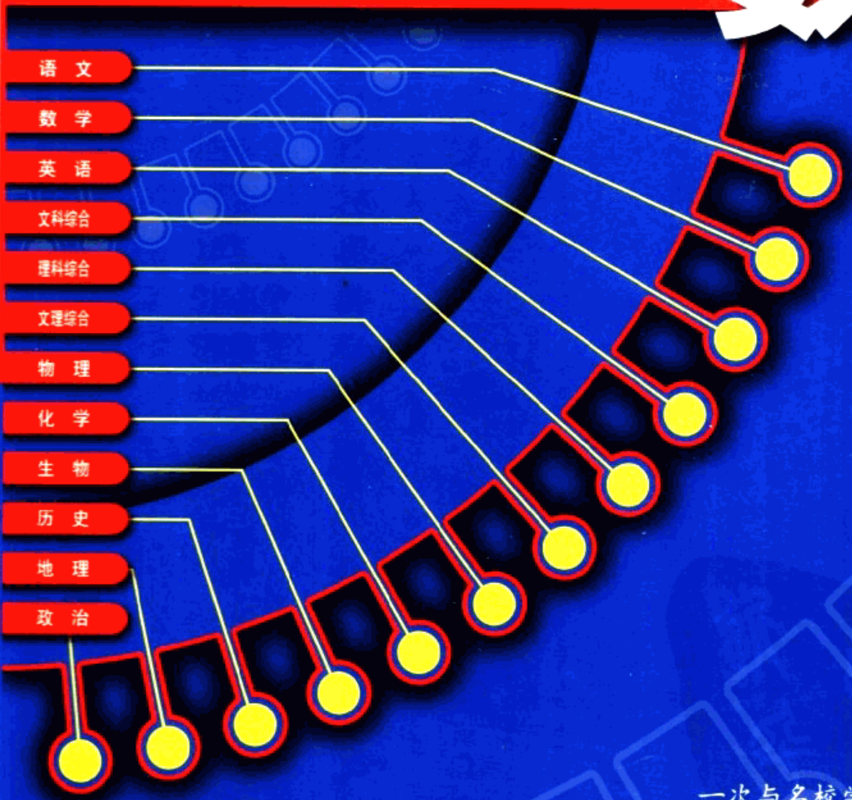
3+X

高考冲刺新思维（试验修订本）

临川考案 数学

吴立民　饶满荣　主编



这不仅仅是一本辅导书
而是一次机会
一次为您创造美好未来
一次与名校学生站在同一条起跑线上
同时起跑的机会

北京理工大学出版社

为您创造美好未来

又是一年高考复习冲刺时，我们怀着激动的心情为您——新一届即将迈向自己人生最关键一步的中学生朋友们准备了这套高考复习用书。事实上，我们策划出版这套《高考冲刺新思维》（临川考案），更想给予您的是一次机会，一个希望。我们相信，这套别具特色的高考辅导用书，一定能够帮助您在短暂而紧张的时间内，夯实基础知识，掌握高考要领，考出最佳成绩，为您创造一个美好的未来。

与全国众多的其他高考辅导用书相比，这套丛书具有如下特点：

1. 提出高考冲刺新思维 本套丛书以新教材为依托，全面适应新的高考制度改革，注重能力和素质的培养，以系统掌握知识、科学应对高考为目的，将高考内容、命题研究、复习策略、能力提升融为一体，提出了“夯实双基，扎牢基础点，迅速提升高考能力，做到颗粒归仓，少丢分”的高考冲刺新思维。

2. 名校名师精心点拨 本书是以全国著名中学、全国试验教材教改首批实验单位——江西省临川一中的优秀特、高级教师为主精心编写而成，它集编者群体智慧、对新教材多年的教学心得和对 3 + X 高考最新研究成果于一体。

3. 全面覆盖考点和知识点 本套丛书依据教育部的最新考试大纲和新考试说明编写，但又不拘泥于考试大纲；脱胎于新教材，但又跳出了新教材的局限，全面覆盖高考考点、能力点、题型及解题技巧和思路，充分关注探索题、信息题等题型。

4. 浓重的创新色彩 使用此书后您会发现，本书的构思和题目设置充分体现了创新的思想。书中的所有题目均是作者在对历年高考命题研究的基础上，精心选择的经典题型和精心编写的创新题型。

为了编写好这套丛书，我们走访了全国多所重点中学的师生，与刚刚考入重点大学的高考状元们进行了交流，并同北京市、天津市、江西省、河南省等省市重点中学的老师以及一些著名大学的专家教授进行了研讨。结合高考大纲、考试说明和学生们在复习中的心得，本套丛书共设置了以下主要栏目：

- **考点剖析**：诠释新教材、新高考说明的真正内涵，总结常考内容，探索命题规律。
- **命题趋势**：详细分析近几年高考的命题热点，预测命题趋势，给出高效复习、冲刺的方法。
- **知识构建**：全面扫描高考的知识点和考点，将零碎的知识点和考点结合成一个有机的整体，形成以点带面、以面概全的整体知识体系。
- **难点点拨**：名师指点总复习中应知的“重点”和常遇的“难点”。
- **精彩回放**：精心提炼历年的高考真题，让学生了解高考考查内容和命题方式，由名师剖析高考命题方向、题型和解题思路，以及考试时实用的解题技巧。
- **名题透析**：精心编选常用经典题型，大部分题目均来自全国著名重点中学和教育先进省市的模拟

考试和会考试卷，并根据最新的考试说明和高考命题方向进行了创新设计。

☞ **能力培养**：旨在使考生巩固和强化所学的知识、解题思路和解题方法。关注社会新热点、科技新成果、新材料和新信息，使考生迅速提高学科综合能力。该部分分 A、B 两组。A 组夯实基础，B 组提高能力。

☞ **全真模拟**：根据最新高考大纲，以高考真题为样板，精心设计全真高考模拟试卷，全面体现新高考的学科能力和综合能力的要求，使考生适应高考的新题型和新材料，迅速进入实际备考状态。

为了在有限空间内尽量提供给您更多的知识和题型，因此，在有些地方采用了小一点的字号和紧缩排版方式，练习题部分也没有留出答题空白，这或许会给您的阅读与使用带来不便，在此谨表示歉意。特别需要提及的是，本套丛书在编写过程中采用了一些著名重点中学的模拟试卷和一些老师的教学心得和成果，在此我们表示诚挚的感谢。

对于这套丛书，您有何宝贵意见，欢迎填写书后的读者调查表，我们将以赠书的形式表示感谢。

最后，祝您高考成功，愿这套丛书为您创造一个美好的未来。

——本套丛书策划编辑

目 录

第一单元

集合与简易逻辑

考点制析

“集合与简易逻辑”是高中数学的起始单元，也是整个中学数学的基础。它的基础性体现在两个方面：首先，集合的思想、集合的语言和集合的符号在高中数学的很多章节如函数、数列、轨迹、方程和不等式、立体几何、解析几何中都被广泛地使用；其次，数学离不开变换（等价的或不等价的）和推理，而变换与推理又离不开四种命题、充要条件、逻辑联结词等逻辑概念，因为它们是全面理解概念、正确推理运算、准确表述判断的重要工具。

集合与逻辑不仅是中学数学的基础，也是支撑现代数学大厦的柱石之一。高等数学的许多分支如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等都建立在集合与逻辑的理论基础之上。

本单元的知识点在集合与逻辑的理论中都是最基本的，但其中蕴含的数学思想都很丰富，如集合的思想、函数的思想、转化的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想等。

总之，集合与简易逻辑是高考中考基础、考能力和考查进一步学习的潜力的很好的命题材料。

命题趋势

近年来，高考中关于集合与简易逻辑的试题可分为两大类。一类是集合、条件、命题本身的基本题，这类题多为选择、填空题；另一类是集合、条件、命题与其他知识的综合题。

在上面第二类题中又有两种情形：一种是用集合、条件和命题来表述的题（因为用集合、条件、命题的语言来表述的数学概念和数学判断往往具有简明性和精确性），这种题实质上就是代数、几何或三角题，大部分属中档难度题；另一种情形是需要用集合的思想或者从条件的重要性来思考的数学题，这时解题的思想往往很深刻，因而也较难。

复习重难点

本单元复习的重点应是集合的概念及其运算、条件的充要性的判断、命题真假的判定。难点是集合语言和集合思想的灵活运用、充要条件的论证、复合命题真假的判断。

§1.1　集合的概念

复习导航

集合的概念是每年高考的必考内容。如果单独成题，一般以选择或填空题出现，大多较容易，内容多是对概念的理解、子集个数的计算、属于、包含、相等关系的判断等。

因此本节复习重点要抓住以下几点：

1. 理解集合、子集、真子集等概念；了解空集、全集的意义。
2. 了解属于、包含、相等关系的意义。
3. 掌握有关术语和符号，并会用它们正确地表示一些简单的集合。

精彩回放

1. （98 年全国高考题）集合 $\{1,2,3\}$ 的子集共有（　）

A. 7 个　　B. 8 个　　C. 6 个　　D. 5 个

2. （92 年全国高考题）设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $\frac{T}{S}$ 的值为______。

3. （84 年全国高考题）数集 $X=\{(2n+1)\pi, n\text{ 是整数}\}$ 与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi, k\text{ 是整数}\}$ 之间的关系是（　）

A. $X\subsetneqq Y$　　B. $X\supsetneqq Y$　　C. $X=Y$　　D. $X\subseteq Y$

4. （93 年全国高考题）集合 $M=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$，则（　）

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

5. （99 年上海高考题）设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\{x\mid \frac{2x-1}{x+2}<1\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围。

6. (90 年上海高考题）关于实数 x 的不等式 $|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$（其中 $a\in\mathbf{R}$）的解集依次记为 A 与 B。求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围。

名题透析

例1 给出下面元素与集合或集合与集合之间的关系：①$0\subsetneqq\{0\}$；②$\mathbf{R}\in\{\mathbf{R}\}$；③$\varnothing\in\{\varnothing\}$；④$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$；⑤$\varnothing=\{0\}$；⑥$\{0\}\in\varnothing$；⑦$\varnothing\in\{0\}$；⑧$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，其中正确的序号是（ ）

A. ②③④⑧　　B. ①②④⑤

C. ②③④⑥　　D. ②③④⑦

点拨：①有关属于、包含关系的题型可考虑元素的属性如果相同，则是包含关系，如果不同，则是从属关系。同时要特别注意空集的意义及性质。

②本题中 $\mathbf{R}$ 与 $\{\mathbf{R}\}$，$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 之间关系的判断是关键。

错解剖析：本题容易产生错误的有两个：一是概念不清引起的，误认为 $\mathbf{R}=\{\mathbf{R}\}$，$\varnothing=\{\varnothing\}$；二是空集的性质："空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集"。这个重要结论没有掌握，不理解 $\varnothing\in\{\varnothing\}$，$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$。

例2 若非空集合 M 满足：①$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，②若 $a\in M$，则 $6-a\in M$，那么集合 M 的个数是（ ）

A. 1个　B. 3个　C. 5个　D. 7个

点拨：①有关集合、子集个数的计算题型一般可用子集个数公式：n 个元素的集合的子集个数为 2^n 个或转化为组合问题来计算。

②本题可抓住条件①、②转化为：集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中满足 $a\in M$，$6-a\in M$ 即 $(1,5)$，$(2,4)$，(3) 分别要同时在或不在 M 中去计算。

例3 已知集合 $A=\{a,a+b,a+2b\}$，$B=\{a,ac,ac^2\}$，若 $A=B$，求 c 的值。

点拨：①关于两个集合相等的题型一般可对两个集合的元素进行比较，它们必须分别对应相等，或利用两个集合中元素之和或积相等求解。但解题时还应注意集合元素的互异性。

②本题因 A，B 都含 a，只要对其他两个元素分别对应相等分两种情况求解。

例4 设集合 $A=\{x\mid\frac{1}{32}\leqslant 2^{-x}\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x^2-3mx+2m^2-m-1<0\}$。

(1) 当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，求 A 的非空真子集的个数；

(2) 若 $B=\varnothing$，求 m 的取值范围；

(3) 若 $A\supseteq B$，求 m 的取值范围。

点拨：①有关子集的运算及逆运算题型一般可化简集合后利用数轴或曲线，用数形结合的方法转化为不等式组求解。

②本题先化简 B，一般可分解因式，再要 $B\subseteq A$，必须考虑 $B=\varnothing$ 或 $B\neq\varnothing$ 两种情况求解。

解：$\because A=\{x\mid\frac{1}{32}\leqslant 2^{-x}\leqslant 4\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$

$B=\{x\mid x^2-3mx+2m^2-m-1<0\}$

$\quad=\{x\mid (x-m+1)(x-2m-1)<0\}$

(1) $\because x\in\mathbf{Z}$，$\therefore A=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

即 A 中含有 8 个元素，

$\therefore A$ 的非空真子集个数为 $2^8-2=254$（个）

(2) 显然只有当 $m-1=2m+1$ 即 $m=-2$ 时，$B=\varnothing$。

(3) 当 $B=\varnothing$ 即 $m=-2$ 时，$B=\varnothing\subseteq A$

当 $B\neq\varnothing$ 即 $m\neq-2$ 时

i) 当 $m<-2$ 时，$B=\{x\mid 2m+1<x<m-1\}$，要 $B\subseteq A$

只要 $\begin{cases}2m+1\geqslant-2\\ m-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant 6$　　$\therefore m\in\varnothing$

ii) 当 $m>-2$ 时，$B=\{x\mid m-1<x<2m+1\}$

要 $B\subseteq A$，只要 $\begin{cases}m-1\geqslant-2\\ 2m+1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow-1\leqslant m\leqslant 2$

$\therefore m$ 的取值范围是：$m=-2$ 或 $-1\leqslant m\leqslant 2$。

规律总结

1. 抓住集合中元素的属性特征是判断元素与集合、集合与集合关系的关键，同时还必须分清 0，$\{0\}$，$\varnothing$，$\{\varnothing\}$ 之间的关系，即 $0\in\{0\}$，$0\notin\varnothing$，$0\notin\{\varnothing\}$，$\{0\}\supsetneqq\varnothing$，$\{0\}$ 与 $\{\varnothing\}$ 互不包含，$\varnothing\in\{\varnothing\}$，$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$。

2. 子集个数公式及组合计数原理是计算子集个数的基本依据。

3. 方程思想、分类讨论思想、数形结合思想以及集合元素的互异性常被用来求解集合相等或子集的有关问题。

实战演练

A组

1. 设 M 是任意一个集合，$\varnothing$ 是空集，给出下列关系式：①$\varnothing\subsetneqq M$；②$\varnothing\subseteq M$；③$\varnothing\in M$；④$\varnothing=\{0\}$。其中错误的个数是（ ）

A. 4个　B. 3个　C. 2个　D. 1个

2. 满足 $\{a,b\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c,d\}$ 的集合 M 有（ ）

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

3. 由实数 x，$-x$，$|x|$，$\sqrt{x^2}$，$\sqrt{x^2}^{2}$，$-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中，最多含有的元素个数是（ ）

A. 2个　B. 3个　C. 4个　D. 5个

4. 已知集合 $A=\{a\mid\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N}^{+}$ 且 $a\in\mathbf{Z}\}$，则 $A=$（ ）

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{1,2,3,6\}$　　D. $\{-1,2,3,4\}$

5. 已知使 $\sqrt{x^2-3x+2}$ 有意义的 x 的取值范围为 S，使 $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}$ 有意义的 x 的取值范围为 T，则（ ）

A. $S=T$　B. $S\subsetneqq T$　C. $S\supsetneqq T$　D. $S\cap T=\varnothing$

6. 集合 A 中有 m 个元素，若在 A 中增加一个元素，则它的子集个数将增加__________个。

7. 设集合 $P=\{2,6,t+1\}$，$Q=\{2,t^2+4t+1\}$，如果 $P\supsetneqq Q$，则实数 t 的值等于____________。

8. 设集合 $M=\{s\mid s=x^2-7x+12,x\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{t\mid t=y^2+$

$3y+2,y\in\mathbf{Z}\}$，则 M,N 的包含关系是 M ________ N。

9. 已知三元集合 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x 与 y 的值。

10. 设集合 $P=\{x|x^2+4x-5\leqslant0\}$，$Q=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant0\}$。

(1)若 $Q\subseteq P$，求实数 a 的取值范围。

(2)若 $P\subsetneqq Q$，求实数 a 的取值范围。

(3)若 $P\cap Q$ 为单元素集时，求 a 的值。

B组

1. 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$ 时，求实数 a 的值。

2. 已知集合 $A=\{a|\frac{x+a}{x^2-2}=1$ 仅有一实数解$\}$，用列举法表示集合 A。

§1.2 集合的运算

复习导航

近年来集合的运算常常活跃在各种考试中，是每年高考的热点内容之一，它主要以选择、填空的小综合题型出现，内容多为交、并、补的运算以及集合语言的理解和转化等。

因此，本节复习应抓住以下几个重点：

1. 理解交、并、补集的概念。
2. 理解并掌握集合的交、并、补的运算法则。
3. 能够运用集合语言与集合思想解决有关问题。

精彩回放

1. (94年上海高考题)设 I 是全集，集合 P,Q 满足 $P\subsetneqq Q$，则下面的结论中错误的是(　)

A. $P\cup Q=Q$

B. $(C_IP)\cup Q=I$

C. $P\cap(C_IQ)=\varnothing$

D. $(C_IP)\cap(C_IQ)=C_IP$

2. (95年全国高考题)已知 $I=\{0,-1,-2,-3,-4\}$ 为全集，集合 $M=\{0,-1,-2\}$，$N=\{0,-3,-4\}$，则$(C_IM)\cap N=$(　)

A. $\{0\}$　B. $\{-3,-4\}$　C. $\{-1,-2\}$　D. $\varnothing$

3. (2000年上海春季高考题)设 I 是全集，非空集合满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$，若含 P,Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是________。

4. (2000年上海高考题)若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 是(　)

A. S　B. T　C. $\varnothing$　D. 有限集

5. (99年全国高考题)如图1-1，I 是全集，M,P,S 是 I 的3个子集，则阴影部分所表示的集合是(　)

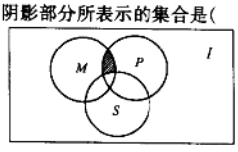


图1-1

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(C_IS)$　　D. $(M\cap P)\cup(C_IS)$

6. (96年上海高考题)已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$，$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为(　)

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

名题理析

例1　已知全集 $U=\{x|x^2-9\leqslant0\}$，$A=\{x|x^2+4x+3\leqslant0\}$，$B=\{x|x^2-1<0\}$，求$(C_UA)\cap(C_UB)$，$C_U(A\cap B)$，$(C_UA)\cup(C_UB)$，$C_U(A\cup B)$。

点拨：①有关交、并、补的运算题型，一般可分别求出要进行运算的集合，再由运算法则及图示法求出运算结果。

②本题只要把 U,A,B 先求出，再根据运算法则即可解之。

例2　设全集 $I=\{x|x$ 是不大于20的质数$\}$，且 $A\cap(C_IB)=\{3,5\}$，$(C_IA)\cap B=\{7,19\}$，$(C_IA)\cap(C_IB)=\{2,17\}$，求集合 A 和 B。

点拨：①有关集合的逆运算问题一般可利用图示法及有关运算性质分析，转化求解。

②本题不含参数，可利用韦恩图由 A,B 把全集 I 分成四块：$A\cap(C_IB)$，$(C_IA)\cap B$，$(C_IA)\cap(C_IB)$，$A\cap B$，再由条件分析各元素应属于的集合。也可利用交、并、补运算的分配律求解。即：$[A\cap(C_IB)]\cup[A\cap B]=A\cap(C_IB\cup B)=A$。

例3　已知 $A=\{x|2x^2=ax-b\}$，$B=\{x|6x^2+(a+2)x+b=0\}$，且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，求 $A\cup B$。

点拨：①有关集合的逆运算与运算的综合题可由上面总结的方法先求出各个集合，再由运算法则进行计算。

②本题含了参数，可先利用条件 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$ 转化为方程组有公共根 $\frac{1}{2}$，再进行计算。

例4　已知集合 $A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y=ax+2,x,y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的值。

点拨：①有关点集的交、并、补运算的题型常常需要转化为解析几何中曲线之间的位置关系进行求解。

②本题的 $A\cap B=\varnothing$ 是指两条直线 $\frac{y-3}{x-2}=1$ 与 $y=ax+2$ 无公共点，但应注意前直线缺点 $(2,3)$ 从而可转化成平行或相交于点 $(2,3)$ 求解。

解： $\because A$ 是指直线 $\frac{y-3}{x-2}=1$，即 $y=x+1$ 除去 $(2,3)$，B 是过点 $(0,2)$ 的直线，要 $A\cap B=\varnothing$，只要直线 $y=x+1$ 与直线 $y=ax+2$ 平行，即 $a=1$，或直线 $y=x+1$ 与直线 $y=ax+2$ 相交于点 $(2,3)$，即 $3=2a+2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，所以，$a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$

规律总结

1. 解集合题的关键是用恰当的方式来表示集合。通常将用描述法表示的集合改用列举法或用不等式（方程）的解集表示出来，这样就更具体、更明确、更简洁；或者用曲线、数轴上的区间、文氏图来表示，以便形象化，便于用数形结合的方法求解。

2. 对含参数的集合问题，常要利用转化思想进行转化求解，同时往往必须结合图形进行分类讨论求解。

3. 集合问题要重视集合语言的准确理解，常常要与函数、方程、不等式、解析几何等知识交汇、综合。

实战演练

A 组

1. 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $(C_IA)\cup(C_IB)=$（　）

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

2. 设全集为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq0\}$，$N=\{x|g(x)=0\}$，那么集合 $\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}=$（　）

A. $(C_{\mathbf{R}}M)\cap(C_{\mathbf{R}}N)$　　B. $(C_{\mathbf{R}}M)\cap N$

C. $M\cup(C_{\mathbf{R}}N)$　　D. $(C_{\mathbf{R}}M)\cup(C_{\mathbf{R}}N)$

3. 设集合 $M=\{(x,y)|3^{x-y}=9,x,y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)|\log_4(3x+y)=1,x,y\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$（　）

A. $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$　　B. $\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$

C. $\{-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\}$　　D. $\{(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})\}$

4. 已知集合 $P=\{x|(x-1)(x-4)\geqslant0,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{n|(n-1)(n-4)\leqslant0,n\in\mathbf{N}\}$，则满足 $S\cap P=\{1,4\}$，$S\cap Q=S$ 的集合 S 有（　）

A. 4 个　　B. 7 个

C. 8 个　　D. 16 个

5. 如图 1－2，I 是全集，A、B 是它的子集，则阴影部分表示的集合为________。

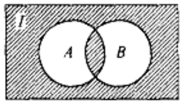


图 1－2

6. 已知集合 $A=\{x|x^2-px+q=0\}$，$B=\{x|x^2-kx+15=0\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{2,3,5\}$，则 $p=$____，$q=$________，$k=$________。

7. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant4\}$，$Q=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2\geqslant\frac{1}{4}\}$，若 $P\cap(C_IQ)=C_IQ$，求 m 的取值范围。

8. 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x||x|=y+2,y\in A\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，C_UB，$(C_UA)\cap(C_UB)$。

9. 设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，求 a 的取值集合。

10. 设 $A=\{(x,y)|ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)|x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$。

（1）a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 2 个元素的集合？

（2）a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 3 个元素的集合？

B 组

1. 若 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$。

（1）若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值。

（2）若 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 且 $A\cap C=\varnothing$，求 a 的值。

（3）若 $A\cap B=A\cap C\neq\varnothing$，求 a 的值。

2. 已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\{y|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant3\}$。

（1）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围。

（2）当 a 取使不等式 $x^2+1\geqslant ax$ 恒成立的 a 的最小值时，求 $(C_{\mathbf{R}}A)\cap B$。

§1.3　命　题

复习导航

“命题”是试验教材中新增的内容。高考“上海卷”和“两省一市卷”中年年必考有关命题的试题，近几年来“全国卷”中也是频繁地出现这种题，内容多为判断命题真假和按一定条件构造新命题，题型多为选择题和填空题，难度中等或中等以下。

本小节复习要求是：了解命题的概念和命题的构成；理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，并能判断命题的真假；

掌握四种命题及其相互关系;会用反证法证明简单的命题。

精彩回放

1. (98年全国高考题)关于函数 $f(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ $(x\in\mathbf{R})$ 有下列命题:

①由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍;

② $y=f(x)$ 的表达式可改写成 $y=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$;

③ $y=f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 对称;

④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称。

其中正确的命题序号是________(注:把你认为正确的命题的序号都填上)。

2. (99年全国高考题) α,β 是两个不同的平面,m,n 是平面 α 及 β 之外的两条不同的直线,给出四个论断:① $m\perp n$;② $\alpha\perp\beta$;③ $n\perp\beta$;④ $m\perp\alpha$。以其中三个论断作为条件,余下一个作为结论,写出你认为正确的一个命题是________________。

3. (2001年上海高考题)已知两个圆:$x^2+y^2=1$ ①与 $x^2+(y-1)^2=1$ ②,则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程。将上述命题在曲线仍为圆的情况下加以推广,即要求得到一个更一般的命题,而已知命题应成为所推广命题的一个特例。推广的命题为:________________________。

4. (2000年上海高考题)命题 A:底面为正三角形,且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥。命题 A 的等价命题 B 可以是:底面为正三角形,且______________的三棱锥是正三棱锥。

5. (2001年全国高考题)设 $f(x)$,$g(x)$ 都是单调函数,有如下四个命题:

①若 $f(x)$ 单调递增,$g(x)$ 单调递增,则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;

②若 $f(x)$ 单调递增,$g(x)$ 单调递减,则 $f(x)-g(x)$ 单调递增;

③若 $f(x)$ 单调递减,$g(x)$ 单调递增,则 $f(x)-g(x)$ 单调递减;

④若 $f(x)$ 单调递减,$g(x)$ 单调递减,则 $f(x)-g(x)$ 单调递减。

其中正确的命题是( )

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

6. (2001年上海高考题)已知 a,b 为两条不同的直线,α,β 为两个不同的平面,且 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,则下列命题中的假命题是( )

A. 若 $a\parallel b$,则 $\alpha\parallel\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$,则 $a\perp b$

C. 若 a,b 相交,则 α,β 相交

D. 若 α,β 相交,则 a,b 相交

名题透析

例1　判断下列语句是否是命题?若是,再判断是简单命题还是复合命题?若是复合命题,写出构成它的简单命题及构成形式。

(1)矩形难道不是平行四边形吗?

(2)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

(3)菱形的对角线互相垂直平分。

(4)一个数不是合数就是质数。

(5)求证 $x\in\mathbf{R}$,方程 $x^2+x+1=0$ 无实根。

例2　已知命题"若 $x^2+y^2=0$,则 x,y 全为零"。

(1)写出它的逆命题、否命题和逆否命题。

(2)写出它的否定形式。

点拨:先将原命题写成"若 p 则 q"的形式,再按要求构造其他三种命题,要注意是否有大前提。

错解剖析:很容易把否定命题(即命题的否定)与否命题混为一谈,从而导致错误。

例3　指出下列命题的构成,并判断其原命题、逆命题、否命题及逆否命题的真假。

(1)等腰三角形顶角的平分线平分且垂直于底边;

(2)方程 $x^2-3x+2=0$ 的根是 $x=1$ 或 $x=2$;

(3)方程 $x^2-3=0$ 没有有理根;

(4) $2\geqslant3$。

点拨:根据复合命题真假判断的真值表以及四种命题真假之间的关系来判断。

例4　已知 a,b,c 均为实数,且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$。求证:a,b,c 中至少有一个大于0。

点拨:含有"至多","至少"字样的命题,通常可以考虑用反证法证明。

证明:假设 a,b,c 都不大于0,

则 $a\leqslant0,b\leqslant0,c\leqslant0$,　$\therefore a+b+c\leqslant0$

而 $a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$

$\because \pi-3>0$ 且 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant0$

$\therefore a+b+c>0$,与 $a+b+c\leqslant0$ 矛盾

因此,a,b,c 中至少有一个大于0。

规律总结

1. 判断一句话是不是命题,关键在于:对于这句话能否谈得上对错。若能,这就是命题,否则,就不是命题,因此陈述句、反诘疑问句是命题,疑问句、祈使句、感叹句不是命题。

2. 能否把命题等价地改写成含逻辑联结词"或"、"且"、"非"的命题是判断这个命题是否为复合命题的关键。

3. 反证法常用来证明含一些特殊词语如“非”,“至多”,“至少”等的命题。反证法的步骤是:一否定命题(即反设);二推出矛盾;三得出结论。关键是第二步。

实战演练

A组

1. 下面是命题的是( )

A. 难道求不等式的解还能得出无解的结论吗?

B. 同平行于一条直线的两直线平行吗?

C. 1000 这个数真大啊!

D. 证明:$\sqrt{5}$是无理数。

2. 由下列各种命题构成的“p 或 q”,“p 且 q”,“非 p”的复合命题中“p 或 q”为真,“p 且 q”为假,“非 p”为真的是( )

A. p:3 是偶数,q:4 是奇数

B. p:$3+2=6$,q:$5>3$

C. p:$a\in\{a,b\}$;q:$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$

D. p:$Q\subsetneqq\mathbf{R}$;q:$N=\mathbf{Z}$

3. 用反证法证明命题:若整数系数方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$有有理数根,那么 a,b,c 中至少有一个是偶数,下列假设中正确的是( )

A. 假设 a,b,c 都是偶数

B. 假设 a,b,c 都不是偶数

C. 假设 a,b,c 中至多有一个是偶数

D. 假设 a,b,c 中至多有两个是偶数

4. 已知命题:“a,b,c,d 是实数,若 $a=b,c=d$,则 $a+c=b+d$”,对其原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言,真命题的个数是( )

A. 0 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 原命题为“圆内接四边形是等腰梯形”,则下列说法正确的是( )

A. 原命题是真命题　　B. 逆命题是假命题

C. 否命题是真命题　　D. 逆否命题是真命题

6. 命题“若 $a\in A$,则 $b\in B$”的否定形式是( )

A. 若 $a\notin A$,则 $b\notin B$　　B. 若 $a\in A$,则 $b\notin B$

C. $a\in A$ 且 $b\in B$　　D. 若 $b\notin B$,则 $a\notin A$

7. 给出下列命题

①“若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数”的逆命题;

②“面积相等的三角形全等”的否命题;

③“若 $m\leqslant1$,则 $x^2-2x+m=0$ 有实根”的逆否命题;

④“若 $A\cap B=B$,则 $A\subseteq B$”的逆否命题。

其中真命题的是( )

A. ①②　　B. ②③

C. ①②③　　D. ③④

8. “正数或零能够开平方”是由简单命题 p ________ 和 q ________ 构成的 ________ 形式的复合命题。

9. 分别用“p 或 q”,“p 且 q”,“非 p”填空。

(1)命题:“$\sqrt{5}$的值不超过 3”是 ________ 形式。

(2)命题:“矩形的对角线互相垂直平分”是 ________ 形式。

(3)命题:方程组 $\begin{cases}x+y=-7\\xy=12\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=-4\end{cases}$,$\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-3\end{cases}$是 ________ 形式。

10. 用反证法证明:若 $a^2+b^2=c^2$,则 a,b,c 不可能都是奇数。

B组

1. 命题甲:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个负根;命题乙:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根。这两个命题有且只有一个成立,求 m 的取值范围。

2. 设 P 是大于 3 的质数,对某一自然数 n,数 P^n 恰是一个 20 位数,求证:这个数中至少有三个数码是一样的。

§1.4 充要条件

复习导航

“充要条件”是每年高考的必考内容,若单纯考查充要条件的题一般是中低档题,但有时与其他知识融合在一起,特别是从条件的充要性的角度来求解的综合题往往有一定的难度。

本节复习要求是掌握充分条件、必要条件、充要条件的意义,能够判断给定两个命题的充要关系。

精彩回放

1. (94 年全国高考题)对于直线 m,n 和平面 $\alpha,\beta,\alpha\perp\beta$ 的一个充分条件是( )

A. $m\perp n,m\parallel\alpha,n\parallel\beta$　　B. $m\perp n,\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha$

C. $m\parallel n,n\perp\beta,m\subset\alpha$　　D. $m\parallel n,m\perp\alpha,n\perp\beta$

2. (95 年上海高考题)“$ab<0$”是“方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线”的( )

A. 必要但不充分条件　　B. 充分但不必要条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分又不必要条件

3. (91 年全国高考题)设甲,乙,丙是三个命题,如果甲是乙的必要条件,丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件,那么(　)

A. 丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件

B. 丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件

C. 丙是甲的充要条件

D. 丙不是甲的充分条件也不是甲的必要条件

4. (93 年上海高考题)"$a+b>2c$"的一个充分条件是(　)

A. $a>c$ 或 $b>c$　　　　B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$　　　　D. $a>c$ 或 $b<c$

5. (98 年全国高考题)两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$,$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是(　)

A. $A_1A_2+B_1B_2=0$　　　　B. $A_1A_2-B_1B_2=0$

C. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　　　D. $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

6. (2001 年上海高考题)$a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的(　)

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

名题选析

例 1　下列四组条件中,p 是 q 的充分但不必要条件的是(　)

A. p: $a>b$;q: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

B. p: $ab<0$;q: $(a+b)^2<(a-b)^2$

C. p: $a=b$;q: $a+b=2\sqrt{ab}$

D. p: $\begin{cases}0<a<1\\0<b<1\end{cases}$;$q$: $\begin{cases}0<a+b<2\\-1<a-b<1\end{cases}$

点拨:充分条件可用"条件⇒结论"来判断,而不必要条件则可利用"结论⇏条件"来判断,或利用特殊值法进行排除。

例 2　指出下列各组命题中,p 是 q 的什么条件(在"充分而不必要条件","必要而不充分条件","充要条件","既不充分又不必要条件"中选出一种作答)。

(1)在△ABC 中,p: $A>B$,q: $BC>AC$;

(2)对于实数 x,y,p: $x+y\neq8$,q: $x\neq2$ 或 $y\neq6$;

(3)在△ABC 中,p: $\sin A>\sin B$,q: $\tan A>\tan B$;

(4)已知 $x,y\in\mathbf{R}$,p: $(x-1)^2+(y-2)^2=0$,q: $(x-1)(y-2)=0$。

点拨:①可利用充分条件和必要条件的定义入手(参照例 1 的点拨)。

②本例中也可用特殊方法来判断,(1)可利用三角形边角的不等关系,(2)可考虑逆否命题,(3)可用特殊值法,(4)可求解出满足条件 p,q 的集合,用包含关系判断。

例 3　已知 p: $|3x-4|>2$,q: $\frac{1}{x^2-x-2}>0$,则$\neg p$ 是$\neg q$ 的什么条件。

点拨:可将满足条件 p,q 的集合分别记为 P,Q,则$\neg p$ 与$\neg q$ 就是 P,Q 的补集,因此就可用集合的包含关系入手来解。

例 4　求证:关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是:$a+b+c=0$。

证明:(必要性)

∵ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1,所以 $x=1$ 满足方程 $ax^2+bx+c=0$,∴ $a+b+c=0$

(充分性)

∵ $a+b+c=0$,所以 $a\cdot1^2+b\cdot1+c=0$

从而知 $x=1$ 满足方程 $ax^2+bx+c=0$

故方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1

所以 $a+b+c=0$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件。

规律总结

1. 充要条件的定义是判断两个命题的充要关系的基本依据。若"条件⇒结论",则条件是结论成立的充分条件;若"结论⇒条件",则条件是结论成立的必要条件;若"条件⇔结论",则条件是结论成立的充要条件。

2. 为了便于由条件推出结论或由结论推出条件,往往要利用四种命题的关系对命题进行等价变换。

3. 有时条件与结论是集合的形式,这时可以用集合的包含关系来对充要条件进行判断,设条件集合为 A,结论集合为 B,若 $A\subseteq B$,则条件是结论成立的充分条件;若 $A\supseteq B$,则条件是结论成立的必要条件;若 $A=B$,则条件是结论成立的充要条件。

4. 由于充要条件的判定主要是以选择题为主,所以也常用特殊值法进行筛选判定。

5. 某些证明题,往往含有"充要条件是","当且仅当","必须且只须"等字样,它们与"充要条件"是一个意思,要证明它,都既要证充分性又要证必要性。

实战演练

A 组

1. 已知全集为 U,$M,N\subsetneq U$,则"$M\subsetneq N$"是"$M\cap \complement_U N=\varnothing$"的(　)条件。

A. 充分不必要　　　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　　　D. 既不充分又不必要

2. 实数 $a=0$ 是一次函数 $y=\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}$ 与 $y=ax-\frac{3}{2}$ 的

图象平行的(　)条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分又不必要

3. $x\in\mathbf{R}$, $(1-|x|)(1+x)$是正数的充要条件是(　)

A. $|x|<1$　　B. $x<1$

C. $x<-1$　　D. $x<1$ 且 $x\neq-1$

4. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$, 则 $abc=0$ 的充要条件是(　)

A. a,b,c 中至多一个为 0

B. a,b,c 中至少一个为 0

C. a,b,c 都为 0

D. a,b,c 中只有一个为 0

5. $a+b>0$, $ab>0$ 是 $a>0$, $b>0$ 的(　)条件。

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分又不必要

6. $x,y\in\mathbf{R}$, 条件 A: $|x|\leqslant1$, $|y|\leqslant1$, 条件 B: $|x|+|y|\leqslant1$, 条件 C: $x^2+y^2\leqslant1$, 则正确的是(　)

A. B 是 C 的充分不必要条件, A 是 C 的必要不充分条件

B. B 是 C 的必要不充分条件, A 是 C 的充分不必要条件

C. C 是 A 的必要不充分条件, C 是 B 的充分不必要条件

D. C 是 A 的充要条件, B 是 A 的既不充分又不必要条件

7. 下列命题中是真命题的是(　)

A. “$x>2$ 且 $y>3$”是“$x+y>5$”的充要条件

B. “$A\cap B\neq\varnothing$”是“$A\subsetneqq B$”的充分条件

C. “$b^2-4ac<0$”是“一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 解集为 $\mathbf{R}$”的充要条件

D. 一个三角形的三边满足勾股定理的必要条件是此三角形为直角三角形

8. 若 A: $xy>0$ 且 $x<y$, B: $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$, A 是 B 的什么条件?

9. 已知 A: $|5x-2|>3$, B: $\frac{1}{x^2+4x-5}>0$, 则$\neg A$ 是$\neg B$ 的什么条件?

10. 试求 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一负根的充要条件。

B 组

1. 已知方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根 x_1,x_2 均为大于零且小于 1 的数, 在求 a,b 的范围时, 如果根据根与系数的关系, 由 $0<x_1<1$, $0<x_2<1$, 得出 $0<x_1+x_2<2$, $0<x_1x_2<1$, 从而求出 $-2<a<0$, $0<b<1$, 这种解法对吗? 若有错误, 错在哪里?

2. 已知关于 x 的一元二次方程($m\in\mathbf{Z}$)

$mx^2-4x+4=0$ ……………………………… ①

$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ ……………………… ②

求方程①和②的根都是整数的充要条件。

§1.5　集合与简易逻辑综合题

复习导航

集合与简易逻辑是中学数学的工具性内容, 具有很强的综合性, 在高考中几乎都是以综合题的形式出现, 所以有关综合题的解法是研究的重点, 其中以集合语言表述的函数、方程、不等式、解析几何综合题、以命题真假及充要条件判断的有关三角、立体几何、函数等综合题是这部分应掌握的重点。

精彩回放

1. (90 年全国高考题)设集合 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$, $N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$, 那么 $C_IM\cap C_IN=$(　)

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

2. (93 年全国高考题)已知集合 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$, $F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$, 那么 $E\cap F$ 为区间(　)

A. $(\frac{\pi}{2},\pi)$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$

C. $(\pi,\frac{3\pi}{2})$　　D. $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

3. (2001 年上海高考题)设集合 $A=\{x|2\lg x=\lg(8x-15), x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|\cos\frac{x}{2}>0, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为__________。

4. (96 年上海高考题)若函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域和值域都为 $\mathbf{R}$, 则 $f(x)>g(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 成立的充要条件是(　)

A. 有一个 $x\in\mathbf{R}$, 使得 $f(x)>g(x)$

B. 有无穷多个 x, 使得 $f(x)>g(x)$

C. 对 $\mathbf{R}$ 中任意的 x, 都有 $f(x)>g(x)+1$

D. $\mathbf{R}$ 中不存在 x, 使得 $f(x)\leqslant g(x)$

5. (97 年全国高考题)已知 m, l 是直线, α,β 是平面, 给出下列命题:

①若 l 垂直于 α 内的两条相交直线, 则 $l\perp\alpha$;

②若 l 平行于 α, 则平行于 α 内的所有直线;

③若 $m\subset\alpha$, $l\subset\beta$ 且 $l\perp m$, 则 $\alpha\perp\beta$

④若 $l\subset\beta$ 且 $l\perp\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$

⑤若 $m\subset\alpha$, $l\subset\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$, 则 $m\parallel l$

其中正确的序号是____________(注:把你认为正确的命题的序号都填上)。

6. (85 年全国高考题)已知 $A=\{(x,y)|x=n, y=an+b, n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{(x,y)|x=m, y=3m^2+15, m\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant144\}$, 问是否存在实数 a,b, 使得: (1) $A\cap B=\varnothing$; (2) $(a,b)\in C$ 同时成立?

名题透析

例 1 设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$，求使 $C\subseteq B$ 时 a 的取值范围。

点拨：①本题是集合、子集与函数值域的综合题，可化简集合（即求值域）再利用子集关系求解。

②本题化简 C 时对 a 要分 $-2\leqslant a<0$，$0\leqslant a\leqslant 2$，$a>2$ 三种情况讨论。

例 2 下列命题中错误的命题序号是________。

①函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象是由 $y=\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到的。

②函数 $y=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 的周期是 $\frac{\pi}{2}$。

③数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+2n-1$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列。

④极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 是以 $(2,\frac{\pi}{2})$ 为圆心，半径为 2 的圆。

点拨：本题是三角函数、数列、极坐标及命题真假判断的综合题，一般可用命题真假判断方法以及相关知识进行判断。

错解剖析：下列原因都可能使本题的求解产生错误：①平移变换 $y=f(\omega x+\varphi)$ 与 $y=f[\omega(x+\varphi)]$ 混淆；②忽略了函数定义域；③忽视 $n=1$ 时，$a_1=S_1$。

例 3 已知全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\}$，$B=\{x\mid \log_3(x-a)<2\}$，当 a 取什么值时，下列各式分别成立？(1) $A\cap B=A$，(2) $A\cap B\neq\varnothing$。

点拨：有关集合、交集、不等式综合题可先求解不等式，再根据集合的有关运算转化为不等式组或一元二次方程根的分布问题求解。

例 4 设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k,b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？证明你的结论。

点拨：本题是集合、交集、并集及解析几何有关综合题，可转化成解析几何中曲线之间的位置关系来处理。

解法一 $\because (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$

$\therefore A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$，即方程组

$$\begin{cases}y^2=x+1\\ y=kx+b\end{cases}\Rightarrow k^2x^2+(2kb-1)x+b^2-1=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

无解。$k=0$ 时，①有解 $x=b^2-1$，不符，$\therefore k\neq 0$

①无解 $\Rightarrow \Delta_1=(2kb-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$

$$\Rightarrow b>\frac{4k^2+1}{4k}>1$$

由 $\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0\\ y=kx+b\end{cases}\Rightarrow 4x^2+2(1-k)x+5-2b=0$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

无解 $\Rightarrow \Delta_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$

$$\Rightarrow b<\frac{20-(k-1)^2}{8}\leqslant\frac{20}{8}$$

$\therefore$ 要①，②同时无解，则 $1<b\leqslant\frac{20}{8}$，但 $b\in\mathbf{N}$

$\therefore b=2$，从而可得 $k=1$

$\therefore$ 存在自然数 $k=1,b=2$，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$

解法二 如图 1-3，在同一坐标系中画出抛物线 $C_1: y^2=x+1$ 与抛物线 $C_2: 4x^2+2x-2y+5=0$ 所表示的曲线。

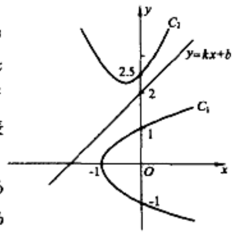


图 1-3

要直线 $y=kx+b$ 与 C_1,C_2 都不相交，b 只有满足 $1<b<\frac{5}{2}$

$\because b\in\mathbf{N}$，$\therefore b=2$，显然 $k>0$，$\because y=kx+2$ 在 x 轴上的截距 $-\frac{2}{k}<-1$，

$\therefore k<2$，即 $0<k<2$，又 $k\in\mathbf{N}$，

$\therefore k=1$，而 $y=x+2$ 与 C_1,C_2 经验证无交点，

$\therefore$ 存在自然数 $k=1,b=2$ 使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$。

规律总结

集合与简易逻辑在高考中多以综合题的形式出现。一般说来，在选择、填空题中以小综合为主，在解答题中，则以大综合为主。

在大综合题中，往往要利用集合语言、集合思想进行转化；若是与含参数的数集有关的问题，常转化为不等式组或方程有实根的根的分布来求解；若是与含参数的点集有关的问题，常可转化为曲线的位置关系来求解。

实战演练

1. 若实数集 $\{2a,a^2-a\}$ 有 4 个子集，则 a 的取值范围是（　）

A. $\mathbf{R}$

B. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

D. $\{a\mid a\neq 0$ 且 $a\neq 3,a\in\mathbf{R}\}$

2. 已知集合 $P=\{(x,y)\mid y=-\sqrt{25-x^2},x,y\in\mathbf{R}\}$ 及 $Q=\{(x,y)\mid y=x+b,x,y\in\mathbf{R}\}$，若 $P\cap Q\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是（　）

A. $[-5,5]$　　B. $(-5\sqrt{2},5)$

C. $[-5\sqrt{2},5]$　　D. $[-5\sqrt{2},5\sqrt{2}]$

3. “p 或 q 为真命题”是“p 且 q 为真命题”的( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

4. 给定下列两个关于异面直线的命题:

命题Ⅰ:若平面 α 上的直线 a 与平面 β 上的直线 b 为异面直线,直线 c 是 α,β 的交线,那么 c 至多与 a,b 中的一条相交。

命题Ⅱ:不存在这样的无穷多条直线,它们中的任意两条都是异面直线,那么( )

A. 命题Ⅰ真,命题Ⅱ假

B. 命题Ⅱ真,命题Ⅰ假

C. 两个命题都真

D. 两个命题都假

5. 已知集合 $A=\{x|x^2+3x-18>0\}$,$B=\{x|(x-k)(x-k-1)\leqslant 0\}$。若 $A\cap B\neq\varnothing$,则 k 的取值范围是_________。

6. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|x^2-ax+2=0\}$。若 $B\subseteq A$,则实数 a 的取值范围是____________。

7. 已知集合 $A=\{(x,y)|y=-x^2+mx-1\}$,$B=\{(x,y)|x+y=3,0\leqslant x\leqslant 3\}$。若 $A\cap B$ 是单元素集,则实数 m 的取值范围是____________。

8. 已知集合 $A=\{x|2x^2+7x-15<0\}$,$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$满足 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{x|-5<x\leqslant 2\}$。求实数 a,b 的值。

9. 全集 $I=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$M=\{(x,y)|2m\cdot\cos2(x-y)+8m^2\cos(x-y)+8m^2(m+1)+5m<0\}$,$N=\{(x,y)|x^2+y^2+1>2mx+2y+m-m^2\}$,若 $M\cap N=I$,求实数 m 的取值范围。

10. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列,d 为公差且不为 0,a_1 和 d 均为实数,它的前 n 项和记作 S_n,设集合 $A=\{(a_n,\frac{S_n}{n})|n\in\mathbf{N}^+\}$,$B=\{(x,y)|\frac{1}{4}x^2-y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,试问下列结论是否正确,如果正确请给予证明;如果不正确,请举例说明。

(1)若以集合 A 中的元素作为点的坐标,则这些点都在同一条直线上。

(2)$A\cap B$ 至多有一个元素。

(3)当 $a_1\neq 0$ 时,一定有 $A\cap B\neq\varnothing$。

第二单元

函　　数

考点剖析

函数是中学数学中的重要内容，像一条红线贯穿在整个中学数学之中。函数这一单元的知识有五个特点：

1. 内容的丰富性。"函数"这一单元包括函数的概念和记号，函数的定义域、值域和对应规律，函数的图象，函数的单调性、奇偶性和周期性，反函数，幂函数，指数函数和对数函数。此外，一次函数、二次函数、反比例函数虽然是在初中学的，但还是在高中阶段的"函数"一章中完成它们的深刻化过程。

2. 强烈的渗透性。函数与中学数学中的绝大部分内容都有联系，如方程、不等式、数列、三角、解析几何、立体几何等。

3. 高度的思想性。"函数"这一单元蕴含着中学数学中重要的数学思想，如函数的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想、化归思想等。

4. 与高等数学衔接的紧密性：函数与极限、微分、积分、概率、统计等数学内容联系非常紧密。

5. 知识的应用性。函数知识在日常生活、生产、科学技术及其他学科中有着广泛的应用。

命题趋势

由上述分析可知，函数既是中学数学各骨干知识的交汇点，它是数学思想、数学方法的综合点，又是初等数学与高等数学的衔接点，还是中学数学联系实际的切入点。所以函数便理所当然地成为历年来高考的重点与热点。近年来，有关函数内容的高考命题趋势是：

1. 全方位。近几年来的高考题中，函数的所有知识点都考过，虽然近几年不强调知识点的覆盖率，但每一年函数知识点的覆盖率依然没有减小。

2. 多层次。在每年高考题中，函数题低档、中档、高档难度都有，且选择、填空、解答题型齐全。低档难度题一般仅涉及函数本身的内容，诸如定义域、值域、单调性、周期性、图象、反函数，且对能力的要求不高；中、高档难度题多为综合程度较大的问题，或者是函数与其他知识糅合，或者是多种方法的渗透。

3. 巧综合。为了突出函数在中学数学中的主线地位，近几年来高考强化了函数对其他知识的渗透，加大了以函数为载体的多种方法、多种能力（甚至包括阅读能力、理解能力、表述能力、信息处理能力等学习能力）的综合程度。

4. 变角度。出于"立意"和创设情况的需要，函数试题设置问题的角度和方式也不断创新，重视函数思想的考查，加大了函数应用题、探索题和信息题的考查力度，从而使函数考题显得新颖、生动、灵活。

复习重难点

本单元的复习，重点要解决四个问题：

1. 准确地理解函数有关的概念；
2. 充分揭示函数与其他知识的联系；
3. 熟练运用函数思想、分类讨论思想和数形思想解题；
4. 深刻地认识函数的实质，强化应用意识。

上述四个问题同时也是本单元的难点。

§2.1　映射与函数

复习导航

映射与函数是"函数"单元的最基本、最重要的两个概念，也是高考考查频率最高的概念之一。

《高考考试说明》对这两个概念的要求是"了解映射的概念，理解函数及其有关的概念"。但高考试卷中的有关试题事实上是超过了这个要求。而且对"映射"这个概念仅仅只是一般的"了解"，也不可能对"函数"概念有真正的理解。所以这一小节的复习中，还是提高一些要求为妥：理解映射的概念，深刻理解函数概念，要认识到定义域、值域和对应规律是函数的三大要素，而且在今后的解题中，要念念不忘这一点，尤其是定义域。

精彩回放

1. (2000 年全国高考题)设集合 A 和集合 B 都是自然数集 $\mathbf{N}^*$，映射 $f:A\to B$，把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中

的元素为 2^n+n,则在映射 f 下象 20 的原象是(　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 5

2. 表示相同函数的一组函数是(　)

A. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$

B. $f(x)=\frac{|x|}{x}, g(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$

C. $f(x)=\sqrt{1-x^2}, g(x)=1-|x|, x\in[-1,1]$

D. $f(x)=\log_a a^x(a>0$,且 $a\neq 1), g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

3. 下列从 A 到 B 的对应法则 f 是映射的为(　)

A. $A=\mathbf{R}, B=\mathbf{R}^+, f$:取绝对值

B. $A=\mathbf{R}^+, B=\mathbf{R}, f$:开平方

C. $A=\mathbf{R}^+, B=\mathbf{R}, f$:取对数

D. $A=Q, B=\{$偶数$\}, f$:乘 2

4. 集合 $A=\{3,4\}, B=\{5,6,7\}$,那么可建立从 A 到 B 的映射的个数是______;从 B 到 A 的映射个数是______。

5. 关于集合 A 到集合 B 的映射,下列说法错误的是(　)

A. A 中的每个元素在 B 中都有象

B. A 中的两个不同元素在 B 中的象必不同

C. B 中的元素在 A 中可以没有原象

D. B 中的某元素在 A 中的原象可能不止一个

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$,则 $f(a^2)=$______。

名题透析

例 1　设 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}, B=\{y|1\leqslant y\leqslant 2\}$,如图2-1,能表示从集合 A 到集合 B 的映射是(　)

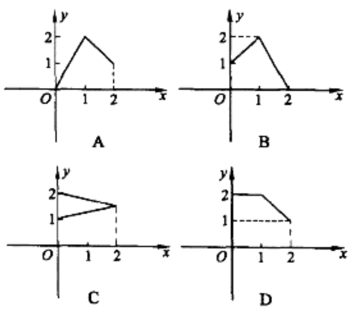


图2-1

点拨:应用定义解题。(1)对 A 中任一元素,按照对应法则 f,在集合 B 中都有惟一元素与之对应;(2)集合 B 中的元素可以没有原象。即映射可以是一对一,也可以是多对一,但不可以是一对多。

例 2　已知:$f(x)=2x-1, g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$

求 $g[f(x)], f[g(x)]$。

点拨:函数 $g(x)$ 是分段函数,解题时要特别注意定义域。

例 3　设 $x\in\mathbf{R}, y=f(x)$ 与 $y=f(x+1)$ 是不是同一函数?为什么?

点拨:判断两个函数是否相同,要从定义域、值域、对应规律这三个要素去考虑。

例 4　以 $\{0,1,2,3,4\}$ 为定义域、以 $\{5,6,7\}$ 为值域的函数有多少个?

点拨:从集合 A 到集合 B 的对应是函数要满足(1)A、B 是非空数集;(2)$f:A\to B$ 是映射;(3)对于 B 中的任一元素皆有原像,三点缺一不可。

解:首先对五个元素分为三组,有两种分组方法:①两个,两个,一个;②三个,一个,一个,共有 $\frac{C_5^2C_3^2}{2!}+\frac{C_5^3C_2^1}{2!}=25$(种)方法。由函数概念知,$B$ 中任一元素皆有原像,所以共有 $25A_3^3=25\times 6=150$(种)函数。

规律总结

1. 判断对应 $f:A\to B$ 是不是映射,关键是抓三条:(1)A 中的每一个元素是否都有像?(2)这个像是否一定在 B 中?(3)像是不是惟一的?当且仅当三个答案都是肯定的 f 才是映射。

2. 判断从集合 A 到集合 B 的对应 $y=f(x)$ 是不是函数,也要抓三条:(1)是不是映射?(2)A,B 是不是都是数集?(3)对于 B 中的每一元素是否都有原像?当且仅当三个答案都是肯定的,$y=f(x)$ 才是以 A 为定义域,以 B 为值域的函数。

3. 判断两个函数是不是同一函数,要从定义域、值域、对应规律这三个要素考虑。这三者中只要有一个不相同,就不是同一函数。

实战演练

A组

1. 已知集合 $M=\{x|-4\leqslant x\leqslant 4\}, N=\{y|-2\leqslant y\leqslant 2\}$,从 M 到 N 的对应法则为 f,若 f 为:①$f:x\to y=\frac{1}{2}x$;②$f:x\to y^2=\frac{1}{2}(x+4)$;③$f:x\to y=\frac{x^2}{4}-2$;④$f:x\to y:x^2=-8y$。

则 f 是从 M 到 N 的映射是(　)

A. ①②　　B. ①③

C. ①③④　　D. ①②③④

2. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)|x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,像 $(2,1)$ 的原像是(　)