



# 随机网络及其应用

冯允成 吕春莲 等编



北京航空學院出版社



## 内 容 简 介

本书系统地介绍了随机网络技术的基本原理、求解方法和实际应用。全书共分十三章,前五章介绍了随机网络的基本概念、概率论与统计学有关知识、随机网络的解析法原理、离散系统仿真的基本概念和方法以及随机网络仿真初步形式的构模与仿真。后八章由浅入深的介绍了随机网络的初级功能、对初级功能的扩展以及随机网络的高级功能。

本书可用作工科院校的系统工程与管理工程有关专业的研究生、本科生教材,也适用于广大科研人员、技术人员及管理人员学习和参考。

## 随机网络及其应用

馮允成 呂春蓮 編  
杜端甫 楊 光

責任編輯 郭維烈

北京航空学院出版社出版  
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售  
北京航空学院印刷厂印装

\*

787×1092 1/16 印张:15.5 字数:380千字  
1987年4月第一版 1987年4月第一次印刷 印数:5000册  
统一书号:15432·047 定价:2.60元

## 前 言

当人们开始把一个客观过程看作系统，并用系统科学的思想和方法论来分析研究其基本特性时，便在认识上产生了质的飞跃。而首先用系统科学来描述客观过程的就是网络分析技术。事实上，网络是一种能够精确而又直观地描述实在系统的重要形式。

五十年代末期，美国军方第一次用网络形式来评审“北极星”武器系统的尝试，尽管是很初级的网络技术，却给予人们有益的启示。六十年代初，我国在航天工程中也开始试用网络技术，一九六五年以来，在华罗庚教授的推动下，我国在各行各业中推广和应用肯定型网络技术，取得了很好的经济效益。

随着科学技术和工业生产的迅猛发展，人们日益关注实际过程中的随机因素。肯定型的，只能描述一次性工程项目的网络方法，已远远不能满足实际需要，于是一种能够充分反映具有多种随机因素并且适用于重复运行和具有反馈环节的网络系统应运而生，即随机网络技术。

随机网络技术是系统工程中的一个重要分支，它是在随机变化的环境条件和系统内部随机因素共同作用下，对系统的一种网络描述。这种网络技术的问世，突破了肯定型网络在节点逻辑和网络结构上的束缚，能够在社会的各个领域对不同系统进行网络构模与分析，并给出系统的静、动态特性和概率分布。在工程、科研、生产、军事、经济、金融以及社会服务等方面迅速地得到广泛的应用，显示出强大的生命力。

随机网络技术是概率论与数理统计、控制理论、计算机仿真技术以及管理科学的综合反映，是一门多学科交叉的新兴边缘学科。随着各门学科的发展，随机网络将继续产生新的突破和飞跃，因此是一门正处于发展中的学科。

编写本书的宗旨在于比较系统地介绍随机网络技术的基本原理、处理方法和实际应用，使读者对随机网络技术在理论和实际的结合上有一个较全面的认识。在编写本书过程中，曾将全书初稿用作系统工程和管理工程专业研究生的教材，并为来自各高等院校、工业企业、科研单位、军事部门的同志举办了随机网络“讲习研究班”，普遍反映随机网络技术是一门新兴学科，具有理论上严谨，应用范围宽广，使用方便，获取信息多等特点。从实践中我们体验到本书可以用作工科院校、系统工程、管理工程和财经院校有关专业的研究生教材。在经过内容选择后也可用作相应专业大学生的教材。此外，本书也适合广大科研人员、技术人员以及管理人员学习和参考，以便在实际问题中应用随机网络，提供的结果可作为领导部门和管理部门决策的依据。

本书是在系统阐述随机网络原理及网络仿真的基础上，采取循序渐进，由简到繁和构模分析与实际应用相结合的方式编写的，重点介绍了具有排队功能的随机网络原理、构模与应用。第一、二章介绍了随机网络的基本概念及与随机网络技术有关的概率论基本知识，使读者具备初步的理论基础，第三章阐明了随机网络的解析法原理及其应用。为适应网络仿真的需要。第四、五章介绍了离散系统仿真、统计推断的基本概念和方法，以及随机网络仿真的初步形式GERTS网络的构模和仿真。第六、七两章对Q—GERT随机网络的初级功能和分析程序作了详细的论述。第八章对利用上述初级功能进行构模和实际应用作了分析和说明，以便读者加深对随机网络的理解。至此，读者即具有上机运行简单随机网络模型的能力。

力。第九、十两章是对  $Q-GERT$  初级功能的扩展，以适应更为广泛的构模需要。第十一、十二、十三章进一步阐明  $Q-GERT$  网络的高级功能，对用户程序插入及子网络等作了分析和说明，从而使读者对随机网络技术有更全面的理解，并有能力对大型、复杂的问题进行构模、上机作仿真运行并对仿真结果进行统计分析。

配合随机网络的仿真和应用，我们开发了可供实际应用的  $Q-GERT$  仿真软件系统，并经鉴定通过。该软件用  $FORTRAN IV$  语言写成，可在任何中型机上移植运行，也可在微机上运行使用。北京航空学院八系可提供该软件的全部文件及咨询。

本书是在一九八三年编写的“随机网络及其应用— $Q-GERT$ ”试用教材基础上改编而成。第一至第五章由冯允成编写，第六至第八章由杜端甫编写，第九、十两章由吕春莲对试用教材中杨光编写的第八、九两章改写而成，第十一至第十三章由吕春莲编写。本书由冯允成、吕春莲担任主编。

本书曾由卢谦同志进行了全面审校工作，提出许多宝贵意见，特此表示衷心感谢。

由于我们水平有限，不妥或错误之处恳请广大读者批评指正。

编 者

一九八六年三月于北航

# 目 录

## 第一章 随机网络概述

- §1 随机网络的产生和发展····· ( 1 )
- §2 随机网络的一般形式——广义活动网络  $GAN$  ····· ( 4 )
- §3 随机网络构模实例····· ( 8 )

## 第二章 随机变量的数字特征及矩母函数

- §1 随机变量的概率测度····· ( 13 )
- §2 随机变量的数学期望和方差····· ( 15 )
- §3 随机变量的概率分布····· ( 18 )
- §4 随机变量的矩和矩母函数····· ( 30 )

## 第三章 随机网络解析法原理

- §1 信号流图的基本概念····· ( 36 )
- §2  $GERT$ 网络的解析算法及其应用 ····· ( 44 )
- §3  $GERT$ 网络解析法的扩展 ····· ( 55 )

## 第四章 离散系统仿真

- §1 离散系统仿真的基本原理····· ( 68 )
- §2 随机数发生器····· ( 74 )
- §3 仿真输出数据的分析····· ( 81 )

## 第五章 随机网络的仿真—— $GERTS$

- §1 随机网络与离散事件仿真····· ( 90 )
- §2  $GERTS$  的构模和仿真····· ( 93 )
- §3  $GERTS$  网络中节点功能的扩展····· ( 96 )

## 第六章 具有排队功能的随机网络 ( $Q-GERT$ )

- §1  $Q-GERT$ 网络及其构模过程 ····· (101)
- §2 单服务台排队系统的 $Q-GERT$ 网络 ····· (103)
- §3 较复杂排队情况的 $Q-GERT$ 网络 ····· (106)
- §4 初级 $Q-GERT$ 网络基本概念小结 ····· (112)

## 第七章 初级 $Q-GERT$ 的网络分析程序

- §1 初级 $Q-GERT$ 网络的分析过程 ····· (114)

|                                     |                                |       |
|-------------------------------------|--------------------------------|-------|
| §2                                  | 初级Q—GERT数据输入 .....             | (115) |
| §3                                  | 数据输入示例 .....                   | (118) |
| §4                                  | 统计资料的收集和输出 .....               | (121) |
| §5                                  | Q—GERT 分析程序输出报告有关栏目定义及说明 ..... | (128) |
| <b>第八章 初级Q—GERT网络应用实例</b>           |                                |       |
| §1                                  | 具有检验与调试环节的生产线 .....            | (133) |
| §2                                  | 油漆车间生产过程 .....                 | (136) |
| §3                                  | 具有多台机器的生产系统 .....              | (138) |
| §4                                  | 传送带系统 .....                    | (140) |
| §5                                  | 串联的工作站 .....                   | (143) |
| §6                                  | PERT网络仿真 .....                 | (146) |
| <b>第九章 中级Q—GERT网络概念</b>             |                                |       |
| §1                                  | 属性码的基本概念及其应用 .....             | (153) |
| §2                                  | 选择节点(S节点)及其功能 .....            | (160) |
| §3                                  | 匹配节点(M节点)及其功能 .....            | (164) |
| §4                                  | 节点更改功能 .....                   | (166) |
| §5                                  | 中级Q—GERT网络符号小结 .....           | (168) |
| <b>第十章 中级Q—GERT数据输入与实例分析</b>        |                                |       |
| §1                                  | 中级Q—GERT的数据输入 .....            | (171) |
| §2                                  | 中级Q—GERT网络实例分析 .....           | (172) |
| <b>第十一章 高级Q—GERT网络概念与程序插入</b>       |                                |       |
| §1                                  | 程序插入的位置及其编码形式 .....            | (182) |
| §2                                  | Q—GERT的内部变量 .....              | (185) |
| §3                                  | UF中分布函数取样问题 .....              | (188) |
| §4                                  | 对UF编码时可用的特定辅程序 .....           | (192) |
| <b>第十二章 高级Q—GERT程序插入的应用</b>         |                                |       |
| §1                                  | 程序插入实例 .....                   | (199) |
| §2                                  | 用户需要的统计计算 .....                | (209) |
| §3                                  | 辅助属性处理功能 .....                 | (219) |
| <b>第十三章 Q—GERT的子网络</b>              |                                |       |
| §1                                  | Q—GERT子网络的输入方法 .....           | (222) |
| §2                                  | 使用子网络分析空间实验问题 .....            | (227) |
| <b>附录 Q—GERT输入数据卡片类型的详细描述</b> ..... |                                | (233) |
| <b>参考文献</b> .....                   |                                | (243) |

# 第一章 随机网络概述

## §1 随机网络的产生和发展

自一九五七年“关键路线法”(Critical Path Method, 简称CPM)在美国杜邦公司用于基建项目和一九五八年“计划评审技术”(Program Evaluation Review Technique, 简称PERT)在北极星导弹计划中应用以来,经历了二十多年的发展过程。我国著名数学家华罗庚教授于一九六五年开始,在我国广泛推广和应用了以网络计划为主的统筹方法,取得了明显的经济效果。在发展过程中,在理论上将网络理论、优化理论及计算技术等逐步引入PERT/CPM,而在实际应用上,由于其方法简便明了,已为工业和研究部门广泛采用。其研究成果能够得到应用的比率达58.1%,在工业管理领域中,除了线性规划和仿真技术以外,网络技术的应用率占第三位。

然而,由于PERT和CPM在其诞生之时,就限定在肯定型网络模型的范围内,PERT虽然在活动时间上作了某些概率上的考虑,但同时又作了以下假设:

1. 所有活动均为独立的;
2. 关键路线远较其它路线为长;
3. 关键路线上有足够多的活动,从而可以引用中心极限定理,工程周期将为正态分布;
4. 每项活动的周期均服从 $\beta$ 分布,而且其平均值可近似地用 $\frac{a+4m+b}{6}$ 来确定,方差为 $\frac{(b-a)^2}{36}$ 。

以上假设有其合理的成分,但也使PERT/CPM网络的应用受到较大的限制。

首先,PERT和CPM都在网络结构上限定在肯定型范围内。网络中每项活动都必须实现,因而不存在概率分支的可能性,每一事项实现之后,没有选择活动或决策的余地。

其次,PERT和CPM网络中不允许存在任何强连通成分。网络中出现回路(或强连通)将被认为是不相容因素而必须加以排除,这在实际上排除了极为丰富的构模领域—反馈环节。

再次,活动周期限定为 $\beta$ 分布,从理论上和实践上说,都带有主观成分,事实上活动周期可根据各种工作的性质和概率特征而取不同的分布。此外,在计算方法上也不能完整地、准确地反映 $\beta$ 分布的统计特征,在多数情况下将因背离初始假设而造成较大的误差。

随着科学技术和工业生产的迅速发展,在广泛的科研项目、试制工程和生产与服务过程中,随机因素日益成为不可忽视的重要方面。反复进行科学实验、实验结果与设计方案修改之间的多次反馈、工程设计或生产过程在一定阶段上的方案选择、以及服务过程与顾客到达过程之间的随机耦合等等,都是现代工程项目、研究项目或生产与服务系统的典型特征。面对多种随机因素共同作用于同一过程,人们已日益感到PERT/CPM不能适应这种发展中

的需要,因而,一种新的随机网络技术应运而生,即图示评审技术(*Graphical Evaluation Review Technique*, 简称GERT)。

一九六二年埃斯纳 (*E.Eisner*) 提出了带“决策盒” (*Decision Box*) 的广义网络技术。在这些“决策盒”上可以按不同的概率决定下一步的行进路线,这是一种具有概率分支网络的初步形式。此后,经过埃尔玛格莱贝 (*S.E.Elmaghraby*) 和普列茨克尔 (*A.A.B.Pritsker*) 等人逐步改进和完善,形成GERT型网络技术。在GERT网络中可以包含具有不同逻辑特征的节点,节点的引出端允许有多个概率分支,网络中允许回路和自环存在,每项活动的周期均可选取任何种类的概率分布等等。与此同时,利用概率论中的矩母函数和控制论中的信号流图理论,发展了GERT网络的解析算法,并于一九六九年形成了适应GERT解析算法的软件系统GERT—E。这标志着GERT网络发展的一个重要阶段。与PERT/CPM相比,GERT的构模功能和应用范围比前者有了显著的扩展,使网络技术从一般工程项目进入研究和发展领域中,从一次性工程项目进入成批和大量生产过程中,并能广泛用于随机服务系统。然而,由于解析算法本身的复杂性和计算量随网络规模的扩大而急剧增长,因而一般适用于中小规模的问题。

随着仿真技术的发展,GERT找到了进一步扩展的途径。七十年代以来,普列茨克尔等人发展了随机网络仿真技术,进一步从构模的实际需要出发,扩展了GERT网络节点的功能,形成GERT网络的仿真系统——GERTS及其相应的仿真软件,从而使GERT网络的应用得到扩展。GERTS的出现又使随机网络的优化成为可能,于是,具有成本优化的GERTS I—Z,具有资源分配功能的GERTS I—R等相继产生。为了适应随机服务系统的需要,又产生了GERTS I—Q,使GERT网络具有初步的排队功能。

自一九七七到一九七九年,他们又将GERTS的主要功能与GPSS (*General Purpose Simulation System*)通用仿真系统中的实体流技术结合起来,形成具有综合功能的Q—GERT网络技术及相应的软件系统,从而对实际问题的描述和分析能力越益增强,可以适应更广的系统分析和实际应用。在同一时期,普列茨克尔等人又将离散和连续仿真系统GASP—IV与Q—GERT结合起来,形成既能处理离散系统和网络系统仿真,又能处理连续系统仿真的“多种构模仿真语言” (*Simulation Language for Alternative Modeling*, 简称SLAM),成为功能较全,处理能力较强的仿真系统之一。

此外,在面向随机网络仿真的领域中,还有“风险评审技术” (*Venture Evaluation Review Technique*, 简称VERT),可用于对系统的性能、时间和费用三大要素进行综合仿真和决策。“多任务综合网络的系统分析SAINT”可用于人机系统分析模型,“隔离分析预测” (*Partitive Analytical Forecasting*, PAF)可用于核裂变工程的管理决策,“图示可靠性分析仿真程序” (*Graphical Reliability Analysis Simulation Program*, 简称GRASP)可用于系统可靠性分析,以及活动在节点上的P—GERT等等。各种网络技术的发展过程见图1-1所示。

从实际应用来看,随机网络较之PERT/CPM已展现了巨大的潜力。从一九六九年GERT—E成功地用于美国“阿波罗”计划之后,相继在研究和发展性项目及生产过程中得到应用,如科研计划管理、可靠性分析、机械制造生产线的设计和分析、质量控制、自动化仓库管理、排队问题等等。此外,在交通运输、人口动态分析、计算机系统、商务合同签订等方面也都得到应用。八十年代初期,NASA又将Q—GERT和SLAM成功地用于航



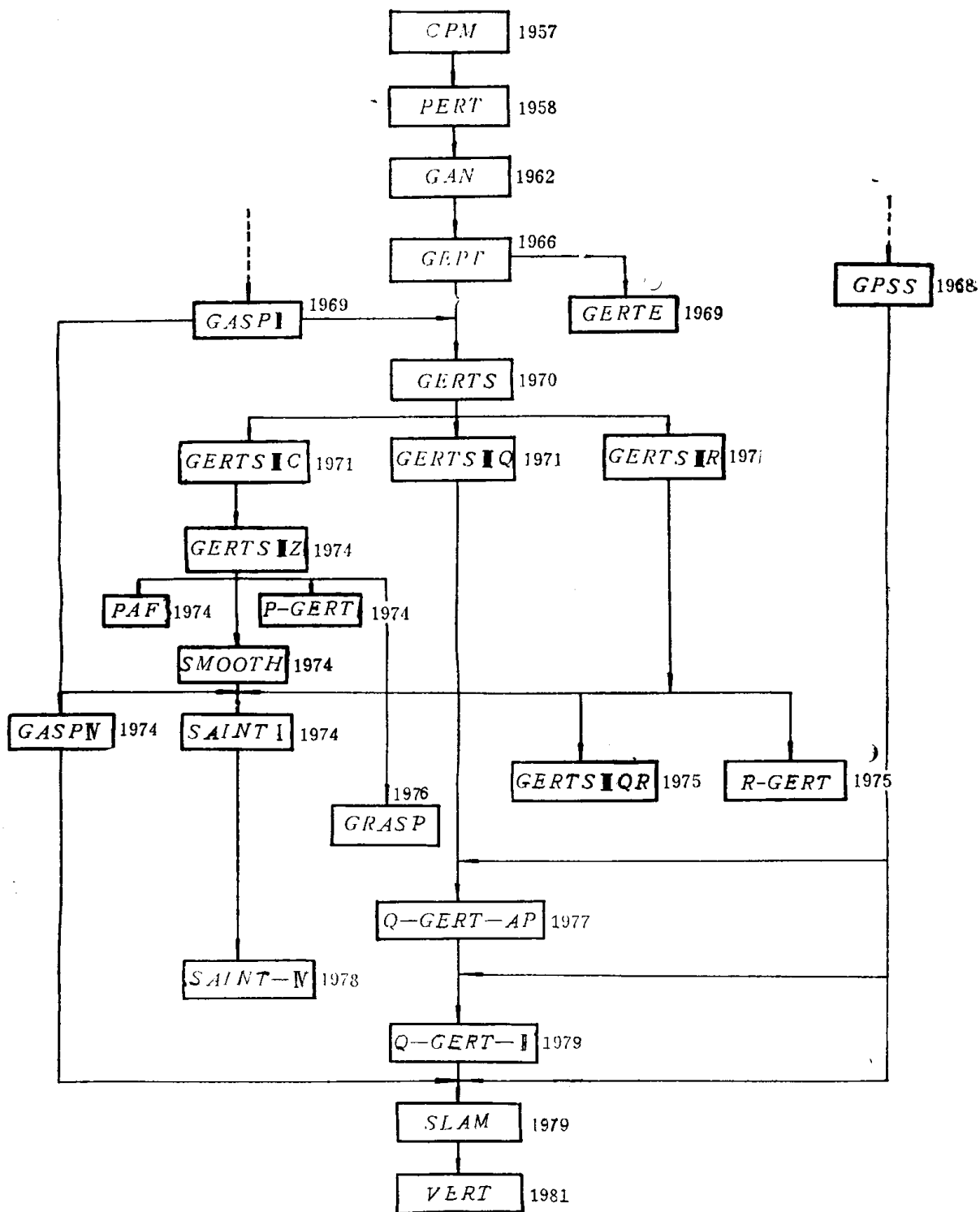


图1-1 随机网络技术的发展过程示意图

天飞机发射及回收过程的网络计划中。

以上情况表明，*GERT* 型网络分析技术具有广阔的应用前景。在我国四化建设中，推广和应用这一有效的管理技术，对各项工作都将有一定的促进作用，并有利于实行管理工作的现代化。

## §2 随机网络的一般形式——广义活动网络GAN

对于一个客观系统的动态运行过程，可以看作是系统状态之间的转移过程，即随着时间的推移，系统从一种状态转移到另一种状态。随机网络中的节点可以表示网络的状态，而连接各节点之间的箭头可以理解为状态之间的传递关系。当状态之间的转移具有概率性质，而且状态之间的传递关系也服从一定的概率分布，则网络的运行过程就具有随机性质。

当系统从一种状态转移到另一种或多种状态去时，可以取不同的概率。对网络系统来说，可以理解为从某一节点转移到其它可能节点时具有不同的概率，或者说，从某一节点以一定的概率转移到另一节点去，即节点的引出箭头允许有概率分支。这个特征使网络带有随机性。在随机网络中，假设这种状态转移概率不随时间而变化，从而保证系统的稳定性。然而，在随机网络中并不排除一部分节点之间存在肯定性的转移关系，即转移概率取1的转移关系。但是，当网络中所有节点之间都属于肯定性转移关系时，这种网络将回到PERT/CPM网络的情况。

在状态转移中所有的传递关系将表现为某些参数的变化。或某些资源的占用。在随机网络中，这些传递参数通常都服从一定的概率分布，即同样两个节点之间在两次转移中，其传递参数将按一定的概率分布取不同的数值。这是随机网络的又一特征。如果网络中各节点之间的传递参数（如时间）唯一地服从 $\beta$ 分布，则该网络属于PERT类型。如果这些传递参数都是肯定型的，那就成为CPM型网络，即肯定型网络了。

以上所述概率分支和传递参数的分布，构成GAN网络中的一般要素。这些要素可以标在网络中表示活动的箭杆上，通常用一个二维或二维以上的向量来加以描述。见图1-2。

图中： $p_u$ ——当节点1实现时，活动(1,2)

将要实现的概率；

$t_u$ ——表示活动(1,2)所需要的时间，它是服从一定分布的随机变量；

$c_u$ ——表示该活动的费用函数，也可能是一个随机变量。

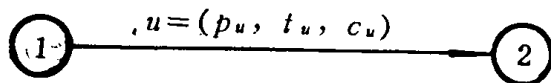


图1-2 GAN网络的一般要素

在随机网络中，每一节点至少必须有一个引入箭杆和一个引出箭杆（源节点和终节点除外），同时允许有多个源节点和多个终节点。

任何一个节点都具有“输入”和“输出”两端，在GAN网络中可定义三种“输入”类型和两种“输出”类型的逻辑，共可构成六种不同逻辑功能的节点。如表1-1所示。

表中各类节点的含意说明如下：

“异或”型输入——凡引入此节点的活动，只要有任何一个活动完成该节点即实现，然而，在一个给定时刻上只有一个活动能够完成。

“或”型输入——凡引入此节点的活动，只要有任何一个（或一组）活动完成，该节点即实现，即在给定时刻上允许有同时完成的活动进入节点，因此，节点将在所有引入活动中的最早时刻上实现。

“与”型输入——当所有引入此节点的活动都完成时，该节点才能实现。即此节点将在

表1-1 GAN网络的节点类型

| <div style="display: inline-block; transform: rotate(-45deg);">                     输入端<br/>输出端                 </div> |  | “异或型” | “或型” | “与”型 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------|------|------|
|                                                                                                                        |  |       |      |      |
| 肯定型                                                                                                                    |  |       |      |      |
| 概率型                                                                                                                    |  |       |      |      |

所有引入活动中的最迟完成时刻上实现。

概率型输出——当此节点实现时，所有从该节点引出的活动中只有一个活动按一定的概率得以实现。各引出活动实现概率之和必为1。

肯定型输出——由此节点引出的活动迟早都要被完成，即所有引出活动被执行的概率均为1，PERT/CPM型节点具有此种输出特征。

在GAN网络中，由于节点和箭头所具有的逻辑功能较多，因而能够适应的范围较广，可以构造出多种多样的网络模型。

构造GAN网络模型的目的有二，其一是将一个客观的系统用网络形式表示出来，以便给人以概括的了解；其二是研究系统中各项要素之间的相互关系，从而使原始网络得以简化，以便得到系统的各种特性。

但是，在三种输入逻辑中，只有“异或”型节点最易于用数学方法进行处理，其它两种节点逻辑，至今尚未找到适当的解析方法。在处理这类节点时，可以通过适当的逻辑变换，将“或”型和“与”型节点转换为“异或”型节点。

GAN网络的形式很多，然而从网络结构的特点来看，可以归纳成串联型、并联型及自环型三种基本结构。其中并联结构又可按节点输入端的特点分为并联“与”，并联“或”及并联“异或”等三种结构，如图1-3所示。

利用以上基本结构所构造的GAN网络，具有以下特征：

1. 由于允许自环存在，它意味着网络中允许存在反馈环节。对自环加以适当的扩展，可以得到不同的反馈方式，如多重自环反馈、不同节点之间的反馈以至源节点和终节点之间的反馈等。

2. 在一个GAN网络中，网络的实现并不意味着其中所有的事项和活动都被实现，而可能只有一部分节点和箭头处于活动实现所经过的路线上。

例如，有 $a, b, c, \dots$ 等若干个箭头引入某一节点，设引入节点为“与”型，图1-4(a)，则该节点不能实现的概率为 $1 - P\{a \cap b \cap c \cap \dots\}$ 。而引入节点为“或”型时，见图1-4(b)，则该节点不能实现的概率为 $1 - P\{a \cup b \cup c \cup \dots\}$ 。当引入节点为“异或”型时，见图1-4(c)，则该节点不能实现的概率为 $1 - P\{a \otimes b \otimes c \otimes \dots\}$ ，其中 $\otimes$ 表示一个活动且仅一个活动实现。

| 结构型式    | 网络图示 | 等价向量                                                                                                                                                                                                              |
|---------|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 串联型     |      | $p_E = p_a p_b$<br>$t_E = t_a + t_b$                                                                                                                                                                              |
| 并联“与”型  |      | $p_E = P(a \cap b)$<br>$t_E = \max(t_a, t_b)$                                                                                                                                                                     |
| 并联“或”型  |      | $p_E = P(a \cup b)$<br>$t_E = \min(t_a, t_b)$                                                                                                                                                                     |
| 并联“异或”型 |      | $p_E = P(a \otimes b)$ [注]<br>$= P(a \cup b) - P(a \cap b)$<br>$t_E = \begin{cases} t_a, & \text{当取 } p_a \text{ 时} \\ t_b, & \text{当取 } p_b \text{ 时} \\ \infty, & \text{当取 } P(a \cap b) \text{ 时} \end{cases}$ |
| 自环型     |      | $p_E = \frac{p_a p_b}{1 - p_c}$<br>$t_E = t_a + t_b + n t_c$<br>当取 $p_a p_b p_c^n$                                                                                                                                |

[注]  $\otimes$  表示一个且仅一个事件发生

图1-3 GAN网络的基本结构

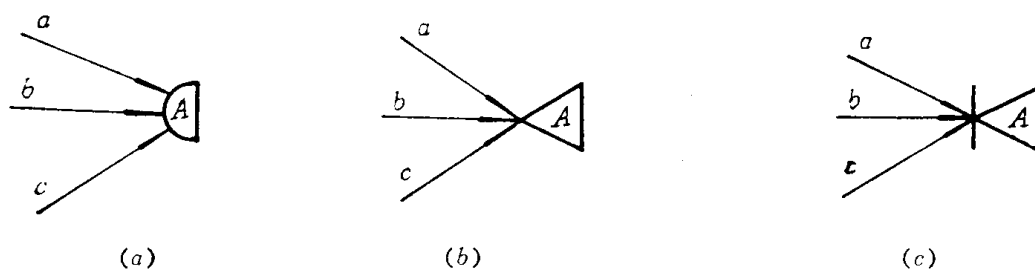


图1-4 不同输入端节点的实现可能性

3. 对于只有单个引入箭头，即串联型网络结构中，不同类型的输入端其逻辑关系都相同。因而“或”型及“与”型节点可以直接用“异或”型节点来代替，并不会影响整个网络的运行特征。

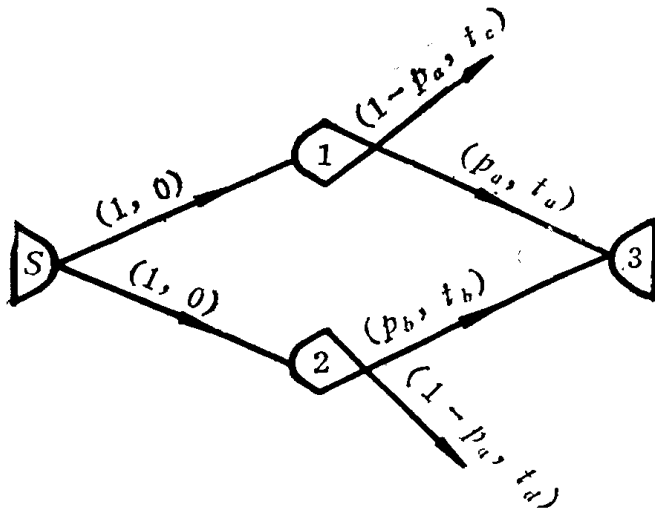


图1-5 带有“与”型节点的简单网络

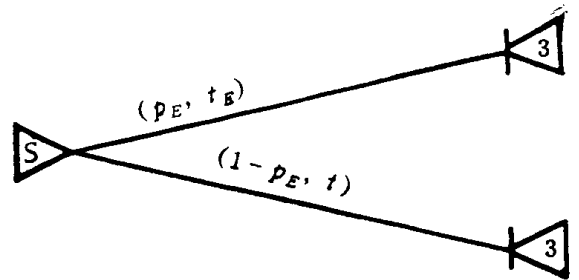


图1-6 “与”型节点的等价网络

4. 在有多多个活动引入“与”型节点时，如图1-5所示，其中节点3必须在活动 $a$ 和 $b$ 都完成时才能实现。显然，活动 $a$ 执行的概率为 $P_1 p_a$ ，活动 $b$ 被执行的概率为 $P_2 p_b$ 。因此，活动 $a$ 、 $b$ 都被执行的概率为二者之交，即节点3实现的概率为 $P_3 = P_1 P_2 p_a p_b$ ，节点3的实现时刻可表示为：

$$T_3 = \max(T_1 + t_a, T_2 + t_b)$$

设 $T_1 = T_2 = 0$ ， $P_1 = P_2 = 1$ ，则有 $p_E = p_a p_b$ ，且有 $t_E = \max\{t_a, t_b\}$ 。

其中 $p_E$ 和 $t_E$ 表示从节点 $S$ 到节点3的等价网络参数。按照这种等价关系，可将以上网络改变为图1-6所示形式，其中节点3表示节点3不能实现。这样就将一个“与”型节点用两个“异或”节点表示出来。它们之间存在着等价关系。

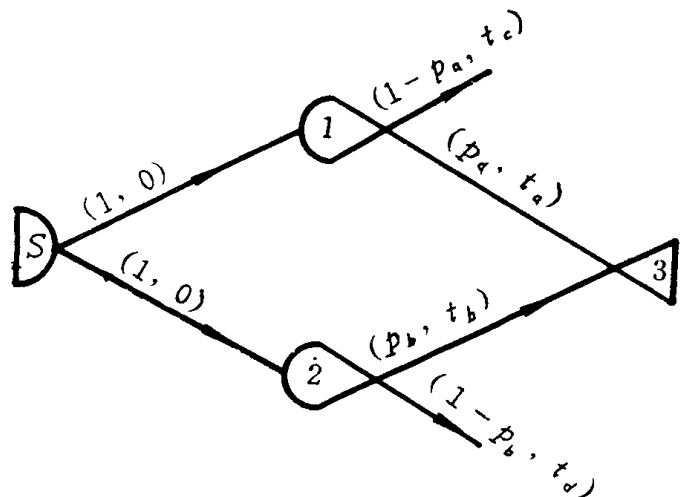


图1-7 “或”型节点及其等价转换

5. 在有多多个活动引入“或”型节点时，如图1-7所示，同样可以转变为两个“异或”型节点，在转变过程中考虑到由节点 $S$ 到节点3之间，能使节点3得以实现的所有可能途径。

图中：

$$A \text{ —— } (p_a - p_{a \cap b}, t_a); \quad B \text{ —— } (p_b - p_{a \cap b}, t_b);$$

$$C \text{ —— } (p_{a \cap b}, \min(t_a, t_b)); \quad D \text{ —— } (1 - p_a - p_b + p_{a \cap b}, t)$$

其对应的实现概率和等价时间可列表如下表1-2

表1-2 “或”型节点的可能事项

| 活动发生          | 概 率                  | 等价时间             |
|---------------|----------------------|------------------|
| $a$ 发生        | $p_a - p_{a \cap b}$ | $t_a$            |
| $b$ 发生        | $p_b - p_{a \cap b}$ | $t_b$            |
| $a$ 、 $b$ 都发生 | $p_{a \cap b}$       | $\min(t_a, t_b)$ |

6. 网络中的反馈环节只能用于具有“异或”型输入端的节点上。对于“与”型节点来说，必须所有引入活动都完成时才能实现，因此，若有反馈活动引入，则该节点将永远无法实现。对于“或”型节点来说，只有最早完成的一个活动是有意义的，而一个反馈活动必须在非反馈活动完成之后才能执行，因而反馈活动所引入的节点可以用“异或”型节点代替，这并不影响其逻辑关系。

以上分析表明，在一个G<sub>AN</sub>网络中，任何“与”型节点或“或”型节点，都可以通过一定的网络逻辑变换，使之转化为“异或”型节点，即任何G<sub>AN</sub>网络（包含“与”型，“或”型和“异或”型三种节点的网络）都可以转化为仅含单一“异或”型节点的随机网络，从而使G<sub>AN</sub>网络的解析解成为可能。下面所介绍的GERT网络就是仅含“异或”型节点的随机网络。

### §3 随机网络构模实例

从随机网络的发展过程中可以看到它有许多种不同的表现形式，并且还在不断地改进和完善。本课程重点介绍GERT型随机网络技术，了解了GERT网络以后，其它类型的随机网络均可易于掌握和运用。下面就GERT、GERTS及Q—GERT分别举例说明其构模的思路和方法。

#### 一、制造过程的GERT模型

某种零件在生产线上进行加工制造，每件粗加工时间为4小时，粗加工完毕后需经检验工序，检验时间服从负指数分布，平均时间为1小时。按统计资料约有25%的零件需要返修，每件返修时间需30分钟。返修后的零件经再检验工序，约有30%不合格，返修件检验时间也服从负指数分布，平均时间为1.5小时。二次检验不合格的零件作报废处理。通过检验的零件还需经过精加工，60%的零件精加工需10小时，其余40%的零件需要14小时。精加工后的零件必须经过最终检验，其中有5%的零件不合格而直接报废，95%的零件将送往成品库。最终检验时每件需要1小时。此外，假设零件在加工过程中的等待时间包含在工序时间中。

这类加工过程中包含着零件检验后合格或不合格两种可能，也包含因粗加工结果不同而使精加工需要不同时间的可能性，这种情况在GERT网络中可以用概率分支来描述，以确

定零件的去向。检验工序的时间服从一定的概率分布，使网络中的活动具有随机性质。零件的返修过程则相当于GERT网络中的反馈环节。因此这类问题可以直接构造GERT网络。由于零件的最终去向有两种可能，即成品库或废品库，网络中将出现两个终节点。如图1-8所示。

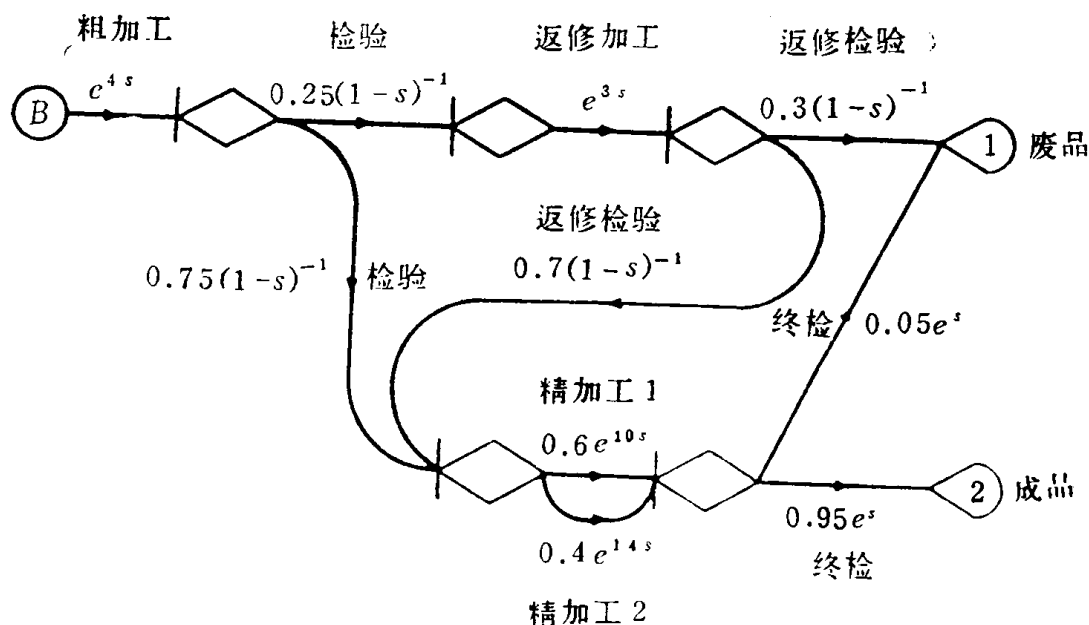


图1-8 零件制造过程的GERT网络图

由图可见，每个零件进入系统之后，都可按不同路线行进，都有可能进入不同的终节点 $t_1$ 或 $t_2$ 。可能经过的路线共有九条，每条路线并不经过网络中所有节点和活动。当一批零件到达源节点 $B$ 后，它们逐个进入网络，随机地按不同路线行进，最终到达终节点1或2。我们假设这类加工过程经过一段时间运行之后将达到平稳状态，因而可以求得该网络在平稳状态下的各种网络参数。

1. 零件由 $B$ 节点到达1（报废）和2（成品）的概率。这相当于生产过程的废品率和成品率。

2. 零件由 $B$ 节点到达终节点的平均时间。到达节点1的平均时间相当于废品工时（废品损失），而到达节点2的平均时间则相当于零件的生产周期。

3. 由于网络中存在的概率因素，到达终节点所需时间近似地服从正态分布（当经过概率型活动较多时），这种时间分布的方差可用于评价生产过程的稳定程度。

4. 为了分析某段生产过程的概率特征和稳定程度，也可计算出从网络中任一节点到任一可达节点之间的平均时间和方差等。

以上这些参数对所设计的生产系统或现有生产线在经济上的合理性以及如何改进其运行效果，都是十分有用的。随机网络的稳态参数解析计算方法将在第三章中详细讨论。

## 二、编辑部门审稿过程的GERTS模型

GERTS是随机网络的一种仿真模型，其求解过程并不是求助于数学上的解析解，而是通过对网络进行多次重复的仿真实验（例如作1000次网络仿真），根据仿真的统计数据来计算所需要的各种网络参数。由于避免了数学分析上的困难而直接求助于计算机仿真，因而

其节点逻辑可根据需要作更多的扩展。根据扩展后的节点逻辑所设计的 *GERTS* 仿真软件，可用于运行各种实际系统的 *GERTS* 网络模型，从而得到所需要的网络参数。

下面举例说明 *GERTS* 网络模型的建立过程。

某编辑部规定作者手稿同时交给三位专家审查，若有两位或三位表示同意，则该稿接受发表。若有两位或三位表示不同意，则该稿将不予发表。如果某作者对自己的论文被接受或被拒绝的可能性有一基本估计（例如20%的可能性被接受），并对编辑部门处理稿件的时间、专家审查稿件的时间以及稿件邮寄时间等均有一定的统计数据 and 概率估计。则他希望知道在稿件寄出之后收到编辑部门回信的时间及分布，该稿件被接受的概率和被拒绝的概率等等。这类问题可以构造成 *GERTS* 模型，如图1-9所示。

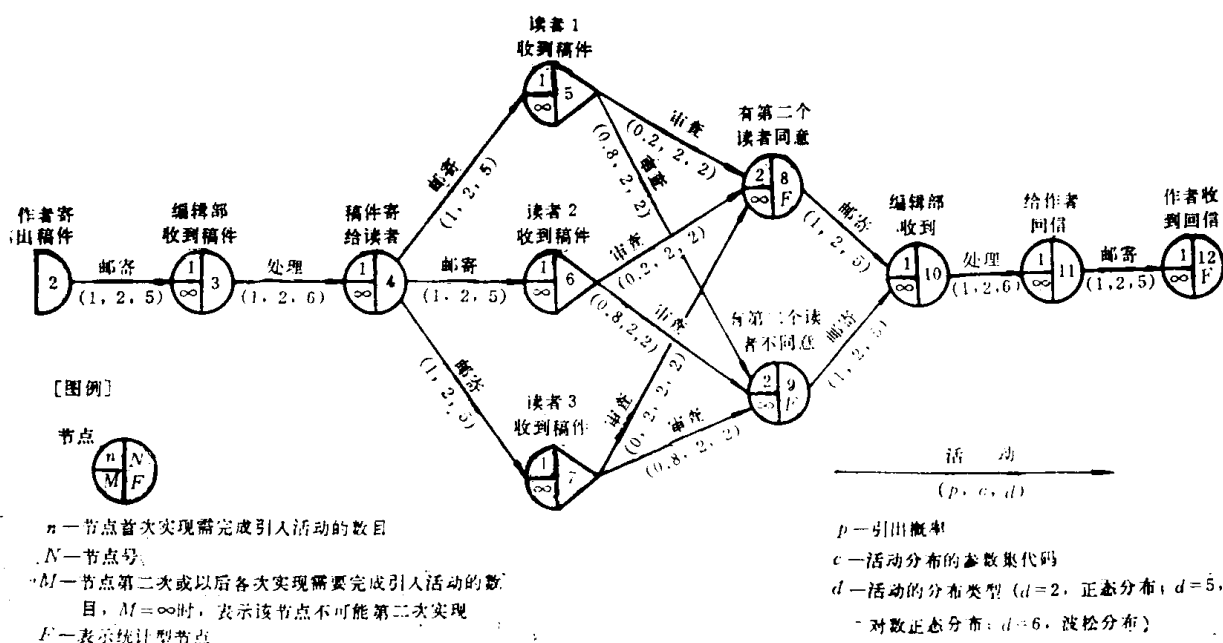


图1-9 编辑部审稿过程的 *GERTS* 网络图

图中节点 8 和节点 9 表示必须有两个引入活动完成时该节点才能实现（在节点中用左上角数字表示）。于是至少有一位专家表示同意时节点 8 才能实现，相应地，必须有一位专家表示不同意时，节点 9 才能实现。当节点 8 实现时，节点 9 便不能实现，因为引入节点 9 的活动至多只有一个能完成，不足以导致节点 9 实现，从而编辑部门只能作出同意发表的决定。反之，如果节点 9 实现，则该稿件被拒绝发表。*GERTS* 中利用这类扩展功能的节点，可以实现多种逻辑关系和管理决策。

在对以上网络模型中各项活动的时间赋以具体的分布参数（如分布类型、均值和方差等）以后，经1000次仿真，从节点 8 上统计其实现次数，即可得到“同意发表”的概率为0.104，作者得到“同意发表”信息的平均时间为43.5天，最多天数为65.1天，最少天数为27.8天，其分布的标准偏差 $\sigma=6.4$ 天。同时，从节点 9 上统计其实现次数，可以得到稿件被“拒绝发表”的概率为0.896，作者得到“不同意发表”信息的平均时间为42.2天，最多天数为75.1天，最少天数为27.3天， $\sigma=6.7$ 天。由此可见，虽然每位专家审阅接受的概率为20%，但在三人联审的情况下，可能接受的概率仅为10.4%。



### 三、银行服务系统的Q—GERT模型

Q—GERT也是一种网络仿真模型，它采用了GPS仿真中的实体流技术，随着每个动态实体流经网络中有关的节点和活动，来模拟真实系统的运行情况。在构模中往往使用带自环的源节点来产生实体的到达流，并按一定的间隔时间分布（如负指数分布）连续地向网络输送动态实体。同时，还引入了带排队功能的Q—节点，在该节点上可以规定队列长度的限制，当队列超过限定队长时，即拒绝动态实体进入，从而使有限队列容量的排队模型得以应用。与Q—节点相适应的尚有选择节点（S—节点），它可以根据不同的原则来选择动态实体的去向，例如在多个Q—节点前能选择较短的队列，以适应人们节省排队时间的心理。并且当队列都达到限额时，可将实体引向别的节点。此外还有条件节点、匹配节点、统计节点、属性赋值等功能。从而能够适应复杂排队系统的处理，并可通过网络仿真取得系统的瞬态和稳态参数。

下面举银行服务系统为例来说明Q—GERT网络的构模特征。

某银行有两个服务窗口，由于面积的限制，每个窗口最多排队10人。设顾客按波松流到达，其到达间隔时间服从负指数分布。不同服务窗口服务时间因服务项目和服务员熟练程度不同，服从不同的分布。当排队队长超过10人时，则新来顾客中有一部分（40%）自动离去，而另一部分顾客（60%）则经过一个固定时间之后再回来企求排入队列。当两个服务窗口的队列均不满10人时，新来顾客总是争取排入较短的队列。显然，可以视之为一类队列容量有限、波松到达、一般服务和多通道的排队系统，即一种简化了的 $M/G/C/N/\infty/FCFS$ 排队模型。大家知道，要用排队论的解析方法来求解这类模型是十分困难的。但是构造成Q—GERT网络模型，用离散仿真技术求解，却能方便地求得所有排队参数。此银行服务系统的Q—GERT网络模型见图1-10所示。

其仿真结果可以得到每个顾客在系统中的平均时间、最长、最短时间及标准偏差，顾客在队列中的等待时间参数，平均队列长度及其分布参数，各个服务窗口的利用率，以及因“客满”而转移的人数和自动离去的人数等。