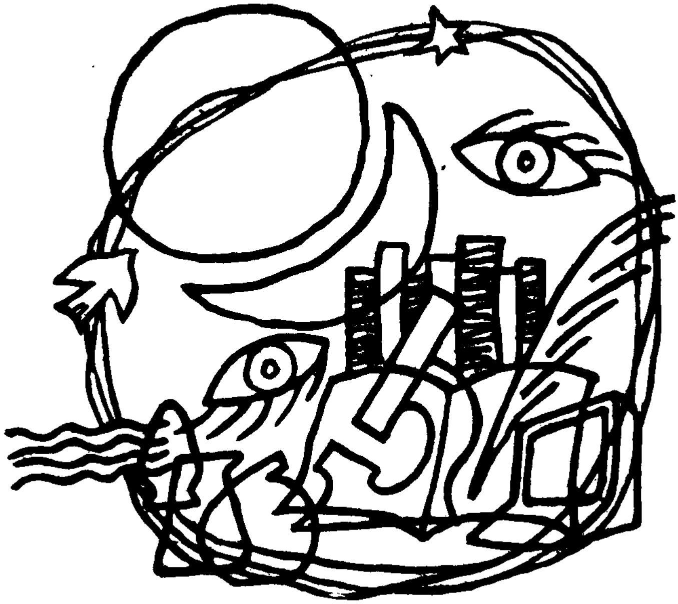


华东师范大学中青年学术著作出版基金会

# 广义模态逻辑

冯 棉 著

冯 棉 著

# 广义模态逻辑

# 广 义 模 态 逻 辑

冯　棉　著

华东师范大学出版社出版
(上海中山北路3663号)
宁波鄞县文教印刷一厂排版
新华书店上海发行所发行　　吴县人民印刷二厂印刷
开本：850×1168　1/32　　印张：11.5　　字数：283千字
1990年6月第一版　　1990年6月第一次印刷
印数：0001——2000本

ISBN7—5617—0515—8/B·030　定价：5.30元

# 序

距今70年前，著名法国数学家彭加勒曾在他的著作《道德与科学》中论证“伦理学问题永远不能有科学的解决”。他的理由很简单：从陈述句的前提只能推出陈述句的结论而推不出命令句的结论，但伦理学所关心的恰是主张“应该如何”的命令句而不是表示“实际如何”的陈述句。由于科学总是陈述句的体系，所以伦理学不可能有科学的奠定。基于对科学和逻辑的狭义的理解，彭加勒的观点在当时是无可訾议的，这大大助长了怀疑论的气焰。

可是到了30年代之后，随着路易士的工作，模态逻辑蓬勃发展，不久前又有道义逻辑、时态逻辑等众多分支的出现。科学和逻辑的概念已变得前所未有的广阔。所有这些近来称为广义模态逻辑的理论，无一不是在经典二值逻辑基础上，由添加各种不同的模态概念并配备相应的公理而建立起来的。它们充分利用了现代数理逻辑的形式的和语义的研究方法，因而不仅达到高度的严格、准确与清晰，而且诸强弱不同的系统之间的关系也日益明朗化。我相信在其影响之下，不但逻辑学自身将显示更大的生命力，就是哲学、伦理学和法学等学科也将受益不浅。

冯棉同志鉴于国内出版界反映这方面进展的缺如，特撰《广义模态逻辑》一书，以飨同好。他从集合论、命题谓词两演算入手，系统地介绍了道义逻辑（10种），模态逻辑（12种）和时态逻辑（7种），对其中主要系统的一致性、可靠性和完全性作了严密而详尽的考察。在语义方面介绍了克里普克的可能世界模型，这一被誉为哥德尔不完全性定理以来数理逻辑的最大成果。全书论证严谨，解说平易而文笔流畅，这是每一位读者所不难觉察的。我既嘉作者用力之勤，书成遂欣然为之序。

程 其 襄

1987年7月20日

# 前　言

广义模态逻辑是在经典二值命题逻辑和谓词逻辑的基础上发展起来的，它包括模态逻辑(modal logic)、道义逻辑(deontic logic)、时态逻辑(tense logic)等分支，是当代哲学逻辑(philosophical logic)的重要组成部分。近年来，哲学逻辑已成为国际逻辑学界的研究热点之一，它不仅极大地拓宽了逻辑学的研究视野，把现代精密的演绎科学方法注入了哲学、伦理学、法学等学科，同时对科学技术尤其是人工智能的开发也具有潜在的或实际的应用价值。

在国内，对哲学逻辑的研究还刚刚起步。为了使广大逻辑工作者和大专院校哲学专业、逻辑专业、数学专业、计算机专业的大学生、研究生对广义模态逻辑的基本理论及新的研究成果有较深入的了解，笔者撰写了这本专门著作。

本书向读者展示了众多的广义模态逻辑系统，并通过克里普克(S.A.Kripke)的语义理论揭示出这些系统的直观背景和诸系统间的相互联系，对主要系统的一致性、可靠性和完全性作了严密而详尽的考察。克里普克的可能世界语义学是继哥德尔(K.Gödel)关于形式算术系统的不完全性定理之后的又一项具有重大哲学意义的成果，在学习了广义模态逻辑之后，读者对此将会有深切的体会。本书还把著名逻辑学家休斯(G.E.Hughes)和克雷斯韦尔(M.J.Cresswell)于70年代发展的语义图方法进一步推广到道义逻辑；对某些重要的元定理，则给出了简明清晰的新证明。

在写作过程中，主要参考了下列文献：

（1）A.G.Hamilton：《Logic for Mathematicians》，1978；

（2）G.E.Hughes and M.J.Cresswell：《An Introduction to Modal Logic》，1972；

（3）J.F.A.K.van Benthem：《The Logic of Time》，1983；

（4）J.P.Burgess：《Basic Tense Logic》，1984；

（5）L.Aqvist：《Deontic Logic》，1984；

文献（4）和（5）载《Handbook of Philosophical Logic》V.Ⅱ。

上海逻辑学会和上海数学学会顾问程其襄教授为本书作了序。程先生提携后辈的爱抚之心，使我深受感动。华东师范大学出版社为本书提供了出版基金，编辑同志亦付出了辛勤的劳动，在此一并致谢！我由衷地期待着广大读者的批评，没有学术批评也就没有学术的繁荣和学科的发展。

作　者

1987年7月

冯棉，1948年12月生于上海，1982年2月毕业于华东师大数学系，获理学学士学位，之后考入华东师大数理逻辑专业研究生，师从我国著名学者程其襄教授，1986年以优异成绩获硕士学位。现为华东师大哲学系讲师，逻辑教研室付主任，并担任国家教委首批青年科研基金项目《哲学逻辑与逻辑哲学》的负责人。著有专著《经典逻辑与直觉主义逻辑》，获奖论文有《从分枝类型论到简单类型论》、《模态命题逻辑概述》。

# 目　　录

# 第一章 集合、关系和函数

集合这一概念不仅在现代数学中扮演了举足轻重的角色，也是现代逻辑学的基石。何为“集合”？集合有哪些基本性质？这是本章首先要解答的问题。然后，我们将阐述作为特殊集合的关系和函数的理论；在最后一节还简要地介绍了数学归纳法，它同集合的基本理论一样，是学习后面各章的必不可少的预备知识。

## §1.1 集合的概念

集合是一个不加定义的概念，如同初中学生的平面几何教本中对点、线、面这些基本概念不加定义一样。每一门科学中总有一些概念是不加定义的，这些概念或者假设为已知，或者通过一般描述来加以刻画。

对集合概念可以作这样的一般描述：人们把感觉中或思维中的某些确定的、能够区分的对象汇集为一个整体，这一整体就是一个集合。组成集合的那些对象称之为该集合的元素或成员。集合论的创始人、杰出的德国数学家康托（G·Cantor）就是用这种方式来描述集合的。集合有时又称为类（在某些公理集合论系统中，集合和类是两个不同的概念。本书不涉及公理集合论，有兴趣的读者可参看有关这方面的专著）。

我们用大写字母A，B，C，…表示集合，若x是集合S的一个元素，就称“x属于S”，记作$x \in S$，其中符号$\in$读作“属于”。

如果x不是集合S的一个元素，则称“x不属于S”，记为$x \notin S$，其中符号$\notin$读作“不属于”。

以下是几个集合的实例。

（1） 地球的卫星组成的集合（记为A）。

（2） 全体小写英文字母组成的集合（记为B）。

（3） 由2、上海市、孙悟空这三个元素组成的集合（记为C）。

（4） 全体自然数组成的集合（记为N）。

月球$\in$A，而且月球是A仅有的一个元素，因为地球只有一颗卫星——月球。小写英文字母$a \in B$，但自然数$1 \notin B$，因为1不是小写英文字母。集合A、B、C都只有有限个成员（分别为1个、26个和3个元素），由有限个元素构成的集合称为有限集。集合N则包含无限多个元素，因为自然数为无穷数；由无穷个元素构成的集合称为无限集。

一个集合中的那些元素可以是彼此之间有联系的（具有共同属性的），也可以是相互没有任何联系、风马牛不相及的。集合B中的诸元素具有一个共同性质，即都是小写英文字母，这些元素彼此之间是有联系的，集合B可以看作是“小写英文字母”这一概念的外延。集合C则迥然不同，它的三个元素之间看不出有什么联系，但这三个元素仍然是确定的，可以区分的，因而由这三个元素可以构成一个集合，尽管这一集合不再是任何概念的外延。从这一意义上来说，集合要比概念的外延具有更为广泛的涵义。

给出了一个集合，也就明确无误地规定了这个集合是由哪些元素组成的。换言之，对任何一个对象来说，它或者是该集合的元素，或者不是该集合的元素，两者必居其一，且仅居其一。

在自然语言中，有一些涵义模糊的语词，如高、矮、胖、瘦、年轻、年老、漂亮、难看、轻、响等等，含有这类语词的话语不一

定能表示集合。例如，“某单位的所有高个子”这句话一般不能表示一个集合，除非对“高个子”给出一个明确的尺度标准，比如规定不低于1.75米的是高个子。如果不作明确规定，那末一个1.75米左右的人，究竟是不是高个子，就可能会引起歧义，人们将无法作出一致的评判。这类不能确实无误地判别其范围的对象，不属于本章所说的经典集合论的研究范围。

集合的常用表示法有三种。

一种是列举法：把一个集合中的元素一一列举出来，并写在一个花括号{ }之内。视集合中元素的多寡和实际需要，可列举该集合的全部元素或仅列举其中有代表性的元素。象前面提到的四个集合可用列举法表示如下：

（1） A＝{月球}；

（2） B＝{a，b，c，…，x，y，z}；

（3） C＝{2，上海市，孙悟空}；

（4） N＝{1，2，3，…n，…}。

第二种称为定义法或描述法，即用集合中诸元素的共性来表述集合。上述A、B、N三个集合可用定义法表述：

A＝{x：x是地球的卫星}；

B＝{x：x是小写英文字母}；

N＝{x：x是自然数}。

其中冒号“ ：”之前的x表示该集合的元素，冒号后面则是集合中的元素x所具有的性质，集合就是由具有这种性质的元素所构成的。集合C中的三个元素不具有明显的共性，所以一般不采用定义法。

集合{x：$x\neq x$}也是用定义法刻划的，因为没有一个元素x会满足条件$x\neq x$，所以任何对象都不属于这一集合，这种没有任何元素的集合称为空集，用字母φ来表示。当然，空集也是有限集，它含有的元素数量为0。

除了列举法和定义法之外，集合还有第三种表示方法，即用特征函数来表示。对任何一个集合S，都可以用这样一个特征函数表示：

$$\begin{cases}\lambda_S(x)=1, & 若x\in S;\\ \lambda_S(x)=0, & 若x\notin S。\end{cases}$$

比如上面提到的集合C，仅当x取2、上海市、孙悟空这三个值时，才有$\lambda_C(x)=1$；x取其他值时，$\lambda_C(x)=0$。至于空集$\phi$，则对一切对象x来说，都只能有$\lambda_\phi(x)=0$。

有关函数的定义和基本理论将在本章§1.6节谈到。

## §1.2 外延原则与子集

一个集合完全由它的元素所决定，而不涉及这些元素被挑选的方法，正是从这一意义上来说，集合概念具有鲜明的外延特性，外延原则的名称也由此而来。外延原则又称为外延公理，可表述如下：

两个集合A和B相等，当且仅当A的每一个元素都属于B，并且B的每一个元素也都属于A。

我们用符号"$\Longrightarrow$"表示"如果…，那么…"，用"="表示等号，用符号$\Longleftrightarrow$表示"当且仅当"，则外延原则可表述为：

A = B当且仅当对任何对象x，($x\in A\Longrightarrow x\in B$)并且($x\in B\Longrightarrow x\in A$)。

或者表述为：

A = B当且仅当对于任何对象x，$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$。

外延原则清楚地表明了一个集合是由它的元素所唯一确定的，具有相同元素的集合是相等的，是同一个集合。

根据外延原则，下面三个集合是彼此相等的：

（1）　$E=\{1, 2, 2, 3\}$；

（2） $F=\{1, 2, 3\}$；

（3） $G=\{2, 3, 1\}$。

集合E中的每一个元素，无论是1、2，还是3，都属于集合F，F的每一个元素也都属于E，因此$E=F$。尽管在E中元素2出现了两次，但相同的元素只能算作一个元素，所以E和F都只有三个元素。

F的每个元素都属于G，G的每个元素也都属于F，因此$F=G$。这表明，集合与其元素的先后顺序无关。

由外延原则可知，空集是唯一确定的。下面两个集合都是空集，它们是相等的：

（1）$\phi_1=\{x: x\neq x\}$；

（2）$\phi_2=\{x$：x是美国的皇帝$\}$。

对空集$\phi$可作这样的定义：

**定义1.1**：一个集合$\phi$是空集，当且仅当对于任何对象$x$，$x\notin\phi$。

再看这样两个集合：

（1） $F=\{1, 2, 3\}$；

（2） $H=\{1, 2\}$。

H的每一个元素都属于F，我们称H是F的子集，又称F包含H。下面是子集的一般定义：

**定义1.2**：对于任何集合A和B，B是A的子集当且仅当B的每一个元素都是A的元素。

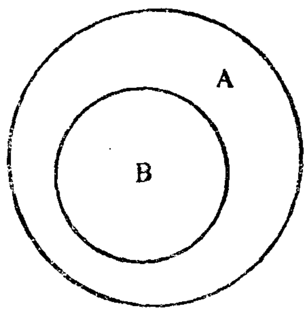
使用符号$\subseteq$，用$B\subseteq A$来表示B是A的子集，符号$\subseteq$读作“包含”，$B\subseteq A$读作“A包含B”。若B不是A的子集，则记为$B\nsubseteq A$。于是上述定义1.2又可表述为：

$B\subseteq A$当且仅当对于所有的$x$，$x\in B\Longrightarrow x\in A$。

**定义1.3**：如果$B\subseteq A$，并且至少有一个A中的元素不是B的元素，则称集合B是集合A的真子集，或者说A真包含B，记

作$B\subset A$。换言之，$B\subset A$当且仅当$B\subseteq A$且$A\neq B$。

可以用下面的图形表示两个集合A、B之间的真包含关系：




**命题1.1**：集合的包含关系具有下列性质：

（1）　$A=B$当且仅当$A\subseteq B$且$B\subseteq A$；

（2）　若$C\subseteq B$且$B\subseteq A$，则$C\subseteq A$；

（3）　对于任何集合A，都有$A\subseteq A$；

（4）　对于任何集合A，都有空集$\phi\subseteq A$。

性质（1）实际上是外延原则的又一种表述方式；性质（2）和（3）分别表明集合的包含关系具有传递性和自反性；（3）和（4）还告诉我们，任何非空集合A（若$A\neq\phi$，则称A为非空集合）至少有两个子集，一个是A本身，一个是空集$\phi$。这两个子集称为集合A的平凡子集。

对于性质（1）、（2）和（3），读者可根据外延原则和子集的定义加以证明，以下仅证明性质(4)，证明的方法是反证法。

**证　明（4）**：

倘若有一个集合A，$\phi\nsubseteq A$，那末至少存在一个元素$x$，$x\in\phi$且$x\notin A$。但是根据空集的定义1．1，不能有$x\in\phi$，矛盾。所以对任何集合A，只能有$\phi\subseteq A$。证毕。

需要指出的是，必须注意$\subseteq$、$=$和$\in$之间的差别。$\in$是集合论

的初始符号，它所表示的“属于”这一概念同“集合”概念一样，都是初始概念，是通过描述从直观上加以把握的。$\subseteq$和$=$则不同，它们是通过$\in$来定义的，因此并非初始符号，“子集”、“包含”、“相等”这些概念也不是初始概念。

再举两个实例：

（1） $\{1\}\subseteq\{0, 1\}$，但$\{1\}\notin\{0, 1\}$。因为1而非$\{1\}$才是集合$\{0, 1\}$中的元素。

（2） $1\in\{1\}$，但$1\neq\{1\}$。这说明，必须把由单独一个元素组成的集合（称为单元素集）跟这个元素本身区别开来，单元素集并不等于组成该集的元素。

一个集合可以包含多少个不同的子集呢？请看下面的分析：

（1） 空集$\phi$，它只有1（$=2^0$）个子集，就是$\phi$本身。

（2） 由一个元素a构成的单元素集$\{a\}$，它有2（$=2^1$）个子集$\phi$和$\{a\}$，即仅有平凡的子集。

（3） 由两个不同的元素a和b组成的集合$\{a, b\}$共有4（$=2^2$）个子集，即$\phi$、$\{a\}$、$\{b\}$和$\{a, b\}$。

（4） 由三个不同的元素a、b和c构成的集合$\{a, b, c\}$则有8（$=2^3$）个子集，它们是$\phi$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a, b\}$、$\{a, c\}$、$\{b, c\}$和$\{a, b, c\}$。

……

**一般地，对于一个由n（n为非负整数）个不同元素组成的有限集A来说，共有$2^n$个不同的子集。这些子集之中，除了A本身之外，其余的都是A的真子集。显而易见，一个无限集必有无限多个不同的子集。**

## §1.3 集合运算

一个集合也可以借助于集合运算用其它集合来加以定义。基