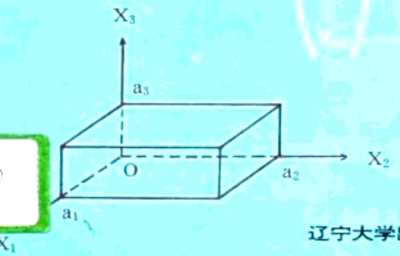
经济数学基础(二)

线性代数

(修订本)

张义轩　主编



辽宁大学出版社

前　　言

为适应经济管理现代化，满足本校经济管理学院各系的教学需要，我们编写了这套教材。此教材是在我们多年教学实践的基础上，学习和吸取了国内一些“经济数学”之精华，旨在努力探索编出既适应经济管理现代化，而又适应财经类学生实际的“经济数学”的教材。本教材既考虑到财经类各专业学生的必备的高等数学基础知识，又考虑到高等数学在经济管理、财政经济等方面的结合；既考虑到高等数学知识的复盖面，又注意到财经类的特色。在不失高等数学本身的系统性及严谨性的前提下，坚持了由浅入深、循序渐进的原则，便于自学。

本套教材的内容、结构，遵循1990年夏季北京召开的全国财经类“经济数学基础”大纲讲习班的精神。

此套教材共分四册，第一册为经济数学基础（一）《微积分》，由王佐臣主编，于秀媛副主编；第二册为经济数学基础（二）《线性代数》，由张文轩主编，朱恩全副主编；第三册为经济数学基础（三）《概率论与数理统计》，由吴素文、王宏、魏永德编写；第四册为经济数学基础（四）《运筹学》，由朱恩全主编。全套书由李福龙副教授主审。

此教材为财经类及管理（文科）本科学生教学用书，也可作为自学考试、夜大、函大、职大等教学参考用书。

参加《线性代数》编写的有：柴国兴（第一、二章）、朱恩全（第三、四章）、张文轩（第五、六章），由张文轩总纂

定稿。

由于水平有限，时间紧迫，定有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

辽宁大学经济管理学院数学教研室

1991年7月

目　　录

第一章　行列式与克莱姆法则

在中学的代数课程里，对二、三阶行列式已经有所陈述，并用行列式记号简洁地给出了二、三阶线性方程组的求解公式。本章将推广这一结果，首先介绍行列式的一般概念、行列式的性质及计算方法，然后给出任意阶线性方程组的求解公式——克莱姆（Cramer）法则。

§1.1　数　　域

如所周知，在有理数集Q、实数集R和复数集C之间有一条共同的性质，就是每个数集中的任何两个元素的和、差、积、商（不以零为除数）仍然是该数集的元素。或者说，这三个数集关于加、减、乘、除四种运算都是封闭的。

定义　设F是复数集合的一个子集，且至少含有两个不同的元素。如果F关于加、减、乘、除四种运算封闭，则称F为**数域**。

有理数集、实数集和复数集都是重要的数域，分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**。有

$$Q\subset R\subset C$$

数域的例子是很多的，这里不再继续列举。

由于所有数域都是复数域的子集，在这个意义上说，复数域是最大的数域。下列命题指出，有理数域是最小的数域。

命题　每个数域都以有理数域为其子集。

证 设F为任一数域。按定义，F至少含有一个非零元素，记为a。据F对除法运算的封闭性，应有

$$1=\frac{a}{a}\in F$$

将1重复相加可得到全体正整数；再求1与每个正整数之差又得到数零及全体负整数，由于F对加法和减法运算的封闭性，F应该包含一切整数。最后，F还应包含所有正、负整数之商（不以零为除数）。由此便知，F含有全部有理数，即$Q\subset F$。

书中各章内容的讨论都是在某个数域上进行的，如无特别声明，文中所提到的数都可以理解为任意一个数域里的元素。不过，本书将着重在实数域范围内研究问题。

§1.2 行列式的一般概念

一 排列及其性质

称由n个自然数1,2,…,n排成的一个有序数组$j_1j_2\cdots j_n$为一个n阶排列。例如，231是一个三阶排列；而4123和2431都是四阶排列。

显然，n阶排列共有n! 个。例如，三阶排列共有3! 个，它们是

123，132，213，231，312，321

如果排列中的数码是按从小到大的自然顺序排列的，则说这个排列是**标准排列**。例如，12345就是标准的五阶排列。

假定i，j是一个排列里的两个数码，如果其中的较大者排到了较小者的前边，就说在这两个数码i，j之间存在一个**逆序**或**反序**。例如，在排列4231中，因为4比3大，并且4

排在了 3 的前面，所以在 4 与 3 之间存在一个逆序；同理，在 3 与 1 之间也存在一个逆序。

在一个排列里所出现的逆序总数叫做该排列的**逆序数**或**反序数**。n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。一个 n 阶排列的逆序数可以这样的求得：

$$\begin{aligned}\tau(j_1j_2\cdots j_n) &= \text{位于 } j_2 \text{ 前大于 } j_2 \text{ 的数码数}\\ &+\text{位于 } j_3 \text{ 前大于 } j_3 \text{ 的数码数}\\ &+\cdots\cdots\\ &+\text{位于 } j_n \text{ 前大于 } j_n \text{ 的数码数}\end{aligned}$$

例如，

$$\begin{aligned}\tau(4231) &= \text{在 2 前大于 2 的数码个数}\\ &+\text{在 3 前大于 3 的数码个数}\\ &+\text{在 1 前大于 1 的数码个数}\\ &=1+1+3\\ &=5\end{aligned}$$

$$\tau(25134)=0+2+1+1=4$$

称逆序数是偶数的排列为**偶排列**，而称逆序数是奇数的排列为**奇排列**。标准排列的逆序数是零，规定它为偶排列。容易看出，在三阶排列中，123、231、312 为偶排列，另外三个是奇排列。

在一个排列里，若交换其中两个数码的位置（其余数码位置保持不变），可以得到一个新的排列，把这种获得新排列的方法叫做一次**对换**。

排列的性质：

性质 1 任何排列经过一次对换都改变其奇偶性。

证 (i) 先考虑对已知排列

(2. 1) $\quad j_1\cdots j_{r-1}kl j_{r+2}\cdots j_n$

施行两个相邻数码 k 与 l 之间的对换，得到排列

(2. 2) $$j_1\cdots j_{r-1}lkj_{r+2}\cdots j_n$$

可见，当 $k<l$ 时，排列（2. 2）比排列（2. 1）增多一个逆序；当 $k>l$ 时，排列（2. 2）比排列（2. 1）减少一个逆序。也就是说，原排列（2. 1）经过一次相邻数码的对换以后，其逆序总数不是增多一个就是减少一个，因而排列（2. 2）与排列（2. 1）有不同的奇偶性。

(ii) 再看一般的情形。设已知排列为

(2. 3) $$j_1\cdots j_{r-1}ki_1i_2\cdots i_slj_{r+s+2}\cdots j_n$$

在数 k 与 l 之间隔有 s 个数 $i_1, i_2, \cdots, i_s$。施行 k 与 l 的对换，得排列

(2. 4) $$j_1\cdots j_{r-1}li_1i_2\cdots i_skj_{r+s+2}\cdots j_n$$

可认为排列（2. 4）是这样得来的：在排列（2. 3）中，先让数 k 与后边的 s 个数码 i_1，i_2，…，i_s 依次做相邻数码之间的对换，得排列

$$j_1\cdots j_{r-1}i_1i_2\cdots i_sklj_{r+s+2}\cdots j_n$$

再让 l 与前边 s+1 个数码 $k, i_s, \cdots, i_2, i_1$ 依次做同样的对换，最后给出排列（2. 4）。根据（i）款所证，每次对换都改变排列的奇偶性，而按所述手续从排列（2. 3）到排列（2. 4）总共经历了 2s+1 次对换，由此从排列（2. 3）到排列（2. 4）其奇偶性也随之更改 2s+1 次，所以排列（2. 4）的奇偶性必与排列（2. 3）的奇偶性相反。

性质 2 对任何一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$，均可经过一系列对换把它变成标准排列。

证 关于排列的阶数 n 用归纳法进行证明。

当 n=2 时，只有两个排列，即 12 和 21。前者本身就是标准排列，而后者经过一次对换显然变成标准排列。

假设结论对 $n-1$ 阶排列已经成立，我们来证明结论对 n 阶排列也成立。

（i）当 $j_n=n$ 时，即排列为

（2. 5）　　$j_1j_2\cdots j_{n-1}n$

依归纳法假设，可经过一系列对换把前面的 $n-1$ 阶排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 变成标准排列，但与此同步便把排列（2. 5）变成了标准排列。

（ii）若 $j_n\neq n$，则先做一次 j_n 与 n 的对换便化为前一种情形，因而结论普遍地成立。

二　n 阶行列式的定义

为便于把握 n 阶行列式的一般定义，我们不妨简要地回顾一下二、三阶行列式的概念。

所谓二阶行列式，就是用四个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 做成的记号

（2. 6）　　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

以它来表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即有

（2. 7）　　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 这四个数都叫做二阶行列式的**元素**。这里，每个元素都被赋予双重脚码，借以标明它在行列式中的准确地址，其中前一个脚码叫**行脚码**，后一个脚码叫**列脚码**。二阶行列式由两行和两列元素所组成。称 a_{11}，a_{22} 为**主对角线元素**，并称 a_{12}，a_{21} 为**次对角线元素**。把（2. 7）式的右端叫做行列式（2. 6）的**展开式**，它的值等于主对角线元素之积减去次对角线元素之积。

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4-(-1)\times7=15$$

同样的，三阶行列式是用九个数做成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2. 8}$$

称数 a_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ 为行列式的**第 i 行第 j 列的元素**。三阶行列式的值由以下展开式确定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2. 9}$$

这个展开式共含六项，每项都是三个元素的连乘积，其中有三项取正号，三项取负号。图 1 给出了三阶行列式的展开法则：图中以黑圆点表示各元素所在的位置，把做乘积的三个元素用虚线联结起来；左图展示出取正号的三项，右图展示出取负号的三项。

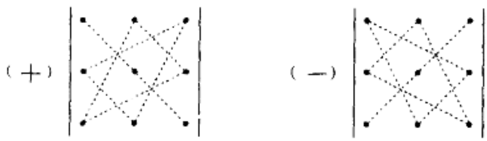


图 1

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\times5\times(-1)+1\times1\times(-2)+(-4)\times3\times0-1\times5\times0-(-4)\times1\times(-1)-2\times3\times(-2)=-4$$

称 (2. 7) 和 (2. 9) 式分别为二、三阶行列式的**萨拉斯** (Sarrus) 展开式。可以发现，它们有以下共同规律：

1　二阶行列式是两项的代数和，每一项都是取自既不同行又不同列的两个元素的乘积，可以写成这样的形状

$$(2.10)\qquad a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中，各元素的行脚码组成标准的二阶排列 12，而列脚码组成一个二阶排列 j_1j_2。当 j_1j_2 为排列 12 时，(2.10) 式给出了展开式 (2.7) 的前一项；当 j_1j_2 为排列 21 时，(2.10) 式又给出了展开式 (2.7) 的后一项。

类似地，三阶行列式是六项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积，具有形状

$$(2.11)\qquad a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中，各元素的行脚码组成标准排列 123，列脚码组成某一个三阶排列 $j_1j_2j_3$。当 $j_1j_2j_3$ 取遍全部三阶排列时，便由 (2.11) 式得到三阶行列式展开式的所有各项。

2　各项的符号可以这样确定：假如二、三阶行列式每一项均已写成 (2.10) 及 (2.11) 的形状。当各元素的列脚码组成奇排列时，则该项取负号；反之，则取正号。例如，在二阶行列式的展开式 (2.7) 中，前一项 $a_{11}a_{22}$ 的列脚码组成偶排列 12，所以该项取正号；后一项 $a_{12}a_{21}$ 的列脚码组成奇排列 21，因此这项取负号。又如，在三阶行列式的展开式 (2.9) 中，由于前三项的列脚码组成偶排列，从而均取正号；但是后三项的列脚码都组成奇排列，故取负号。

根据以上规律，给出行列式的一般定义如下：

定义˙ 由 n^2 个数作成的记号

$$(2.12)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，并称数 a_{ij}（i，j=1，2，…，n）为它的**第 i 行第 j 列的元素**。n 阶行列式（2，12）代表所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积

$$(2,13)\qquad a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和。其中，行脚码构成标准的 n 阶排列，列脚码构成一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$。在代数和中，如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列，则乘积(2. 13)取正号；反之，取负号。若用字母 D 来标记行列式(2. 12)，则有

$$(2.14)\qquad D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

把等式右端叫做 n 阶行列式的**展开式**，这里“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和。也常把行列式（2. 12）写成

$$D=|a_{ij}|$$

显然，n 阶行列式的展开式共含 n！项。

当 n=2 及 n=3 时，（2. 14）式给出了二、三阶行列式的展开式；当 n=1 时，（2. 14）式变为

$$|a_{11}|=a_{11}$$

这就是一阶行列式。

与二、三阶行列式一样，称 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}为 n 阶行列式（2. 12）的**主对角线元素**。如果于行列式主对角线某一侧的元素全部为零，则称这种行列式为**三角形行列式**，其中把

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做**下三角形行列式**，而把

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做**上三角形行列式**。

若按定义计算一个 n 阶行列式，需先找出所有位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，然后再求它们的代数和。

例 计算下三角形行列式 D_1。

解 由于该行列式含有大量的零元素，因此可以预料，在它的展开式里必有许多项为零，这些项没有必要计入代数和。

在形如（2. 13）的乘积中，为首的元素 a_{1j_1} 是取自行列式的第一行，而在 D_1 的第一行仅当取 a_{11} 时才可能使对应的项异于零；a_{2j_2} 是取自行列式的第二行，在 D_1 的这一行里，因为 a_{21} 与 a_{11} 处在同一列，所以不应再取，在剩余的 n－1 个元素中，只有取 a_{22} 才可能使对应的项异于零；以此类推，一般地，于行列式 D_1 的第 i（i＝1，2，…，n）行的所有可取的元素中，只有取 a_{ii} 才可能使对应的项异于零。由此易知，在 D_1 的展开式中，唯有乘积

$$a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

这一项可能不为零，而且由于其列脚码构成标准排列，所以这项的符号为正。有

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称这一行列式为**对角形行列式**。

§1.3 行列式的性质

不难想象，如果用定义直接去计算行列式，即使对阶数不太高的情形也是非常麻烦的。为了化简计算，这里将介绍行列式的一些基本性质。

命题 在 n 阶行列式

(3. 1) $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，任意取不同行和不同列的 n 个元素的乘积

(3. 2) $$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

均为行列式的一项，而且它在展开式中的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

证 由于（3. 2）中的元素来源于行列式（3. 1）的不同行和不同列，故 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 阶排列。根据排列的性质 2，可经过陆续交换两个元素的位置使（3. 2）中的元素顺序按 行脚码组成标准排列，变为

（3. 3） $$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

而按数乘法的可交换性，乘积本身并未改变。乘积（3. 3）具有（2. 13）的形状，它是行列式（3. 1）的一项，其符号为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$。于是，只须说明

（3. 4） $$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

事实上，每次交换（3. 2）中两个元素的位置，其行脚码和列脚码组成的排列均随同发生一次对换，据排列的性质 1，这两个排列的逆序数也将同时改变其奇偶性，所以它们和的奇偶性却不因此而改变。于是可以断定，从乘积(3. 2)到(3. 3)，无论元素位置交换多少次，两个逆序数的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

与

$$\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)=\tau(k_1k_2\cdots k_n)$$

必有相同的奇偶性，从而有（3. 4）式成立。

若把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的所有各行都依次地变为同序号的列，可得到行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的**转置行列式**。

行列式有下列一些性质：

性质 1 行列式经转置后其值不变。

证 事实上，把 n 阶行列式 D 的项写成

(3. 5) $$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 阶排列。它是 D 中位于不同行和不同列的 n 个元素的乘积，但它同时也是位于转置行列式 D′ 的不同行和不同列的 n 个元素的乘积。所不同的是：这里每个元素的行序号在 D′ 中变成了列序号，而每个元素的列序号在 D′ 中变成了行序号。因此乘积 (3. 5) 也是行列式 D′ 的一项。一样的说法反过来也是对的。从而行列式 D 与 D′ 是由同一些项所组成的代数和。根据命题还可推知，每一项在两个行列式里所取的符号也相同，故得 D′ =D。

从性质 1 可以得到这样的结论：凡关于行列式的行所做出的每个正确的断语，都可以移置到它的列上去；反过来也一样。因此，下面我们所要介绍的性质，将仅就行列式的行加以叙述和证明，但对行列式的列仍然成立。

性质 2 若某行列式有一行的元素全部为零，则此行列式等于零。

这条性质可从行列式的定义式看出。

性质 3 交换行 列式的任意两行，则行列式变号。

证 例如，交换行列式