工科大学数学丛书

线性代数习题课八讲

刘九兰　张乃一　曲文萍　编著

天津大学出版社

线性代数习题课八讲

刘九兰　张乃一　曲文萍　编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是根据工科院校线性代数教学基本要求，作为线性代数课本的辅助教材而编写的习题课教材。内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的相似对角形、线性空间、线性变换、欧氏空间及二次型共八讲。每讲均在简要总结基本内容的基础上，通过典型例题的分析，介绍线性代数解题方法及技巧，每讲后面附有练习题及练习题的提示与答案。

本书可作为工科大专院校习题课教材，亦可作为电大、成人教育、工程师提高的辅导教材，自学《线性代数》的读者也可作为参考材料。

线性代数习题课八讲

刘九兰　张乃一　曲文萍 编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本：850×1168毫米 1/32　印张：4 1/2 字数：117千字

1989年11月第一版　1989年11月第一次印刷

印数：1- 7000

ISBN 7-5618-0133-5

O·11

定价：2.20元

前 言

为了加深对线性代数课程内容的理解，提高学生综合分析和灵活运用的能力，以进一步提高教学质量，我们编写了《线性代数习题课八讲》一书。本书依照一般线性代数教材的内容，按八个专题（八讲）编写，每讲包括五部分内容：

一　基本要求；

二　基本内容；

三　例题分析；

四　练习题；

五　提示与答案。

每讲的基本内容只是本讲中所涉及到的内容，而不是教材中该章内容的总结。例题分析部分大多选自线性代数中的典型例题，通过对典型例题的分析，介绍线性代数中基本解题方法及解题技巧，练习题多是例题分析中所介绍的方法和技巧的运用，读者可通过练习进一步掌握解题要领，书后附有部分题的提示与答案。由于解题方法不唯一，所给提示不一定是最好的方法，希望读者不要被提示所限制，对于具有多种解法的题，也只给出一种解法，因此书中所给提示仅供参考。

本书全稿由徐绥副教授审核，编写过程中得到高立仁、丁学仁、陈潜英同志的热情帮助和大力协助，在此一并表示感谢。

本书曾在天津大学工科本科线性代数教学中使用过几遍，得到师生们的好评，现经整理由天津大学出版社予以正式出版。本书虽经数次修改，但由于水平所限，加之时间仓促，难免有错误及不妥之处，恳请使用本书的同志多提宝贵意见。

编者

1988.11.

目　录

第一讲　行列式及其计算……………………………………（1）
第二讲　矩阵运算…………………………………………（15）
第三讲　向量组的线性相关性……………………………（38）
第四讲　线性方程组………………………………………（60）
第五讲　矩阵的相似对角形………………………………（73
第六讲　线性空间…………………………………………（87）
第七讲　线性变换…………………………………………（103）
第八讲　欧氏空间及二次型………………………………（118）

第一讲　行列式及其计算

一　基本要求

1　理解 n 阶行列式的定义，熟练掌握行列式的性质。

2　掌握行列式的几种计算方法。

二　基本内容

1　n 阶排列及其逆序的定义。

2　n 阶行列式定义及其性质。

3 行列式按某一行（列）展开。

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

4　行列式按某 K 行（列）展开（$1<k\leqslant n-1$）——拉普拉斯定理.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = N_1\cdot A_1+N_2\cdot A_2+\cdots+\cdots N_t\cdot A_t$$

其中$t=C_n^k$，而N_i（$i=1,2,\cdots t$）为取定的某k行（列）所得到的k阶子式；A_i为N_i的对应代数余子式．

三　例题分析

由n阶行列式的定义知，对角形行列式及上（下）三角形行列式的值分别为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & n_2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

所以要计算一个n阶行列式D_n，通常是利用行列式的性质，经过一系列行列式变形，把复杂行列式化简为一个上(下)三角形行列式；或利用行列式性质先化简行列式，然后再将行列式按某一行（列）展开，将高阶行列式化为较低阶行列式．

1　用n阶行列式定义直接计算

例1 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}\text{其中}a_i\neq0\,(i=1,2,\cdots n)$$

解 因为该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素，由 n 阶行列式定义知，D_n只含一项$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$；其中元素的下标正好是它们所在行的下标，已是一个标准排列，而它们所在列的下标构成的排列为$(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot n$；这个排列的逆序数$\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$；故

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot a_1 a_2 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

例2 在一个 n 阶行列式中，等于零的元素如果比 (n^2-n) 还多，那么这个 n 阶行列式必为零.

解 $\because$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由 n 阶行列式定义知D_n值是$n!$ 项代数和，而其中每一项都是 n 个元素的乘积，这n个元素又需取自不同行不同列.

又 n 阶行列式D_n中一共有n^2个元素，如果等于零的元素比(n^2-n) 还多，那么其中不等于零的元素就一定比$n^2-(n^2-n)=n$ 还少，也就是说D_n中最多有 $(n-1)$ 个元素不等于零，所以D_n的$n!$ 项中每一项的 n 个元素中必有零元素出现. 即$n!$ 项的每一项都是零，故$D_n=0$.

小结 （1） 用 n 阶行列式的定义直接计算行列式是相当麻烦的，因此只有在特殊情况下才用这方法.

（2） 仅当一个行列式的每一行（列）上的 n 个元素中只有少数元素不为零时，才考虑用定义计算.

2 化为三角形行列式

例3 计算 $(n+1)$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$ 其中$a_i \neq 0$（$i=1, 2, \cdots n$）

解　考虑将D_{n+1}化简为一个上（下）三角形行列式

$$D_{n+1}=a_1\cdot a_2\cdots a_n\cdot\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n} a_j\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n} a_j\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

例4　计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$ 其中$x_i \neq a_i$（$i=1, 2, \cdots n$）

解　由性质化简

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\cdot\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\cdot\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right),$$

其中 $\frac{x_1}{x_1-a_1} = 1+\frac{a_1}{x_1-a_1}.$

小结（1） 形如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

的行列式，都可以考虑使用化成三角形行列式计算，其中$b_i \neq 0$，（$i=2, 3, \cdots n$）$c \neq 0$，a_i为任意数（$i=1, 2, \cdots n$）。

（2）用化三角形计算行列式比较容易掌握，也是计算行列式的一种常用方法。如下面各行列式都可以使用化三角形法计算。

(i) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ 其中 $x \neq a$

(ii) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 其中 $x \neq a_i$, $(i = 1, 2 \cdots n)$

(iii) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

3 n阶行列式按某一行（列）展开

例5 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解 因为这个 n 阶行列式的第一列上只有两个元素不为零，所以可按第一列展开

$$D_n = x \cdot \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+y\cdot(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}\cdot y^n.$$

例6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 由该行列式结构知，利用性质：第一行的（-1）倍加到第 i（$i=2,3,\cdots n$）行上去，行列式的值不变.

$$故\quad D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-2)^{n-1}$$

小结 给出一个 n 阶行列式往往不会那么特殊（正好在某一行（列）上只有一、二个元素不为零），往往需要先利用行列式性质化简使得行列式某一行（列）上多数元素为零，然后再按这一行（列）展开.

4 利用拉普拉斯定理计算行列式

例7 计算 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 因为这个5阶行列式后三行中“大片”位置上元素为零，只有二列元素不为零，所以利用拉普拉斯定理按后三行展开，那么由后三行可以得到 $t=C_5^3=10$个三阶子式 N_i（$i=1, 2, \cdots 10$），其中每一个三阶子式N_i中都至少有一列元素全为零；所以每一个$N_i=0$；故 $D=N_1\cdot A_1+N_2\cdot A_2+\cdots+N_{10}\cdot A_{10}=0$。

例8 如果n阶行列式中处于某K行和某L列的交叉处的元素都等于零，且$K+L>n$，则这个n阶行列式必为零。

证明 因为K，L，n均为正整数，又$K+L>n$，所以$L>n-K$，不妨设$L=n-K+1=n-(K-1)$，

下面以n阶行列式的前k行和后L列的交叉处元素都为零给出分析证明。（否则，可以经若干次行、列调换，得到这种形式，由行列式性质知道，调换前后的行列式其值至多相差一个负号）。

$$D_n=\begin{array}{r} \\ \text{共}K\text{行}\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & \overbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{\text{共}L\text{列}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \cdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ a_{k+11} & & & a_{k+1k-1} & \qquad\qquad a_{k+1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} \qquad\quad a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按前}K\text{行展开}} N_1\cdot A_1+N_2\cdot A_2+\cdots N_t\cdot A_t$$

其中 $t=C_n^k$

由于前K行中只有（$K-1$）列元素不为零，故由前K行所得到的t个K阶子式N_i（$i=1, 2\cdots t$）全为零，所以$D_n=0$。

小结 （1）一般地当D_n中“大片”位置上元素为零时，可考虑用拉普拉斯定理——按某K行展开计算D_n。

（2）实际上给出一个D_n不会像例7与例8那么特殊，已经是“成片”元素为零；如果对D_n先由性质化简使得n阶行列式中“大片”位置上元素为零，这时也可使用拉普拉斯定理。

5 拆行（列）法计算行列式

例9 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解 利用行列式性质把第一列拆开

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

对于等号右边的第一个行列式由性质把第一列的（-1）倍分别加到第i（$i=2, 3\cdots n$）列上去，右边的第二个行列式由性质对第一列提取公因子b_1，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}+b_1\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

这时等号右边第二个行列式由性质把第一列的（$-b_i$）倍分别加到第i列上去（$i=2, 3\cdots n$），得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}+b_1\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases} a_1+b_1, & \text{当 } n=1 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+b_1\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1-a_2)(b_2-b_1), & \text{当 } n=2 \\ 0 & \text{当 } n\geqslant 3 \end{cases}$$

例10 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

证明 对于左端行列式可利用性质将第一列拆开得到两个行列式

$$左=\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

对于等号右边第一个行列式把第一列的（-1）倍加到第三列上去；右边第二个行列式把第一列的（-1)加到第二列上去，则

$$左=\begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

6　利用范德蒙行列式结论计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i\geqslant j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

例11 计算 $(n+1)$阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中$b_i\neq 0$　$a_i\neq 0$　$(i=1,2\cdots n+1)$

解 由性质化简

$$D_{n+1}=a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n\cdot\begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{b_1}{a_1}\right) & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right) & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i^n\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right) & \left(\frac{b_2}{a_2}\right) & \left(\frac{b_3}{a_3}\right) & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^n & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i^n\cdot\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right).$$

例12 设$f(x)=C_0+C_1x\quad C_2x^2+\cdots+C_nx^n$，用克莱姆法则

证明：若$f(x)$有$(n+1)$个不同的根，则$f(x)$是零多项式。

证明 $f(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$，令$a_0$，$c_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$，是$f(x)$的$(n+1)$个不同的根，即$a_i\neq a_j$（$i\neq j$，$i$，$j=0$，$1$，$2\cdots n$）

$\because$ $f(a_i)=0$（$i=0$，1，2，n）

$$\therefore\quad \begin{cases} c_0+c_1a_0+c_2a_0^2+\cdots+c_na_0^n=0 \\ c_0+c_1a_1+c_2a_1^2+\cdots+c_na_1^n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0+c_1a_n+c_2a_n^2+\cdots+c_na_n^n=0 \end{cases} \qquad (1)$$

（1）式是关于c_0，c_1，$c_2\cdots c_n$的线性齐次方程组，其系数行列式为

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & c_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{n\geqslant i\geqslant j\geqslant 0}(a_i-a_j)\neq 0 \quad \because \text{当} i\neq j \quad a_i\neq a_j$$

由克莱姆法则知方程组（1）只有唯一零解，即$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$ 故 $f(x)=0$。

四　练习题

1　行列式D中每个数a_{ij}分别乘以b^{i-j}（$b\neq 0$），试证所得的行列式与D相等。

2　计算下列行列式