高等数学教材

经济数学

白森林　孙书荣　编著

山东大学出版社

责任编辑:刘旭东
版式设计:赵　岩
责任校对:张华芳

经济数学

白森林　孙书荣　编著

*

山东大学出版社出版发行
济南市市中胜利印刷厂印刷

*

850×1168 毫米　大 32 开本　11.75 印张　295 千字
1996 年 8 月第 1 版　　1996 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—1000
ISBN7—5607—1667—9

O·106　　定价:14.80 元

序

作为研究空间形式与数量关系的科学——数学，从它产生之日到它发展的全过程总密切地联系着经济生活和社会生产，而目前社会主义市场经济蓬勃兴旺的现实已使经济数学成为人们密切注视的一门重要学科。由于经济及其管理日益科学化和现代化，经济工作者们迫切需要用高等数学知识来武装自己。

近年来，经济数学类的书籍虽然已有不少问世，但在内容取舍上常常过于繁杂，使数学基础不足的读者难于接受，有的此类书概念比较模糊，缺乏数学应有的严谨。在通俗易懂与严谨性之间尺度的把握上，白森林与孙书荣编著的本书，掌握适度，使读者既能较顺利地掌握经济数学的基本概念与方法，又能保持逻辑的通达和概念的清晰。

本书共分九章，即函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数以及常微分方程简介。本书的编著者们多年从事成人教育工作和经济数学教学，在这方面已有多篇论文及多部著作问世。本书是他们根据国家教委对成人教育经济类高等数学的要求结合长期教学中积累的经验和资料写成的。在选材上做到了得心应手，恰到好处，既注意到数学应有的完整性和系统性，又兼顾到成人教育应有的应用性和技艺性。书中例题丰富，配合得当，书末除附有近三年来全国自学考试高等数学(1)(财)试题及答案外，还有两套模拟试题和答案。

本书语言流畅,叙述深入浅出,适合成人教育经济类专业及其他专业作为高等数学 80 学时教材或教学参考书,也可作为自学用书。

我们相信,本书的出版必将给人们学习经济数学带来很大的帮助。

李师正
(山东师大数学系主任,教授)
1996 年 1 月

前　言

本书是按照国家教委对经济管理类专业(专科)《高等数学(一)教学大纲》和基础课程教学基本要求的精神编写的。众所周知,高等数学在经济科学、管理科学中有着广泛的应用,著名的边际分析和弹性分析就是以微积分理论为基础的。因此,学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的,而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也是很有必要的。

本书在编写的过程中,注意紧密结合教学实际,根据多年的教学经验,精选内容,淡化某些繁杂形式,注重核心内容,做到观点正确,材料充实,文字深入浅出而富有启发性,既便于教又便于学,力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识。全书以微积分学为核心内容,以一元函数和多元函数为研究对象,以极限理论为工具和理论基础。

为便于读者在自学过程中,抓住每章的重点并测试自己对基本内容的掌握程度,在每一章的最后,都附有内容提要,典型例题分析和自测题及答案。

本书在编写与出版过程中得到刘忠德、邢攸义、韩茂林、李永明先生的大力支持,我们表示诚挚的谢意。

编　者

1995 年 12 月

目　　录

第一章　函　数

函数是高等数学中最重要最基本的概念之一，是客观世界中变量之间的依从关系的反映，是高等数学的主要研究对象。因此，学习高等数学，应先从函数概念开始。

本章主要介绍集合概念、实数的有关概念和性质、函数概念、函数的几种特性、初等函数和经济学中常见的函数等内容。

§1.1　实　数

一、集合

1.　集合的概念

"集合"是现代数学中一个最基本的概念。我们常常研究某些事物组成的集体，例如一班学生、一批产品、全体正整数等等。这些事物组成的集体都是集合，有时简称为集。

一般说来，集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总。构成集合的事物或对象，称为集合的元素。

下面举几个集合的例子

例 1　1995 年 12 月 1 日在济南市出生的人。

例 2　彩电，电冰箱，录像机，摩托车。

例 3　方程 $x^2-5x+6=0$ 的根。

例 4　全体偶数。

例 5　直线 $x+y-1=0$ 上的所有点。

由有限个元素构成的集合，称为有限集合，如例 1、例 2、例 3；

由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例 4、例 5。

通常我们用大写英文字母 A、B、C…… 等表示集合，用小写字母 a、b、c…… 等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记做 $a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中。

例如，若用 F 表示全体有理数的集合，则 $\frac{3}{5} \in F$，$\sqrt{2} \notin F$。

这里讲的集合，具有确定性的特征，即对于某一个元素是否属于某个集合是确定的，“是”或者“不是”二者必居其一。如前面例 2 中的集合是彩电、电冰箱、录像机、摩托车四个对象的汇总。但是假如说“高档消费品”的汇总，则不是我们这里所讨论的集合，因为对构成它的对象是不确定的。

2. 集合的表示法

(1) 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号 $\{\ \}$ 括起来。

例 6　由 a、b、c、d 四个元素组成的集合 A 可表示为

$$A = \{a、b、c、d\}$$

例 7　全体偶数组成的集合 A 可表示为

$$A = \{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\cdots, \pm 2n, \cdots\cdots\}$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复。

(2) 描述法：设 $P(x)$ 为某个与 x 有关的条件或法则，A 为满足 $P(x)$ 的一切 x 构成的集合，则记为 $A = \{x | P(x)\}$

例 8　大于 3 的所有实数组成的集合 A 可表示为

$$A = \{x | x > 3\}$$

有的集合，既可以用列举法表示也可以用描述法表示。如例 7，还可以表示为 $A = \{x | x = 2n, n 为整数\}$。

二、两个集合之间的关系

定义 1 若集合 A 的任意元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，或集合 B 包含集合 A，简记为 $A \subset B$。

若集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称集合 A 是集合 B 的真子集，简记为 $A \subset B$ 且 $A \neq B$。

例 9 设 $A = \{x|x > 3\}, B = \{x|x > 1\}$

明显看出，A 是 B 的子集，且是真子集，即 $A \subset B$ 且 $A \neq B$。

注 (1) 对于任意集合 A，总有 $A \subset A$，即任意集合都是它自身的子集。

(2) 为了集合运算的需要，若集合 A 不包含任何元素，则称集合 A 是空集，简记为 $A = \varnothing$。

规定空集 $\varnothing$ 是任意集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$。

例 10 集合$\{0\}$不是空集，它是由一个元素 0 组成的集合，即 $\{0\} \neq \varnothing$。

定义 2 设 A 与 B 是两个集合，若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$。

注 要证明两个集合 A 与 B 相等，应根据定义，先说明 $A \subset B$，再说明 $B \subset A$。

例 11 设 $A = \{x|x$ 为大于 1 而小于 4 的整数$\}$，$B = \{x|x^2 - 5x + 6 = 0\}$。显然，$A = B$。

三、集合的运算

集合的运算与数的运算一样都来自实践，反映了客观世界中的数量间的关系。

先看一个例子。

例 12 某工地设有一个日用品代销点，代销商品有：香烟、啤酒、糖果、肥皂、洗衣粉、毛巾、牙刷、牙膏、搪瓷杯、手电筒共 10 种。

该店每周进货两次。

某周第一次进货的商品品种集合 $A_1 = \{$香烟、啤酒、肥皂、洗衣粉、搪瓷杯$\}$；第二次进货的商品品种集合 $A_2 = \{$香烟、啤酒、肥皂、毛巾、牙膏、搪瓷杯$\}$。

两次共进的商品品种集合 $B = \{$香烟、啤酒、肥皂、洗衣粉、毛巾、牙膏、搪瓷杯$\}$；两次都进的商品品种集合 $C = \{$香烟、啤酒、肥皂、搪瓷杯$\}$；该周没进货的商品品种集合 $D = \{$糖果、牙刷、手电筒$\}$。

这些关系都是集合间的运算关系。下面给出集合运算的定义。

定义 3 由集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合的并集有下列性质：

(1)$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$

(2) 对任何集合 A，有 $A \cup \varnothing = A, A \cup A = A$

定义 4 由既属于集合 A 的元素同时又属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合的交集有下列性质：

(1)$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

(2) 对任何集合 A，有 $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap A = A$

定义 5 由属于集合 A 的元素，但不属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的差集，记为 $A - B$，即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

例 12 设 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,4,5\}$

则(1)$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$；(2)$A \cap B = \{2,3,4\}$；(3)$A - B = \{1\}$

四、实数集

我们知道，有理数与无理数统称实数。在本书中，如无特别声明，凡数均指实数。全体实数所组成的集合称为实数集，记为 R。

实数集 R 与数轴上的全体点具有一一对应关系，实数充满整个数轴而且没有空隙，这就是说实数集具有连续性。为方便起见，常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示。如点 a 和实数 a 是相同的意思。

五、绝对值

实数 a 的绝对值记为 $|a|$，定义为 $|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

在数轴上，$|a|$ 表示点 a 到原点的距离；$|x-a|$ 表示点 x 到点 a 的距离。

绝对值有以下性质：

(1) $|a| = |-a| \geqslant 0$，当且仅当 $a = 0$ 时，$|a| = 0$

(2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$

(4) $|a| < k$ 等价于 $-k < a < k$

(5) $|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$，称为三角形不等式。

六、区间

设 a、b 是两个实数，且 $a < b$。

数集 $\{x|a < x < b\}$ 称为以 a、b 为端点的开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b) = \{x|a < x < b\}$

数集 $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的闭区间，记为 $[a,b]$，即 $[a,b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$

数集 $\{x|a \leqslant x < b\}$ 和 $\{x|a < x \leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的半

开区间,分别记为$[a,b)$和$(a,b]$,即$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

以上三类区间称为有限区间,$b-a$称为区间的长度。

除了有限区间外,还有无限区间。无限区间的符号及意义规定如下:

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$

$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$;$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}=R$

这里特别指出,$+\infty$和$-\infty$是两个符号,分别读作"正无穷大"和"负无穷大"。

七、邻域

为今后叙述上的方便,下面介绍特殊形式的区间——邻域的概念。

设a为某一定数,δ为正数,数集$\{x||x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域,记为$\bigcup(a,\delta)$,即

$$\bigcup(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

a称为邻域的中心,δ称为邻域的半径。

数集$\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为点a的空心δ邻域,记为$\bigcup^0(a,\delta)$,即

$$\bigcup^0(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta)$$

§1.2 函 数

一、函数的定义

在中学学习过函数,其定义为:设在某个变化过程中,有两个

变量 x 与 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个数值，都有一个确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数。

现在用集合的语言给出函数的严格定义。

定义 1　设 D 为非空数集，R 为实数集。若按某确定的对应法则 f，对每一个 $x \in D$，都有唯一确定的 $y \in R$ 与它对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数，记为

$$f: D \longrightarrow R$$

其中 D 称为函数的定义域，数 x 对应的数 y 称为 f 在 x 的函数值，记为 $f(x)$，即 $y = f(x)$。

全体函数值的集合称为函数的值域，记为 $f(D)$，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset R$$

x 称为自变量，y 称为因变量。

注意　关于函数定义的几点说明：

1. 由函数的定义可知，定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素，从而记号

$$y = f(x), x \in D$$

也就表达了一个实值函数。

我们把对应法则 f 称为函数，把 $f(x)$ 称为函数值，这两者是不同的。如 $y = \sin x$，无论 y 或 $\sin x$ 都不能说是 x 的函数，而是函数值；函数是 sin。在高等数学中，为方便又不导致混乱时，我们一般地不区分函数与函数值，函数可以用 f 也可以用 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 表示，函数值也用 $f(x)$ 表示。

2. 根据函数定义，给出一个函数一定要指出函数的定义域。

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义确定的。

对用抽象的数学式子表达的函数，其定义域是使数学式子有意义的一切实数集合。如 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$，定义域 $D = [-1,1]$。这样一来，函数的要素主要是对应法则 f。把函数简记为 $y = f(x)$，而定义域 D 省略不写，简单地说“函数 $y = f(x)$”或“函数

$f(x)$”。

3. 在函数定义中，每一个 $x \in D$，对应唯一确定的一个 $y \in R$，这样的函数称为单值函数。如果 y 的值不唯一，则称为多值函数。在本书范围内只讨论单值函数。

4. 如果两个函数有相同的定义域和相同的对应法则(对同一定义域中每个自变量值都对应相同的函数值)，则认为它们是同一个函数。否则，认为是不同的两个函数。例如

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

是不相同的函数。而 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x)$ 虽表面形式不同，实质上是相同的。

例 1 若 $f(x) = x^2$，那么有 $f(2) = 2^2 = 4$，$f(a) = a^2$，$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$，$f(-\frac{1}{y}) = (-\frac{1}{y})^2 = \frac{1}{y^2}$，$f[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4$。

二、函数表示法

表示函数方法主要有以下三种：

1. 解析法　当函数的对应法则借助于数学式子给出时，称这种方法为解析法。解析法也称公式法，是我们今后表达函数的主要方法。

例 2 $y = \dfrac{1}{x(x-1)} + \sqrt{9 - x^2}$

这是用公式表示的函数对应法则，它的定义域 $D = [-3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3]$。

注意　一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式子表示。这种形式的函数称为分段函数，在实际应用中经常用到。

例 3 $f(x)=\begin{cases}-1+x^2, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ 1+x^2, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\end{cases}$

是定义在整个数轴上的一个函数，其对应法则是：若 $x\in(-\infty,0)$，则其函数值为 $f(x)=-1+x^2$；若 $x=0$，则 $f(x)=0$；若 $x\in(0,+\infty)$，则其函数值为 $f(x)=1+x^2$。

分段函数是用几个数学式子合起来表示一个函数，而不是几个函数，它的定义域是在各段中 x 取值的全体作成的集合。

2. 列表法　若函数 $f:D\longrightarrow R$ 可用一张含有自变量 x 与函数值 $f(x)$ 的对应值的表格来表示，则称为列表法。列表法也称表格法。

例 4　某城市一年里各月毛线的零售量（单位：百公斤）如下表所列：

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

上表表示了某城市毛线零售量 y 随月份 x 而变化的函数关系。这个函数是用表格表达的，它的定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

3. 图象法　若函数关系通过平面直角坐标系中的一条曲线来表示，这种表示函数的方法称为图象法。

例 5　某气象台用自动记录器将当地某一天的气温变化描绘在记录纸上，曲线形象地反映出在时间 $0\leqslant t\leqslant 24$ 小时内，温度 T 随时间 t 变化的规律。曲线上任意一点 $P(a,b)$ 表示在时间 $t=a$ 时，测得气温 $T=b$。

用解析法表示函数，适宜作运算和理论分析；而列表法可直接查出函数值使用方便；图象法直观性强，容易从图形中看出函数的