin 2t$

(c) $e^{-at}\sin\omega t$

【解】(a) $$\mathscr{L}[\cos(\omega t+\phi)] = \mathscr{L}[\cos\omega t\cdot\cos\phi - \sin\omega t\cdot\sin\phi]$$

$$= \cos\phi\mathscr{L}[\cos\omega t] - \sin\phi\mathscr{L}[\sin\omega t]$$

$$= \cos\phi\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} - \sin\phi\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s\cos\phi - \omega\sin\phi}{s^2+\omega^2}$$

(b) 若设 $F(s) = \mathscr{L}[\sin\omega t]$，则

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

因此，由表1.2的(5) 得

$$\mathscr{L}[t\sin\omega t] = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

(c) 若设$F(s)=\mathscr{L}[\sin\omega t]$，则由表1.2的(7)得

$$\mathscr{L}[e^{-at}\sin\omega t] = F(s+a) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

(d) 因为

$$\mathscr{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2}{s^2+4}$$

所以

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{2}{x^2+4}dx \text{ （见表1.2的(6)）}$$

$$= \left[-\tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)\right]_s^\infty = \tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)$$

(e) 若设$\mathscr{L}[\sin 2t]=F(s)$，那么，因为$F(s)=\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+4}$，所以

$$\mathscr{L}[te^{-t}\sin 2t] = -\frac{d}{ds}F(s+1) \quad \text{［见表1.2的(5)和(7)］}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} = \frac{4(s+1)}{\{(s+1)^2+4\}^2}$$

【1.5】 绘出下列函数的坐标图，并求其拉普拉斯变换：

(a) $f(t)=(t-a)\cdot u(t-a)$

(b) $f(t)=t-a$

【解】(a) $f(t)$的坐标图，如图1.1所示。而其拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[(t-a)u(t-a)] = e^{-sa}\mathscr{L}[t] \quad \text{［见表1.2的(8)］}$$

$$= e^{-sa}\frac{1}{s^2}$$

(b) $f(t)$的坐标图，如图1.2所示。而其拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[t-a] = \mathscr{L}[t] - \mathscr{L}[a] = \frac{1}{s^2} - \frac{a}{s}$$

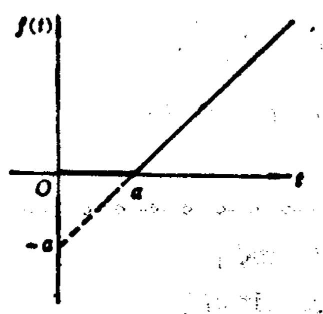

图1.1 $f(t)=(t-a)\cdot u(t-a)$的坐标图

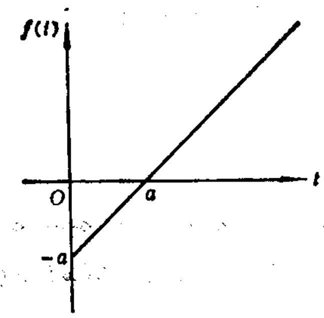

图1.2 $f(t)=t-a$的坐标图

【1.6】 试对下列函数进行拉普拉斯变换：

(a) $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau}d\tau$ (b) $\displaystyle e^{-t}\int_0^t \tau\cos 2\tau d\tau$

【解】 (a) 若设$F(s)=\mathscr{L}[\sin at]$，则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau}d\tau\right]=\frac{1}{s}\cdot\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right] \qquad [\text{见表1.2的(4)}]$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\int_s^\infty F(x)dx \qquad [\text{见表1.2的(6)}]$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\int_s^\infty \frac{a}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

(b)

$$F(s)=\mathscr{L}\left[\int_0^t \tau\cos 2\tau d\tau\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}(t\cos 2t) \qquad [\text{见表1.2的(4)}]$$

$$=\frac{1}{s}\left[-\frac{d}{ds}\mathscr{L}(\cos 2t)\right] \quad [\text{见表1.2的(5)}]$$

$$=-\frac{1}{s}\left[\frac{d}{ds}\ \frac{s}{s^2+4}\right]=\frac{s^2-4}{s(s^2+4)^2}$$

因此，由表1.2的(7)得

$$\mathscr{L}\left[e^{-t}\int_0^t \tau\cos 2\tau d\tau\right]=F(s+1)=\frac{(s+1)^2-4}{(s+1)[(s+1)^2+4]^2}$$

【1.7】 求 $f(t)=b(1-e^{-at})$ 的拉普拉斯变换，并根据初值定理和终值定理，求 $f(0)$及$f(\infty)$。式中，$a>0$。

【解】 因

$$\mathscr{L}[f(t)]=b(\mathscr{L}[1]-\mathscr{L}[e^{-at}])=b\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{ab}{s(s+a)}$$

故

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{ab}{s+a}=0$$

或

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{ab}{s+a}=b$$

【1.8】 试对如下函数作拉普拉斯变换：

(a) $f(t)=\begin{cases}0 & (0<t<a,\ b<t)\\ 1 & (a\leqq t\leqq b)\end{cases}$

(b) $f(t)=\begin{cases}3t & (0<t\leqq 2)\\ 6 & (2<t)\end{cases}$

【解】(a) $f(t)$如图1.3所示，由拉普拉斯变换的定义，得

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_a^b e^{-st}dt=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^b=\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$$

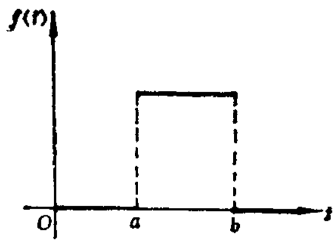

图1.3

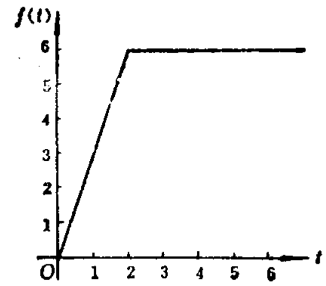

图1.4

(b) $f(t)$如图1.4所示，由拉普拉斯变换的定义，得

$$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{2}3te^{-st}dt+\int_2^{\infty}6e^{-st}dt$$

$$=\left[3t\cdot\frac{e^{-st}}{(-s)}\right]_0^2-\int_0^2\frac{3e^{-st}}{(-s)}dt+\left[\frac{6e^{-st}}{(-s)}\right]_2^{\infty}$$

$$=-\frac{6e^{-2s}}{s}-\left[\frac{3e^{-st}}{s^2}\right]_0^2+\frac{6e^{-2s}}{s}=\frac{3}{s^2}(1-e^{-2s})$$

【1.9】 一具有周期T的周期函数$f(t)$，当$0\leqq t\leqq T$时，如果连续且有界，试证明下式成立。

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau \qquad (1)$$

并且，求出以图1.5和图1.6形式所示之周期函数的拉普拉斯变换。

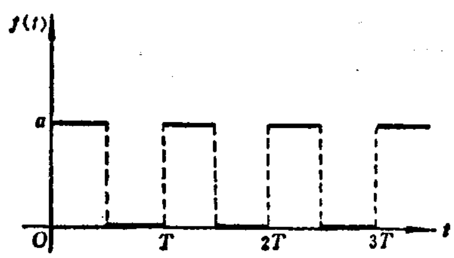

图1.5

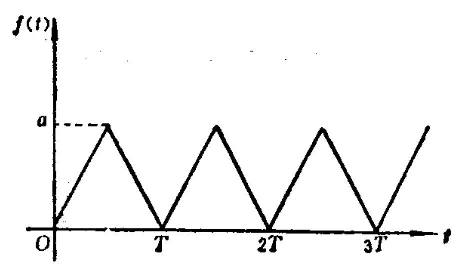

图1.6

【解】 根据拉普拉斯变换的定义及$f(t)$是周期函数，则有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{T}f(t)e^{-st}dt+\int_T^{2T}f(t)e^{-st}dt+\cdots$$

因上式中有如下关系

$$\int_{nT}^{(n+1)T}f(t)e^{-st}dt=\int_0^Tf(\tau+nT)e^{-s(\tau+nT)}d\tau=\int_0^Tf(\tau)e^{-s\tau}e^{-nTs}d\tau$$

$$=e^{-nTs}\int_0^Tf(\tau)e^{-s\tau}d\tau(t=\tau+nT,\ n=0,1,2,\cdots)$$

所以，得

$$\mathscr{L}[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}\int_0^Tf(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^Tf(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

于是，式(1)得证。

进而，因为图1.5的函数是

$$f(t)=f(t+T)=\begin{cases}a & \left(0<t<\dfrac{T}{2}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{T}{2}<t<T\right)\end{cases}$$

所以

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\frac{1}{1-e^{-sT}}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-s\tau}\cdot a d\tau+\int_{\frac{T}{2}}^{T}e^{-s\tau}\cdot 0\cdot d\tau\right\}$$

$$=\frac{a}{1-e^{-sT}}\left[\frac{e^{-s\tau}}{-s}\right]_0^{\frac{T}{2}}=\frac{a}{s}\ \frac{1}{1+e^{-sT/2}}$$

最后，图1.6的函数为

$$f(t)=f(t+T)=\begin{cases}\dfrac{2a}{T}t & \left(0\leqq t\leqq\dfrac{T}{2}\right)\\ \dfrac{2a}{T}(T-t) & \left(\dfrac{T}{2}\leqq t\leqq T\right)\end{cases}$$

由此得

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2a}{T}\tau e^{-s\tau}d\tau+\int_{\frac{T}{2}}^{T}\frac{2a}{T}(T-\tau)e^{-s\tau}d\tau\right\}$$

$$=\frac{2a}{T(1-e^{-sT})}\left\{\left[-\frac{\tau e^{-s\tau}}{s}-\frac{e^{-s\tau}}{s^2}\right]_0^{\frac{T}{2}}+\left[-\frac{(T-\tau)e^{-s\tau}}{s}+\frac{e^{-s\tau}}{s^2}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right\}$$

$$=\frac{2a}{T(1-e^{-sT})}\cdot\frac{(1-e^{-\frac{Ts}{2}})^2}{s^2}=\frac{2a}{Ts^2}\,\frac{1-e^{-\frac{Ts}{2}}}{1+e^{-\frac{Ts}{2}}}$$

$$=\frac{2a}{Ts^2}\tanh\frac{Ts}{4}$$

【1.10】 试将下列各式进行拉普拉斯反变换：

(a) $\dfrac{1}{s(s+a)}$　　(c) $\dfrac{1}{s^2-a^2}$

(b) $\dfrac{1}{(s-a)^n}$　　(d) $\dfrac{s}{(s-a)^2+\omega^2}$

【解】(a)　$F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}\right)$

因此

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{a}(u(t)-e^{-at})$$

(b) 根据$\mathscr{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$，$\mathscr{L}[e^{at}\cdot f(t)]=F(s-a)$ 得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right]=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$$

工程控制