

板的稳定理论



肖明心著

四川科学技术出版社

板的稳定理论

肖明心 著

四川科学技术出版社

一九九三年 成都

新登字（川）004号

书 名 / 板的稳定理论

编著者 / 肖明心

责任编辑 梅 红

封面设计 别学超

出 版 四川科学技术出版社
成都盐道街3号 邮编610016

发 行 新华书店重庆发行所

印 刷 中国科技情报所重庆分所印刷厂

版 次 1993年7月重庆第一版
1993年7月第一次印刷

规 格 787×1092毫米 1/32
10印张 210千字

印 数 1—800册

定 价 4.50元

ISBN 7-5364-2462-0/TU·77

前 言

本书是以笔者为研究生编写的讲义“板壳稳定理论”的平板部份为基础加以整理改编而成。可作为研究生的教材，也可作为理工科大专院校有关专业教师和高年级学生以及有关工程技术界人士的参考书。

本书适当地注意了取材的广泛性深入性和现代性，但尤其致力于基本概念、基本原理和基本方法的清楚阐述。对于读者的数学基础和力学基础的要求是适度的，以工科大专高年级学生的水平为准。本书作为教材在近几年试用中，读者普遍反映本书取材适当。行文准确清楚，深入浅出。便于自学。希望读者通过阅读本书对平板稳定理论既可顺利入门，又可奠定坚实的基础。

笔者谨向陈山林教授致谢，他担任了本书的审查工作，笔者在同他的交谈中得益不少。笔者感谢李映辉副教授，他热心地协助笔者编写本书，作了不少具体工作。笔者特别感谢四川科技出版社，在该出版社的鼎力支持下，本书得以同读者见面。

笔者水平有限，书中失误之处在所难免，希广大读者指正。

尚 明 心

1991年11月 于重庆建筑工程学院

目 录

绪论	(1)
§1 稳定的概念	(1)
§2 失稳判断准则	(9)
§3 近代稳定理论	(12)
§4 研究的对象和方法	(14)
第一章 弹性矩形板的稳定性	(16)
§1.1 基本概念和计算假定	(16)
§1.2 位移和应变 应力和力矩	(18)
§1.3 平板屈曲的控制微分方程	(21)
§1.4 四边简支矩形板单向受压时的稳定性 (双三角级数解)	(27)
§1.5 四边简支矩形板双向受压时的稳定性	(34)
§1.6 承载边简支无载边任意支承的矩形板的稳定性 (单三角级数解)	(37)
1.6.1 概述	(37)
1.6.2 两承载边简支两无载边夹支的情况	(39)
1.6.3 两承载边简支两无载边自由的情况	(42)
1.6.4 两承载边简支、第三边简支、第四边自由的情况	(46)
1.6.5 两承载边简支、第三边夹支、第四边自由的情况	(50)
1.6.6 两承载边简支、第三边弹性固定、第四边自由的情况	(52)

1.6.7 两承载边简支、两无载边用弹性梁支承的情况.....	(57)
---------------------------------	------

第二章 能量法及其它近似法..... (61)

§2.1 平板的势能.....	(61)
§2.2 平板弹性稳定问题中的势能极值原理.....	(66)
2.2.1 势能驻值定理.....	(66)
2.2.2 板的平衡的性质及其能量判据.....	(72)
2.2.3 势能极值原理.....	(74)
§2.3 其它能量原理.....	(74)
§2.4 能量法概述.....	(75)
§2.5 四边简支矩形板受顺剪力作用时的稳定性.....	(81)
2.5.1 板不太长的情况.....	(81)
2.5.2 狭长板的情况.....	(85)
2.5.3 估算公式.....	(87)
§2.6 四边简支板在线性变布纵压力作用下的稳定性.....	(88)
§2.7 夹支边矩形板的稳定性.....	(94)
2.7.1 四边夹支矩形板双向受均布压力 P_x 和 P_y 的情况.....	(94)
2.7.2 受均布压力的两承载边夹支两无载边简支的情况.....	(96)
§2.8 矩形板在组合中面荷载作用下的稳定性.....	(97)
2.8.1 简支矩形板受顺剪力及 b 边均布压力联合作用的情况.....	(97)
2.8.2 其它情况的稳定系数.....	(102)
§2.9 加权残值法概述.....	(104)

§2.10	用加权残值法解四边简支板在顺剪力作用下的稳定问题	(108)
§2.11	差分法的应用	(112)
§2.12	有限单元法的应用	(120)
第三章	弹性矩形薄板的后屈曲性能	(132)
§3.1	大变形理论中的应变分量	(132)
§3.2	弹性薄板的有限应变分量及相容方程	(136)
§3.3	卡门方程组	(137)
§3.4	四边简支矩形薄板单向受压时的后屈曲性能	(141)
§3.5	四边夹支薄板b边受压的情况	(160)
§3.6	能量法的利用, 大挠度板的势能	(164)
§3.7	用变分法推导平衡微分方程	(170)
§3.8	两边固定铰支两边活动铰支的正方形薄板的后屈曲性能	(174)
§3.9	缺陷的影响	(182)
第四章	板的非弹性稳定性	(189)
§4.1	柏莱希法	(190)
§4.2	塑性力学变形理论的基本关系式	(196)
§4.3	变形理论(不计卸载)解板的非弹性屈曲问题的控制微分方程	(209)
§4.4	能量法解非弹性板的稳定问题	(216)
§4.5	承受顺剪力作用的非弹性矩形板的屈曲	(221)
§4.6	流动理论解板的非弹性屈曲问题(不计卸载)	(225)
§4.7	各种理论的比较	(231)
第五章	圆形弹性薄板的稳定性	(233)
§5.1	圆形弹性薄板屈曲小挠度理论的控制微分方	

程.....(233)

§5.2 受均布径向压力的圆形薄板的临界力.....(238)

§5.3 能量法解圆形薄板的弹性稳定问题.....(241)

§5.4 伽辽金法解圆形薄板的弹性稳定问题.....(243)

§5.5 圆薄板大挠度理论的控制微分方程.....(246)

§5.6 圆薄板周边受均布径向压力的后屈曲性能...(252)

§5.7 摄动法解圆薄板轴对称屈曲的后屈曲性能问题.....(255)

第六章 正交各向异性板和加劲板的弹性稳定性.....(266)

§6.1 正交各向异性板小挠度屈曲理论.....(266)

§6.2 正交异性简支板在一个主方向受压时的稳定性.....(270)

§6.3 简支正交异性板两弹性主向同时受压时的稳定性.....(278)

§6.4 两受载边简支两无载边夹支的正交异性矩形板,在第一弹性主向受均布压力时的稳定性.....(286)

§6.5 正交异性板的势能.....(284)

§6.6 正交异性简支矩形板在顺剪力作用下的稳定性.....(287)

§6.7 肋杆分布较密的加劲板的稳定性.....(289)

§6.8 各向同性矩形板用肋杆加劲后的稳定性.....(291)

§6.9 各向同性板加劲后在剪力作用下的稳定性...(300)

§6.10 正交异性板加劲后的稳定性.....(304)

绪 论

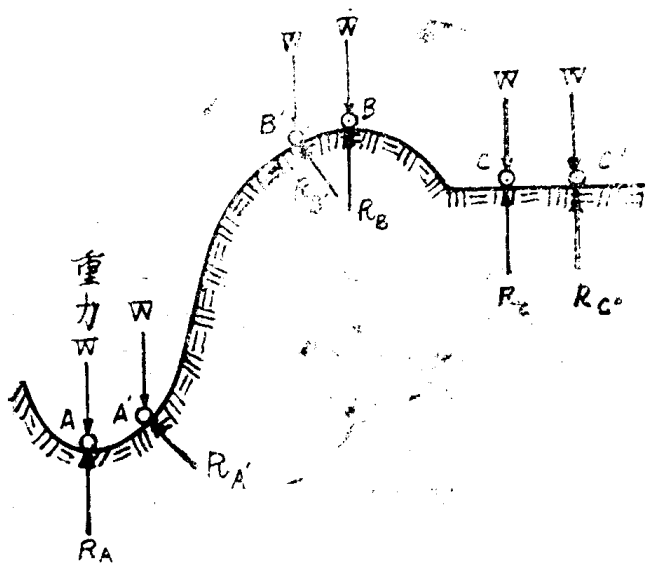
有不少结构物要求其自重尽可能地小，当然同时又希望其承载能力尽可能地大。这类求轻型结构不可避免地要采用细杆、薄板和薄壳这一类的构件。而影响这类构件的承载能力的，关键问题往往是构件的稳定性。在船舶、飞行器、板梁、箱形梁、大型薄壁容器、盒式仪表、机动车辆、施工机械、水闸闸门等结构物中，薄板都得到广泛的采用。本书就是对薄板的稳定性能的基本理论作一比较详尽的阐述。

§1 稳定的概念

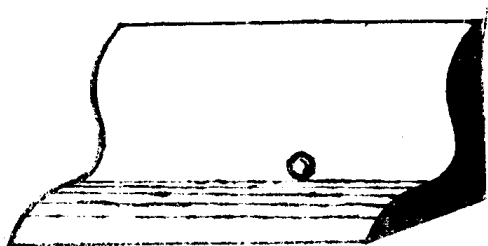
(I) 刚球比拟:

图(1)的刚球在谷底A的平衡是稳定的，因为若以微小干扰，使其移到A'，当干扰撤消后，最终它仍回到A。刚球在峰顶B的平衡是不稳定的，因为若以微小干扰使其移到B'，当干扰撤消后它不能回到B。实际上，即使干扰一出现便撤消，它也将离B而去，直到谷底A才能最终停留于A。刚球在平地C的平衡是随遇平衡，因为，若以微小干扰使其移到邻近一点C'，当干扰撤消后，它将停留不动，就地平衡。

图(2)的刚球的稳定性视方向而异。向前微移，将发现它的平衡是不稳定的，向后微移，将发现它的平衡是稳定的，向左右微移，将发现它的平衡是随遇而安的。



图(1)



图(2)

图(3)示谷由陡渐坦时，刚球的稳定性逐渐丧失，到谷变为平地3—3时，其稳定性失尽，再由平地变为峰时，就不稳定了，因此平地3—3的随遇平衡是稳定平衡同不稳定平衡的界。

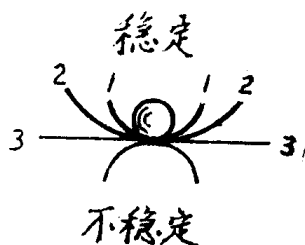
(II) 欧拉压杆的稳定性

当杆绝对挺直，材性均匀，荷载毫无偏心时的压杆称为理想压杆，两端铰支的理想压杆，受轴向压力 P 作用，如图(4)所示，称为欧拉压杆，由公式

$$P_{cr} = \pi^2 EI / L$$

计算其临界荷载。当 $P < P_{cr}$ ，压杆直线位形(轴向压缩)的平衡是稳定的。因为，若用一微小干扰力 F 使它移到中点挠度为 δ 的微弯位形(压弯联合)，当干扰力撤消，它会回到轴向压缩的直线位形去。当 $P > P_{cr}$ ，直线位形的平衡是不稳定的。因为，若干扰它到微弯位形，当干扰力撤消后，它不能回到直线位形去。实际上，在 $P > P_{cr}$ 的情况下，即使干扰刚一出现转瞬之间就立即撤消，杆也会迅速弯曲到某一个 δ 为有限值的曲线位形去(δ 之值可由大挠度理论算出)。当 $P = P_{cr}$ ，直线位形的平衡是随遇平衡。因为，若微小干扰使它到达任何一个十分邻近于直线的微弯位形，当干扰撤消后，它既不能恢复直线位形，也不继续远离直线而去，而是停留不动，就地平衡。

在刚球比拟中，讨论的是如何鉴定刚球在某一位置的平衡的稳定性，鉴定手段是干扰使它微移，判断准则是看干扰撤消后它能否回到所鉴定的位置去。在欧拉压杆的讨论中，



图(3)



图(4)

讨论的是如何鉴定中心压杆的直线位形的平衡形式（或者说轴向压缩的变形形式）的弹性稳定性，其手段是微干扰使其微弯，判断准则是看它在干扰撤消后能否恢复到直线位形。因此，一个系统某一位形的平衡的稳定性，就是系统所具有的坚持该位形的平衡形式（或变形形式）的能力。

（Ⅲ）小挠度理论与大挠度理论

一弹性杆，在作为梁的情况下，它的弯曲理论被人们称为一阶理论。在作为柱（压杆）的情况下，它的（纵）弯曲理论—压杆稳定小挠度理论，被称为二阶理论。梁理论认为，在小挠度情况下，变形后梁上的横向荷载的位置与变形前相同，所以它取脱离体是从变形前的位形中取，因此平衡方程式中不出现挠度。柱理论认为，即使在小挠度情况下，挠度对平衡的影响（人们称之为 $P-\delta$ 效应）也是必须考虑的，看一看图(4)就会确信这一点。因此，在柱理论中，总是从变形后($\delta \neq 0$)的微弯位形去取脱离体。

弹性稳定的大挠度理论叫做三阶理论，它与小挠度理论的区别在于它采用了比较精确的变形参量（应变、曲率等）的表达式。小挠度理论只能求出临界应力，对于超临界后的系统的力学行为的探讨无能为力。而大挠度理论则能阐明弹性系统稳定问题的全过程，包括临界应力和超临界后的力学行为。

（Ⅳ）分叉点失稳

图(4)所示理想中心压杆的轴向荷载 P 与中点挠度 δ 的关系曲线是图(5)中 $P-\delta$ 坐标系中的OA直线和AB曲线。其中，AB曲线是根据大挠度理论计算得出的。由此图可见，在 $P > P_c$ 后， P 和 δ 基本上还是单值对应关系，设 P 值等于图中的

$OD > P_{cr}$ ，从理论上讲，若无丝毫干扰，压杆仍可在直线位置平衡，但稍一干扰，它就要完成 $\delta = DD'$ 的中点挠度而弯曲，这就是不能停留于微弯位形的原因。因此 $(P = OD, \delta = 0)$ 的平衡是不稳定的。

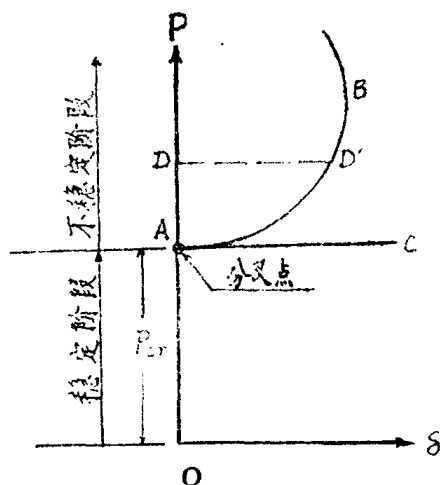


图 (5)

人们把 (P, δ) 点的发展曲线称为平衡途径。当 $P < P_{cr}$ ，压杆的平衡途径为 OA ，当到达 A 点后，若不加干扰，它将沿 AD 途径发展，若加以干扰，它将沿曲线途径 AB 发展。 A 点因此称为分叉点。这种失稳也就称为分叉点失稳。临界荷载又名分叉点荷载。应该强调指出， AB 曲线在 A 点的切线是水平的，因此，至少在 δ 等于一阶无穷小的范围内， A 点附近的曲线可用一段水平直线代替，实际上的曲线在 A 点附近有相当长的一段都很平坦，因此，可以认为这段代替曲线的水平直线的长度是有限量。因此，在二阶理论中，认为在失稳过程中，荷载之值 $P = P_{cr}$ 保持不变。这也就是说，同一个荷载 $P = P_{cr}$ 所对应的 δ 值不是唯一的， δ 值这种非唯一性或不定性或多值性，是杆件的弹性失稳的基本特点。因为这种多值性中包括 $\delta = 0$ ，所以我们说，当 $P = P_{cr}$ ， δ 既可等于零（当干扰 $F = 0$ ），杆在直线位置平衡，又可以等于一系列其它一阶无穷小量（当有微干扰），杆

在一系列微弯位置平衡。因此这是随遇平衡。这里应该强调的是 δ 等于一阶无穷小，因为从 $\delta=0$ 不可能求得临界荷载，更无从探讨超临界系统的力学行为，只有从 δ 等于任意一阶无穷小，才能跨进二阶理论之门。 δ 的两可性，刻划了临界状态的本质。

(V) 局部失稳

一根长中心受压柱，假设是由若干桁杆组成的桁架式柱，若在压力达到某值时整个柱子失稳，这叫整体失稳。若只有某一个别受压桁杆失稳，就是局部失稳。一根薄板工字钢杆受中心压力作用，若只有某一翼板失稳，腹板仍然保持平直，这也是局部失稳。有时局部失稳也可使整个杆件丧失继续工作的能力。薄壳的破坏多由局部失稳造成，失稳时其某些局部出现凹凸皱痕。

(VI) 梁柱 极值点失稳

梁柱是受横向荷载（包括集中弯矩和分布弯矩，例如支承处的支反力偶）和轴向压力联合作用的杆件。按小挠度理论，当其轴力达到轴力单独作用将引起失稳的临界值时，梁柱的中点挠度将等于无穷大。以“小”挠度理论去预言大挠度现象当然不恰当，但可以断定，能使梁柱的中点挠度成为无穷大的轴向压力必然是临界压力。利用这个道理来求临界力的方法，叫做微扰动法。参阅图(6)的(a)和(c)。

中心压杆在稳定阶段 $\delta=0$ ，但梁柱从一开始就有挠度。

杆件本身的缺陷对压杆的行为影响很大，这些缺陷有人把它统一折算成压力的偏心，也有人把它统一折算成初弯曲，不论是偏心压杆还是有初弯曲的压杆，都是从一开始受力就出现挠曲，当压力达到相应的理想中心压杆的临界力值时，

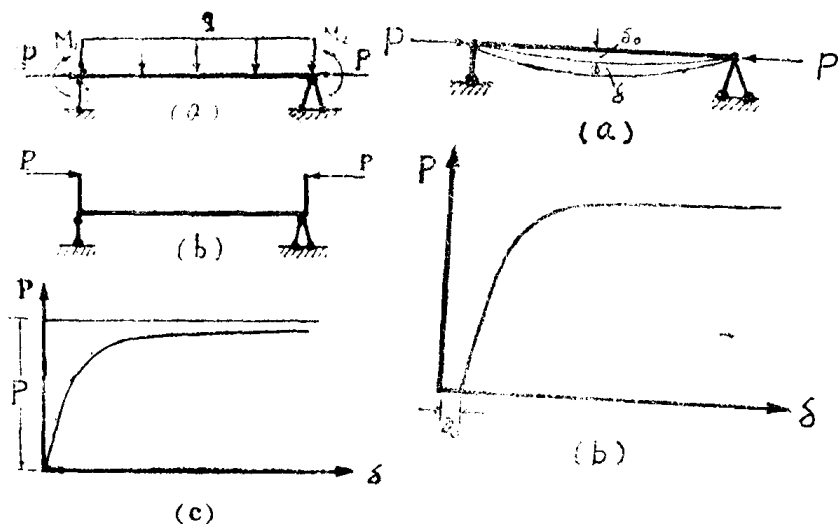


图 (6)

图 (7)

若按小挠度理论计算，它的挠度都趋于无穷大。利用这个道理来求临界力的方法叫做缺陷法。参阅图(6b,c)和图(7)。

由于轴力的 $P-\delta$ 作用，从开始加载就有挠度的梁柱（有初弯曲的柱和偏心受压柱也属梁柱范畴）其挠度增加必然很快。因而小挠度理论迅速失效，当材料是永远弹性的，可以用大挠度理论去研究它的 $P-\delta$ 关系。当材料是弹塑性的，可用小/或大挠度理论研究其弹性阶段，用弹一塑性理论研究其弹塑性阶段，在弹塑性阶段，杆内有一定的塑性区。

在图(8)中，OABC是永远弹性材料理想的中心压杆的 $P-\delta$ 曲线。OABD是弹塑性材料理想的中心压杆的 $P-\delta$ 曲线。前者全是按大挠度弹性理论算得，后者的 $\widehat{BD}$ 段是由弹塑性理论算得。曲线①是刚塑性材料理想的中心压杆的 $P-\delta$ 曲线，其附属的 $\sigma-\epsilon$ 图中， σ_s 是屈服极限，曲线②是梁柱的 $P-\delta$ 曲线，是按小挠度理论算得的。曲线③是有缺陷的中心

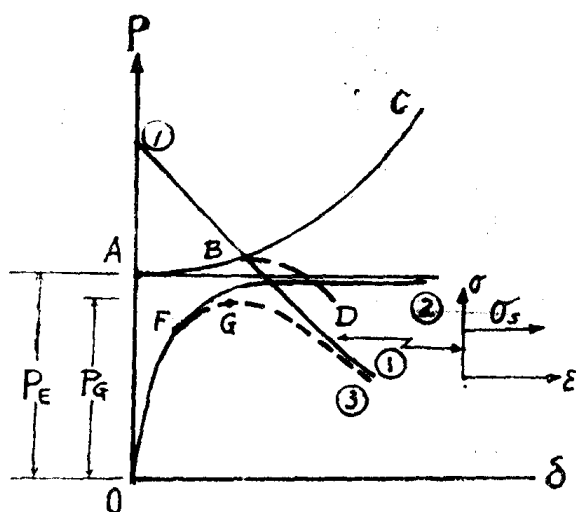


图 (8)

压杆或梁柱的实际的 $P-\delta$ 曲线。图中的纵标 P_E 是欧拉荷载($\pi^2 EI/L^2$)。在这些曲线中，我们要强调曲线③，因为它是实际的 $P-\delta$ 曲线。

曲线③的特点是有一个极值点 G ，前半截 OFG 是上升阶段的曲线， G 之后是下降曲线。纵坐标 P_G 代表荷载所能到达极大值，也是极限值。当荷载 P 达此极值后，挠度将自动地急剧地增大，并不需要增大荷载，不但无需增大，使挠度继续发展所需荷载的总值反而不断减小。这样，杆件迅速溃折。这种现象的后果一般是灾难性的，这就是下降曲线所代表的物理意义。这种挠度发展失控的现象也叫失稳，并称之为极值点失稳。许多文献把分叉点失稳叫做第一类稳定问题，把极值点失稳叫做第二类稳定问题。 P_G 是第二类稳定问题的极值点荷载。

也可以认为, 当 $P=P_G$, 梁柱就再也不能维持压弯 联合的平衡形式。这样, 一个系统的稳定性代表系统坚持其平衡形式的能力的提法也适用于第二类稳定问题。

对于本书所说的薄板而言, 重点是第一类稳定问题。

板除了受压失稳而外, 也有受压弯联合作用的失稳问题, 和受剪切作用的失稳问题。此外, 在金属成形工艺中还有压延失稳问题, 就不属本书范围了。拉伸试件的颈缩现象也是一种失稳问题, 同上文所说极值点失稳有相似之处。但亦不属本书范围。

§2 失稳判断准则

(I) 静力准则

上一节的刚球比拟和压杆稳定, 实际上已讲了判断失稳的静力准则 (或静力判据), 现叙述此准则如下。

要鉴定系统某一位形的平衡是否到达临界状态, 可考查与该位形无限邻近的相邻位形是否平衡。如果是, 就可判定所鉴定的位形的平衡形式已到达临界状态。

(II) 能量准则

假定系统是保守的, 外力也是有势的, 系统的势能 Π 表示, Π 包括系统的形变能 U 和外力所作的功 V 。即 $\Pi=U+V$

在刚球比拟中, 刚球处在重力场中, 谷底A处的 刚球的平衡是稳定的, 因为谷底最低, 刚球在那里的势能 Π_A 为 极小, 刚球总是从高处向低处运动, 即从势能较大处向势能较小处运动, A' 处高些, $\Pi_{A'} > \Pi_A$, $\Delta \Pi_{A'} = \Pi_{A'} - \Pi_A > 0$ 。刚球在A' 不能停留, 要向 A 运动。刚球在峰顶B的势能最大, $\Pi_B =$