高中数学

概念·公式·定律

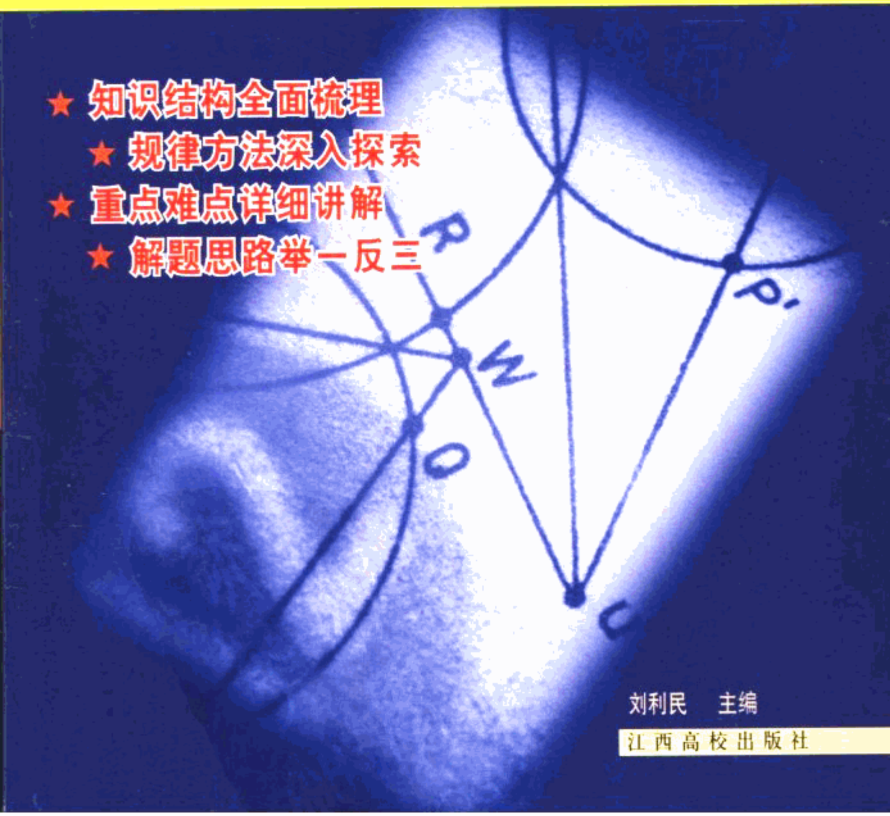
应用范例

★ 知识结构全面梳理

★ 规律方法深入探索

★ 重点难点详细讲解

★ 解题思路举一反三



刘利民 主编

江西高校出版社

前言

《高中数学概念·公式·定律应用范例》是根据国家教委最新颁发的全日制中学数学教学大纲的要求，紧扣中学现行的这门学科统编教材的内容，针对教学大纲的实际需要以及高考的考试说明进行编写。全书的编写内容涵盖本学科全部知识要点，包括有关的图形、表格及公式、定律的应用范围、注意事项等；对一些容易出现的错误，以及纠正方法、记忆方法等也进行了比较全面的介绍，同时对每个重要的、难以理解的知识点匹配了相应的典型范例加以剖析，给出示范，帮助理解与掌握，提高解题的能力。

本书在编写时，充分注意了学科的系统性、顺序性和逻辑性。基本按照学生学习新课的顺序，将课堂上教师应该板书、学生应该掌握的基本内容汇编成册，突出学科的系统性、实用性，同时弥补了有些学生课堂笔记的不全。可以认为，拥有了这本书，可以将做课堂笔记的时间用在听取、理解老师的讲解上。因此，它既是学生随堂听课的工具书，也是学生复习时系统的参考书。本书集理论知识和理论知识应用于一体，突出知识应用的特点，是一本对教师、学生理解和掌握数学基础知识，解决实际问题，提高课堂效率、学习效率，培养能力都有帮助的应用性复习教学辅导书。

本书每节分两个知识板块，一是"概念公式定律"：归纳、分析、解释知识点，通俗、简练，是教材的精髓；二是"应用范例详解"：借典型例题的剖析对重要知识点进行诠释，帮助读者掌握本知识点的考查特点、解题思路、方法、技巧，力求能举一反三、触类旁通。本书源于教材，高于教材，切中重点、难点，自成体系，便于自学。

本书在编写过程中，曾参阅了大量的资料、文献，在此向有关作者和出版单位表示衷心的感谢！

由于水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002年2月5日

目 录

第一章　集合与简易逻辑

概念公式定律

一、集合

[**集合**]　集合是一个不定义的原始概念，只能作描述性的说明. 某些指定的对象集在一起就成为一个集合(简称集).

[**元素**]　集合里的各个对象叫做这个集合的元素.

[**属于**]　如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a \in A$.

[**不属于**]　如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$(或 $a \overline{\in} A$).

[**常用数集的记号**]

全体非负整数的集合简称非负整数集(或自然数集)，记作 $\mathbf{N}$.

非负整数集内排除 0 的集，简称正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$.

全体整数的集合简称整数集，记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数的集合简称有理数集，记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数的集合简称实数集，记作 $\mathbf{R}$.

全体复数的集合简称复数集，记作 $\mathbf{C}$.

$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集.

$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集.

[**有限集**]　含有有限个元素的集合叫做有限集.

[**无限集**]　含有无限个元素的集合叫做无限集.

[**空集**]　不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

[**集合元素的性质**]

1. 确定性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的. 即一个元素，或者属于该集合，或者不属于该集合，二者必居其一.

2. 互异性：集合中的元素是互异的，任何两个相同的对象在同一个集合中，只能算作这个集合的一个元素.

3. 无序性：集合中的元素是没有顺序的. 例如，$\{3,4,5\}$ 与 $\{5,4,3\}$ 是同一个集合.

[**集合的表示方法**]

1. 列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，

叫做列举法. 例如,不等式 $x<3$ 的自然数解集用列举法表示为 $\{0,1,2\}$.

2. 描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做描述法. 例如,不等式 $x<3$ 的自然数解集用描述法表示为 $\{x\in\mathbf{N}\mid x<3\}$.

[子集]　对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

若 A 不是 B 的子集,记作 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$).

[集合相等]　对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,称 A、B 两集合相等,记作 $A=B$.

[真子集]　对于两个集合 A 与 B,若 $A\subseteq B$,并且 $A\neq B$,称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

注意:空集是任何集合的子集,即对任何集合 A,有 $\varnothing\subseteq A$.

空集是任何非空集合的真子集,即若 $A\neq\varnothing$,则 $\varnothing\subsetneqq A$,任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$.

对于集合 A、B、C:

若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

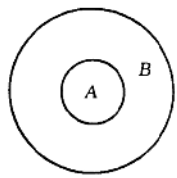


图 1-1

[文氏图]　用一条封闭曲线直观地表示集合及其关系的图形称为文氏图(也称韦恩图). 如图 1-1 表示 $A\subsetneqq B$.

[交集]　由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B"(图 1-2),即

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

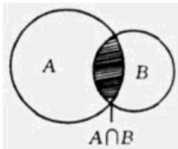


图 1-2

注意:对于任意集合 A、B 有:

$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$.

[并集]　由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B"(图 1-3),即

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

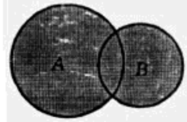


图 1-3

注意:对于任意集合 A、B 有:$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup B=B\cup A$.

用 $\mathrm{card}(A)$ 表示有限集合 A 的元素个数,有:

$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(其

中 B 也为有限集).

[全集]　如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,通常用 $\cup$ 表示.

[补集]　设 S 是一个集合,$A \subseteq S$,由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 C_SA(图 1-4),即

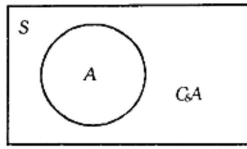


图 1-4

$C_SA = \{x \mid x \in S$ 且 $x \notin A\}$.

注意:对于集合 A,有

$S \cup A = S, S \cap A = A$,

$A \cup C_SA = S, A \cap C_SA = \varnothing, C_S(C_SA) = A$　(其中 S 为全集).

[集合的运算与运算律]

1. 交换律:$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$.

2. 结合律:$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

　　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3. 分配律:$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

　　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. 反演律:$C_U(A \cup B) = C_UA \cap C_UB$.

　　$C_U(A \cap B) = C_UA \cup C_UB$.

[绝对值不等式]　含有绝对值符号的不等式叫做绝对值不等式.

[绝对值不等式的解法]　把原不等式转化为不含绝对值符号的等价不等式(组)求解,转化方法有

1. 若 $a \in \mathbf{R}^+$,那么

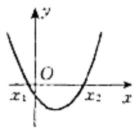
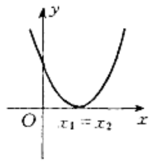
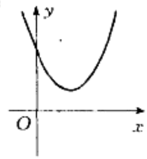
$|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$.

$|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$.

2. 利用绝对值的定义,找出使每个绝对值为零的点,然后分段讨论.

[一元二次不等式]　含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的不等式,叫做一元二次不等式,它的一般形式是 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0(a \neq 0)$.

[一元二次不等式的解法]　一般形式下的一元二次不等式的左端是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$,其图像是抛物线,如下表所示,一元二次不等式与二次函数、一元二次方程有着密切联系.

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ 的图像				
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ 的根		有两相异实根 x_1、x_2，即 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 < x_2$	有相等两实根 $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	无实根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ $(a > 0)$	$\{x \mid x < x_1$ 或 $x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\dfrac{b}{2a}\}$	**R**
	$ax^2 + bx + c < 0$ $(a > 0)$	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

注意：对于二次项系数是负数(即 $a < 0$)的不等式，可先把二次项系数化成正数，再求解.

二、简易逻辑

[命题]　可以判断真假的语句叫做命题.

[逻辑联结词]　“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

[简单命题]　不含逻辑联结词的命题叫做简单命题.

[复合命题]　由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

[真值表]　表示命题的真假的表叫做真值表.

1. 非 p 形式复合命题的真假可以用下表表示：

p	非 p
真	假
假	真

2. p 且 q 形式复合命题的真假可以用下表表示：

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

3. p 或 q 形式复合命题的真假可以用下表表示：

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

[四种命题]

原命题：若 p 则 q.

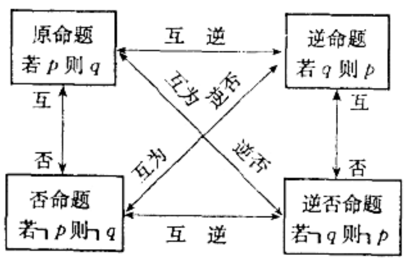
逆命题：若 q 则 p.

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$.

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

其中 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定.

[四种命题之间的相互关系]



原命题为真，它的逆命题、否命题不一定为真，它的逆否命题一定为真.

[用反证法证明命题的一般步骤]

1. 假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立.

2. 从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾.

3. 由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

[充分条件与必要条件]　如果已知 $p \Rightarrow q$，那么我们说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

[充要条件]　如果已知 $p \Leftrightarrow q$，那么我们说，p 是 q 的充要条件.

应用范例详解

【例 1】　设集合 $A = \{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$，试用列举法表示集合 A.

分析　要明确集合中的元素是点.

解答　由 $x + y = 6$，且 $x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*$ 知 $x = 1、2、3、4、5$ 对应的 $y = 5、4、3、2、1$.

所以 $A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$.

【例 2】　设 $A = \{x \mid \frac{6}{2 - x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{Z}\}$，试用列举法表示集合 A.

分析　不要误把 $\frac{6}{2 - x}$ 的值作为集合中的元素.

解答　集合 A 以 x 为元素，且 x 使 $\frac{6}{2 - x}$ 是一个整数，

因此 $|2 - x|$ 必须是 6 的约数，从而得 $A = \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}$.

【例 3】　已知 $A = \{y \mid y = -x^2 + 2x - 1, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{y \mid y = 2x + 1, x \in \mathbf{R}\}$，求 $A \cap B$，并判断集合 A 与集合 B 的关系.

分析　此题容易误认为 $A \cap B$ 是抛物线 $y = -x^2 + 2x - 1$ 与直线 $y = 2x + 1$ 的交点组成的集合. 注意到代表元素是 y，故本题是求两个函数值域的交集.

解答　因为 $y = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$，

所以 $A = \{y \mid y \leqslant 0\}$.

因为 $y = 2x + 1 (x \in \mathbf{R})$，

所以 $B = \mathbf{R}$，$A \cap B = \{y \mid y \leqslant 0\}$.

而 $A \cap B = A$，故 $A \subsetneqq B$.

【例 4】　已知全集 $U = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \geqslant 0\}$，$A = \{x \mid |x - 2| > 1\}$，$B = \{x \mid \frac{x - 1}{x - 2} \geqslant 0\}$，求：$C_U A$，$C_U B$，$A \cap B$，$A \cup B$，$A \cap (C_U B)$，$(C_U A) \cap B$.

分析　进行集合的运算时要借助数轴，特别要注意各集合端点的值.

解答　因为 $U = \{x \mid x \leqslant 1 \text{ 或 } x \geqslant 2\}$，

$A = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$，

$B=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$,

所以$C_UA=\{x\mid x=1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 3\}$,

$C_UB=\{2\}$,

$A\cap B=\{x\mid x<1$ 或 $x>2\}$,

$A\cup B=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$,

$(C_UA)\cap B=\{x\mid 2<x\leqslant 3$ 或 $x=1\}$,

$A\cap(C_UB)=\varnothing$.

【例 5】 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0\}$,若 $A\cup B=A$,求 a 的值组成的集合.

分析 因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,B 中元素均属于 A,故可用 A 中元素代入 B 中求出相应的 a 值,再予检验.

解答 $A=\{1,2\}$.

(1) 若 $1\in B$,则 $2\times 1^2-a+2=0$,得 $a=4$.

当 $a=4$ 时,$B=\{1\}\subseteq A$,所以 $a=4$.

(2) 若 $2\in B$,则 $2\times 2^2-2a+2=0$,得 $a=5$.

当 $a=5$ 时,$B=\{x\mid 2x^2-5x+2=0\}=\{2,\frac{1}{2}\}\nsubseteq A$,所以 $a=5$ 不合题意.

(3) 若 $B=\varnothing$,则 $a^2-16<0$,得 $-4<a<4$,此时 $B\subseteq A$.

综上所述,a 的值的集合为$\{a\mid -4<a\leqslant 4\}$.

【例 6】 求满足$\{m\}\subseteq A\subsetneqq\{m,n,p\}$ 的集合 A.

分析 集合 A 满足两个条件:(1)$\{m\}$ 是 A 的子集.(2)A 是$\{m,n,p\}$ 的真子集.故可依据 A 的元素个数进行分类列举.

解答 若 A 中只含一个元素,则 $A=\{m\}$.

若 A 中含两个元素,则 $A=\{m,n\}$ 或$\{m,p\}$.

由于 $A\subsetneqq\{m,n,p\}$,所以 A 中不可能含 3 个元素.

故满足条件的集合 A 为$\{m\}$ 或$\{m,n\}$ 或$\{m,p\}$.

理解数学符号的含义是解题的关键.

【例 7】 解下列不等式:

(1) $\frac{|3x-1|-2}{2}>\frac{|1-3x|+1}{3}$.　(2)$1\leqslant|3-2x|<5$.

解答 (1) 原不等式可变形为 $3|3x-1|>2|3x-1|+8$,

即 $|3x-1|>8$,

所以 $3x-1>8$ 或 $3x-1<-8$，$x>3$ 或 $x<-\frac{7}{3}$.

因此原不等式的解集为 $\{x \mid x<-\frac{7}{3}$ 或 $x>3\}$.

(2) 原不等式可变形为 $1\leqslant|2x-3|<5$，

所以 $1\leqslant 2x-3<5$ 或 $-5<2x-3\leqslant-1$，

$2\leqslant x<4$ 或 $-1<x\leqslant 1$.

因此原不等式的解集为 $\{x \mid -1<x\leqslant 1\}\cup\{x \mid 2\leqslant x<4\}$.

【例 8】　解下列不等式：

(1) $|x-3|<|2x-1|$.　(2) $|2x+1|+|x-2|>4$.

分析　(1) 因不等式两边均有绝对值符号，故两边平方求解；而(2) 则应令绝对值符号内的代数式为零，划分区域讨论求解，各段的解集最后求并集即为原不等式的解集.

解答　(1) $|x-3|<|2x-1| \Leftrightarrow (x-3)^2<(2x-1)^2$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2-(2x-1)^2<0$$

$$\Leftrightarrow (3x-4)(x+2)<0$$

$$\Leftrightarrow x<-2 \text{ 或 } x>\frac{4}{3}.$$

所以原不等式的解集为 $\{x \mid x<-2$ 或 $x>\frac{4}{3}\}$.

(2) 当 $x\geqslant 2$ 时，由 $2x+1+x-2>4$，得 $x>\frac{5}{3}$.

当 $-\frac{1}{2}<x<2$ 时，由 $2x+1-x+2>4$，得 $x>1$.

当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，由 $-2x-1-x+2>4$，得 $x<-1$.

综上所述，原不等式的解集为 $\{x \mid x>1$ 或 $x<-1\}$.

【例 9】　已知关于 x 的不等式 $\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$ 的解集为 $\{x \mid 4<x<m\}$，求实数 a 和 m 的值.

分析　令 $t=\sqrt{x}$，则不等式变形为一元二次不等式，其解集随之变化.

解答　令 $t=\sqrt{x}$，则 $t\geqslant 0$，原不等式变形为 $t>at^2+\frac{3}{2}$.

整理得到 $at^2-t+\frac{3}{2}<0$，因为 $4<x<m$，所以 $x<t<\sqrt{m}$.

依题意，2 和 $\sqrt{m}$ 是一元二次方程 $at^2-t+\frac{3}{2}=0$ 的两个实根，将 2 代入方程，则 $a\cdot 2^2-2+\frac{3}{2}=0$，故 $a=\frac{1}{8}$.

将 $a=\frac{1}{8}$ 代入原方程求出方程两根为 2 和 6.

所以 $m=6^2=36$.

用换元法时需注意新变量的范围.

【例 10】 已知 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+(p+2)x+1=0\}$,且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 p 的取值范围.

分析 $A\cap R^+=\varnothing$ 的含义是 A 中元素也即一元二次方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的根中没有一个是正值,特别需要注意的是,集合 A 可能是空集.

解答 (1) 当 $A=\varnothing$ 时,即一元二次方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 没有实根时,$\Delta<0$ 成立.

即 $(p+2)^2-4x\mid x\mid<0$, $-4<p<0$.

(2) 当 $A\neq\varnothing$ 时,一元二次方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的两实根应满足 $x_1\leqslant0$,且 $x_2\leqslant0$,故有

$$\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\x_1+x_2\leqslant0,\\x_1\cdot x_2\geqslant0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}(p+2)^2-4\geqslant0,\\-(p+2)\leqslant0,\\1\geqslant0.\end{cases}$$

所以 $p\geqslant0$.

综上所述,p 的取值范围为 $p>-4$.

【例11】 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x\mid x<\alpha$ 若 $x>\beta\}$ $(\alpha<\beta<0)$,求不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集.

分析 从一元二次不等式的解集与一元二次方程的根之间的关系入手,要考虑根的大小及开口方向.

解答 已知 $x_1=\alpha$、$x_2=\beta$ 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,且 $a<0$,

得 $-\frac{b}{a}=\alpha+\beta$, $\frac{c}{a}=\alpha\beta$,

所以 $b=-a(\alpha+\beta)$, $c=a\cdot\alpha\beta$.

代入不等式 $ax^2-bx+c>0$ 得

$ax^2+a(\alpha+\beta)x+a\cdot\alpha\beta>0$,

$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$,

$(x+\alpha)(x+\beta)<0$.

又 $\alpha<\beta<0$,所以 $-\alpha>-\beta>0$.

故不等式 $(x+\alpha)(x+\beta)<0$ 的解集为 $\{x\mid-\beta<x<-\alpha\}$.

即不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid-\beta<x<-\alpha\}$.

【例12】 实数 m 取什么值时，关于 x 的一元二次方程 $7x^2-(m+13)x+m^2-m-2=0$ 的两实根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<1<x_2<2$.

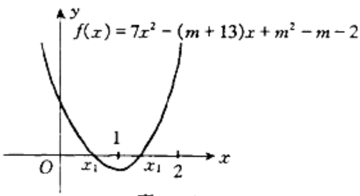


图 1-5

分析 本题属于一元二次方程根的分布问题，故可用数形结合法求解.

解答 构造二次函数 $f(x)=7x^2-(m+13)x+m^2-m-2$，则该函数的图像与 x 轴的两个交点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$ 的位置由 $0<x_1<1<x_2<2$ 确定，如图 1-5 所示.

依题意，m 须满足：

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)>0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m^2-m-2>0, \\ 7-(m+13)+m^2-m-2<0, \\ 7\times2^2-2(m+13)+m^2-m-2>0. \end{cases}$$

解得 $-2<m<-1$ 或 $2<m<4$.

【例 13】 已知两个命题，p:方程 $x^2-4=0$ 的两根都是实数，q:方程 $x^2-4=0$ 的两根相等.试写出这组命题构成的"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题，并判断它们的真假.

分析 由简单命题组成的复合命题的真、假可利用真值表进行判定.

解答 p 或 q:方程 $x^2-4=0$ 的两根都是实数或两根相等.

因为 p 真 q 假，所以 p 或 q 为真命题.

p 且 q:方程 $x^2-4=0$ 的两根是相等的实数根.

因为 p 真 q 假，所以 p 且 q 为假命题.

非 p:方程 $x^2-4=0$ 的两根不都是实数.

因为 p 真，所以非 p 为假命题.

【例 14】 已知 p: $|3x-4|>2$，q: $\frac{1}{x^2-x-2}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件？

分析 将条件 p 与 q 化简，然后写出 $\neg p$ 与 $\neg q$，再作出判断.

解答 因为 $|3x-4|>2 \Leftrightarrow x>2$ 或 $x<\frac{2}{3}$，

所以 $\neg p$: $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$.

又因为 $\frac{1}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x>2$ 或 $x<-1$，

所以 $\neg q: -1 \leqslant x \leqslant 2$.

又因为 $\neg p \Rightarrow \neg q$ 但 $\neg q \nRightarrow \neg p$,

所以 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分但不必要条件.

【例 15】 已知 p、q 都是 r 的必要条件. s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件. (1) s 是 q 的什么条件. (2) r 是 q 的什么条件. (3) p 是 q 的什么条件.

分析 根据定义,考察 p、q、r、s 的互推关系.

解答 因为

$$\begin{tikzcd} q \arrow[dr, Rightarrow] & r \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & p \\ & s \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

由图中的关系可知:(1) s 是 q 的充要条件. (2) r 是 q 的充要条件. (3) p 是 q 的必要条件.

【例 16】 某校有学生 m 人,其中会骑自行车的有 a 人,会游泳的有 b 人,既会骑自行车又会游泳的有 c 人,求既不会骑自行车也不会游泳的学生人数.

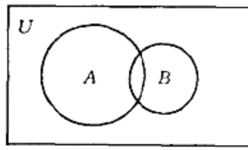


图 1-6

分析 用封闭的曲线表示集合,能直观反映集合之间的关系,这种图叫做韦恩图(图 1-6),本例要用到公式:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

解答 设 $U = \{$某校全体学生$\}$, $A = \{$会骑自行车的学生$\}$, $B = \{$会游泳的学生$\}$,则 $A \cap B = \{$即会骑自行车又会游泳的学生$\}$, $C_U = (A \cup B) = \{$既不会骑自行车又不会游泳的学生$\}$.

因为 $\text{card}(U) = m$, $\text{card}(A) = a$, $\text{card}(B) = b$, $\text{card}(A \cap B) = c$,

所以
$$\begin{aligned} \text{card}[C_U(A \cup B)] &= \text{card}(U) - \text{card}(A \cup B) \\ &= \text{card}(U) - [\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)] \\ &= m - [a + b - c] \\ &= m - a - b + c. \end{aligned}$$

所以既不会骑自行车也不会游泳的学生有 $(m - a - b + c)$ 人.

【例 17】 已知命题 A:"如果 a、b 全是偶数,那么 $a + b$ 也一定是偶数",试写出 A 的逆命题、否命题和逆否命题,并判断它们是真命题还是假命题.

分析 对于一个命题,可写成"如果……那么……"或"若……则……"的形式,我们把"如果"和"若"后面的话称为"条件",把"那么"和"则"后面的话称为"结论". 对于逆命题,只须将原命题的条件和结论对调即可. 对于否命题,只须将原命题的条件和结论同时否定即可. 对于逆否命题,则须将上述两个交换一起

进行才行.

解答 A 的逆命题:如果 $a+b$ 是偶数,那么 a、b 全是偶数.

A 的否命题:如果 a、b 不全是偶数,那么 $a+b$ 不是偶数.

A 的逆否命题:如果 $a+b$ 不是偶数,那么 a、b 不全是偶数.

其中 A 和 A 的逆否命题为真命题,A 的逆命题和 A 的否命题为假命题.

【例 18】 已知 p、q、r 为正实数,求证:关于 x 的三个一元二次方程.

$$\begin{cases}8x^2-8\sqrt{p}x+q=0,\\ 8x^2-8\sqrt{q}+r=0,\\ 8x^2-8\sqrt{r}x+p=0\end{cases}$$

之中,至少有一个方程有两个不相等的实数根.

分析 涉及到了"两个不相等的实数根"问题,自然会想到判别式 Δ,而"至少有一个"又使我们考虑用反证法.

证明 (用反证法)假设三个方程都没有两个不相等的实数根,则这些方程要么没有实根,要么有两个相等的实根,故判别式 $\Delta\leqslant 0$.

$$\begin{cases}32(2p-q)\leqslant 0, & ①\\ 32(2q-r)\leqslant 0, & ②\\ 32(2r-p)\leqslant 0. & ③\end{cases}$$

由 ① + ② + ③ 得 $32(p+q+r)\leqslant 0$, $p+q+r\leqslant 0$.

但 $p>0$, $q>0$, $r>0$,故有 $p+q+r>0$,与上式矛盾,所以原命题成立.

【例 19】 已知 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根;q:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根,若 p 或 q 为真,p 且 q 为假,求 m 的取值范围.

分析 此题是方程与命题的综合题,涉及到一元二次方程的判别式和根与系数的关系,一元二次不等式及不等式组,集合的补集,p 或 q 及 p 且 q 两类复合命题的真假判断,要解此题可先将 p 和 q 的 m 取值范围解出,然后再根据 p 或 q 为真,p 且 q 为假,知此题是要 p 和 q 中必一真一假时的 m 的取值范围,可列不等式组来解.

解答 $p:\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$.

$q:\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$,解得 $1<m<3$.

因为 p 或 q 为真,p 且 q 为假,

所以 p 为真,q 为假,或 p 为假,q 为真.

即 $\begin{cases}m>2,\\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\leqslant 2,\\ 1<m<3.\end{cases}$

解得 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.