经济数学基础

微积分

王桂云　编

河南人民出版社

前 言

随着我国经济体制改革的深入发展和现代化管理的推广应用，数学方法在经济管理上的应用也越来越广泛地受到人们的重视。学习数学知识，掌握数学工具，已成为不少经济工作者的迫切要求。为了适应这一形势和满足高等金融专科层次各种办学形式的教学需要，编者在总结多年来教学经验的基础上，编写了这本《微积分》。本教材也可作为广大经济工作者的自学用书。

编者通过多年的教学实践，深深感到作为一本经济数学基础教材，既要体现数学自身的系统性，又要与经济工作联系起来，用数学方法分析经济现象，注意与相关学科的联系，为后继课程打好基础，体现一定的实用性，本书的编写就试图从这几方面的结合上作些尝试。

在编写中力求贯彻“通俗、简明、适用”的原则，讲清基本概念和基本方法，并适当联系经济问题。另外在教材中每章还配置了适量的习题，并附有答案，便于自学与掌握所学知识。

由于水平所限，书中难免有不妥之处，恳请同行和读者批评指正。

编者

1994 年 1 月

目 录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的主要对象，它是反映变量间依从关系的一个重要数学概念，在经济邻域中涉及的大量数量关系都可以用函数关系来表达。我们将用极限方法作为主要手段对函数加以分析、研究。

§1　函　　数

一. 函数概念

两个变量之间的相互制约、依从关系就是函数关系。在没有给出定义之前，先看以下几个例子。

例 1. 某工厂生产某种产品，每日最多生产 100 吨，固定成本为 130 元，每生产一吨，增加成本 6 元，则每日产品的总成本 C 与日产量 x 的关系用一数学式子表示为：

$$C = 130 + 6x$$

其中变量 x 与 C 的变化范围分别为：

$0 \leqslant x \leqslant 100$，　　可用一闭区间 $[0,100]$ 表示.

$130 \leqslant C \leqslant 730$，　可用一闭区间 $[130,730]$ 表示.

当 x 变化时，C 遵循 $130+6x$ 的规律而变化，每当 x 取定某一数值 $x_0 \in [0,100]$ 时，C 就有一确定的数值 $C_0 \in [130,730]$ 与之对应。

例 2. 某一天中，气温自动记录仪记录了一昼夜内温度的升降情况，如图 1－1。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

气温 Q 与时间 t 的变化规律，二者之间的关系由图形表达出，可以看出 Q 与 t 是连续变化的，其范围分别为：

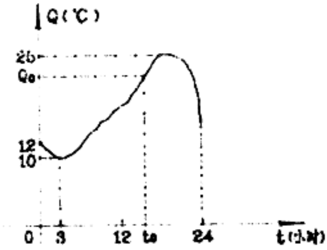


图 1—1

$0\leqslant t\leqslant 24$，可用 $[0,24]$ 表示，$10\leqslant Q\leqslant 25$，可用 $[10,25]$ 表示。

当 t 变化时，Q 遵循着给定的曲线而变化，每当 t 取定 $t_0\in[0,24]$ 时，Q 就有 $Q_0\in[10,25]$ 与之对应。

例 3. 银行储蓄存款，一年定期整存整取，年利率为 10.98%，则存款与利息的关系可列表如下：

存入金额(元)	50	100	300	500	1000
应得利息(元)	5.49	10.98	32.94	54.9	109.8

由表可知，当给定存入金额时，所对应的应得利息也就确定，存款与利息为离散变量，利息随着存入金额的增加而增加。

以上三例都是反映两个变量之间的相互依从关系，在变化的过程中，是相互有联系地遵循一定的规律变化着。

我们抛开每个例子所包含的具体意义以及表达变量之间关系的具体形式，由它们的共同性质加以概括，就得到函数的

概念。

定义　　设有两个数集 X 与 Y，若按某一确定的对应规律 f，对每一个 $x\in X$ 有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是由 X 到 Y 的函数，记作

$$f:X\to Y \qquad 或\ y=f(x) \qquad x\in X$$

其中 X 称为函数的定义域，$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数的值域。

如果把 x、y 分别作为 X、Y 中取值的变量，则 x 称为自变量、y 称为因变量，y 随 x 变化而变化。

由定义我们知道：

两个集合 X 和 Y 都是数集，因为常用的变量，多是只取实数值，因此，我们以后只讨论定义于实数集合的函数。

定义要求每个 $x\in X$，总有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，这种函数叫做单值函数。否则就叫做多值函数。今后我们所研究的函数均指单值函数。

另外，确定函数的因素有三个：一个是定义域 X，一个是值域 Y，还有对应规律 f。其中定义域与对应规律是两个要素，因为在对应规律 f、定义域 X 及值域 Y 中，$y=f(x)$，$x\in X$，只要 f、x 给定就能确定 y 的值。

f 表示对应规律，它只是函数的一种记号，有时也可以用 F、Q、g……表示对应规律。其形式如：在例 1 中总成本是日产量的函数，它们之间的依从关系是用一数学式子 $130+6x$ 表达。那么对应规律用 f 表示即是 $130+6x$。例 2 中温度 Q 是时间 t 的函数，它的对应规律 f 是由一条曲线表达。例 3 中利息是存入金额的函数，其对应规律 f 是由表格表达的。

定义域 X 是自变量 x 的取值范围，即是使函数有意义的

实数 x 的集合。如:例 1 中 $X=[0,100]$;例 2 中 $T=[0,24]$;例 3 中的 X 是由五个数构成的集合,即 $X=\{50,100,300,500,1000\}$。若 $x_0\in X$,有唯一的 $y_0\in Y$ 与之对应,则函数在 x_0 点有定义,也就是在定义域内的任一点 x_0 都是有定义的,并称 y_0 为当 $X=x_0$ 时的函数值,记作 $y_0=f(x_0)$。

值域 Y 是函数 y 的取值范围。如例 1 中值域是闭区间 $C=[130,730]$;例 2 中温度的变化范围是值域 $Q=[10,25]$;例 3 中值域是 $Y=\{5.49,10.98,32.94,54.9,109.8\}$是由五个数构成的集合。

若给出了函数表达式 $y=f(x)$,通常确定定义域的方法是从两方面考虑,一般都是从函数的解析表达式求得,另外在实际应用问题中,必须根据实际意义来确定自变量的取值范围。

例 4. 求函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域。

解:要使 $\lg(x-1)$有意义,必须 $x-1>0$, 即 $x>1$;

要使$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$有意义,必须 $x+1>0$, 即 $x>-1$

故函数 y 的定义域为

$\{x|x>1\}\cap\{x|x>-1\}=\{x|x>1\}$

即区间$(1,+\infty)$。

例 5. 设 $f(x)=2x^2+5x+4$ 求 $f(0),f(2),f(x+3)$

解:$f(0)=2\cdot 0^2+5\cdot 0+4=4$

$f(2)=2\cdot 2^2+5\cdot 2+4=22$

$$f(x+3)=2\cdot(x+3)^2+5\cdot(x+3)+4$$
$$=2x^2+17x+37$$

判断两个函数是否相同,要从对应规律、定义域两要素去

检查，而与用什么字母表示无关。若两函数的对应规律、定义域分别都相同时，才称是相同的函数，如 $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$ 两函数的定义域是$(-\infty、+\infty)$，而对应规律却不同，因此就不是相同的函数，但若只考虑在$(0、+\infty)$上，两函数就是相同的。

二、函数表示法

函数关系的表示法通常有三种。

1、解析法：也叫公式法，是用数学公式表示对应规律的。

如 $y=2+3x$，$y=\ln(x^2-1)$及第 1 页例 1 等。解析法便于对函数作理论研究、定量分析和运算。

需要注意的是，若变量之间的对应规律不能用一个公式表示出来，而是在函数定义域的不同部分内用不同的数学表达式来描述，要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为“分段函数”。

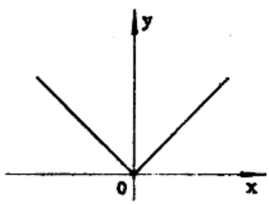


图 1－2

例 1. 某市公共汽车公司规定：坐 1 站到 3 站票价 0.20 元；3 站到 6 站，票价 0.30 元；7 站到终点站是 0.40 元，站数和票价的关系可用以下形式表示：

$$f(x)=\begin{cases}0.20 & 1\leqslant x\leqslant 3\\ 0.30 & 3<x\leqslant 6\\ 0.40 & 7\leqslant x\end{cases}$$

例 2. 函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

是定义在$(-\infty,+\infty)$上的一个函数。如图 1－2 所示。

分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，在实际应用中，特别在经济邻域中常用到这种表示形式。

在求分段函数的定义域时，是把几个公式的定义域并在一起。求各点的函数值时，应代入该点所在区间的公式中去。

例 3. 已知

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leqslant x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

试求其定义域及 $f(-\frac{1}{2})$、$f(\frac{1}{2})$、$f(0)$.

解：定义域是$[-1,1]$，如图 1－3.

∵当$-1\leqslant x<0$ 时，

$y=f(x)=x+1$

$\therefore\quad f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+1$

$=\frac{1}{2}$

又∵当 $0<x\leqslant 1$ 时，

$y=f(x)=x-1$

$\therefore\quad f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

又∵当 $x=0$ 时，

$y=f(x)=0$

$\therefore f(0)=0$

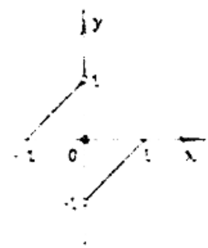


图 1－3

2. 图象法

用直角坐标系中的曲线表示函数的方法叫做函数的图象表示法，如第1页例2，这种方法在工业企业管理中常被采用，比较直观，能使所讨论的问题一目了然。

3. 表格法：

在实际应用中，根据测验或计算得到的数据，把一系列自变量的值，以及其对应的函数值列成表。如对数表、三角函数表及第2页例3等等。这种表格法在经济问题的讨论中也常被应用。

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义　给定函数 $y=f(x)$

(1)如果对所有的 $x\in(-a,a)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为在 $(-a,a)$ 上的偶函数。

(2)如果对所有的 $x\in(-a,a)$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为在 $(-a,a)$ 上的奇函数。

对于偶函数因 $f(-x)=f(x)$，所以 $P[x,f(x)]$ 如果在图形上，则与它对称于 y 轴的点 $P'[-x,f(x)]$ 也在图形上，

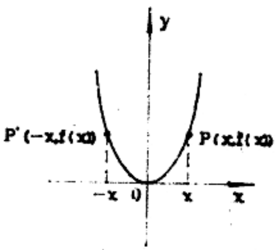


图1—4

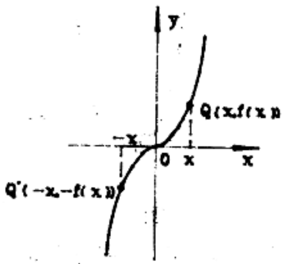


图1—5

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

因此偶函数的图形对称于 y 轴，如图 1—4。

对于奇函数，因 $f(-x)=-f(x)$，所以点 $Q[x,f(x)]$如果在图形上，则与它对称于原点的点 $Q'[-x,-f(x)]$也在图形上，因此奇函数对称于原点，如图 1—5。

例 1. 判断 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性

解：因为在$(-\infty,+\infty)$上

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4-2(-x)^2 \\ &= x^4-2x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以 $y=x^4-2x^2$ 为偶函数，如图 1—6。

例 2. 判断 $y=x^3+1$ 的奇偶性。

解：因为在$(-\infty,+\infty)$上

$$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq f(x)=x^3+1$$

$$且\ f(-x)\neq -f(x)=-x^3-1$$

所以 $y=x^3+1$ 即非偶函数，也非奇函数。如图 1—7。

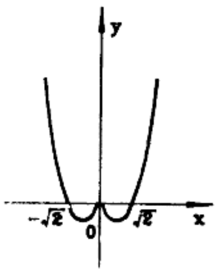


图 1—6

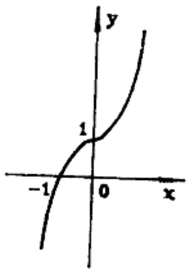


图 1—7

由上例可知，函数的奇偶性是函数本身在以原点为中心的对称区间上的一个特性；并非所有函数都有奇偶性。

2. 函数的周期性

定义　　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期。

例如三角函数 $y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π。

3. 函数的单调增减性

定义　　如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的。

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1－8；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1－9。

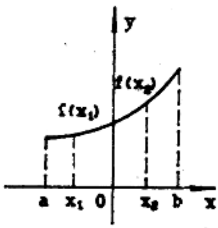


图 1－8

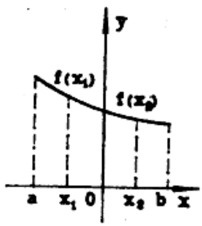


图 1－9

例 3. 判断 $y=x^3$ 的单调性.

解：对于任意的 x_1、x_2，有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3$$

如果 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^3$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的。

例 4. 判断 $y=2x^2+1$ 的单调性。

解：对于任意的 x_1, x_2，有

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= (2x_1{}^2+1)-(2x_2{}^2+1) \\ &= 2(x_1{}^2-x_2{}^2) \end{aligned}$$

在 $(-\infty,0]$ 内，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $y=2x^3+1$ 是单调减少的。

在 $[0,+\infty)$ 内，如果 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=2x^2+1$ 是单调增加的。

注意，在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=2x^2+1$ 不是单调函数，由此我们知道，函数的单调性是指函数在某一区间上的性质而言。

4. 函数的有界性

定义　　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，（区间 (a,b) 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的。如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1=M$。函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界，而在 $(0,2)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，对于 $(0,2)$ 内的一切 x 值，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 都成立。

四. 反函数的概念

在某一变化过程中，其自变量与因变量的选取是有着相对性的。例如：

设某种商品在销售过程中，总收入为 y，销售量为 x，已知该商品的单价为 a。

如果给定了销售量 x，则可以通过关系 $y=ax$ 确定销售总收入 y，这种关系称为销售总收入是销售量的函数。但反过来，如果给定了销售总收入 y，则可以由关系式 $x=\frac{y}{a}$ 确定销售量 x，这种关系称为销售量是销售总收入的函数。我们称 $x=\frac{y}{a}$ 是 $y=ax$ 的反函数，或者说它们互为反函数。

一般地，在已知函数 $y=f(x)$ 中，如果把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数。记作 $x=f^{-1}(y)$，显然 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 互为反函数。

值得注意的是，反函数的实质在于它所表示的对应规律。函数 f 和它的反函数 φ 一般是不相同的两个函数。习惯上，我们总是用 y 表示因变量，用 x 表示自变量，所以反函数 $x=\varphi(y)$ 可写成 $y=\varphi(x)$。

如：　求 $y=3x+1$ 的反函数。

解：　由 $y=3x+1$　可以求出 $x=\varphi(y)=\frac{y-1}{3}$，因此得出 $y=3x+1$ 的反函数是 $y=\frac{x-1}{3}$，如图 1－10。

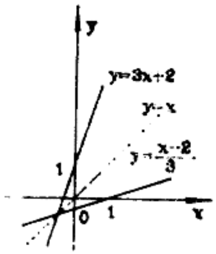


图 1－10

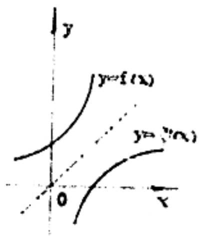


图 1－11

可知函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$，它们的定义域与值域是互换的，它们的图形是对称于直线 $y=x$，如图 1－11。

还可以知道，一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数关系，即单调函数才有反函数。

例如：在$(-\infty,+\infty)$内，$y=x^2$ 不是一一对应的函数关系，所以它没有反函数。而在$(0,+\infty)$内，$y=x^2$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$；在$(-\infty,0)$内 $y=x^2$ 有反函数 $y=-\sqrt{x}$。

五. 复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

我们已经学过的常量、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种函数，称为基本初等函数。其它常见的函数都是由这些函数构成的。

为了更好地理解函数概念，有必要再复习一下基本初等函数的性质。

(1)常量 $y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，图形为平行于 x 轴截距为 c 的直线，如图 1－12。

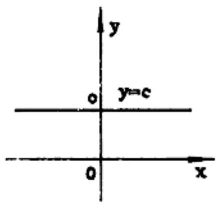
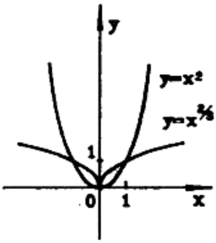


图 1—12

(2)幂函数 $y=x^\alpha$(α 为实数)它的定义域随 α 而异，但不论 α 为何值，x^α 在$(0,+\infty)$内总有定义，而且图形都经过(1,1)点。如 $y=x^2$，$y=x^{\frac{2}{3}}$ 等，定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形对称于 y 轴，如图 1－13.



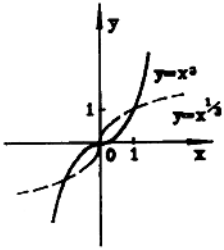
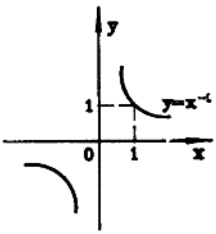


图 1—13　　　　图 1—14

$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形对称于原点，如图 1—14。

$y=x^{-1}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图形对称于原点。如图 1—15。



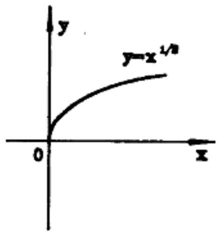


图 1—15　　　　图 1—16

$y=x^{\frac{1}{2}}$，定义域为$[0,+\infty)$，如图 1—16。

(3)指数函数　　$y=a^x$　　$(a>0,a\neq1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，都通过$(0,1)$点，当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com