第 9 篇　系统工程的方法

主编单位

清华大学

编写人

谢新民

特约编辑

何国森

常用符号表

A 弧的集合（图论）
$\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵（结构模型解析法）
a 弧（图论）
$|A|$ 弧数（图论）
$\boldsymbol{A}$ 状态方程的常数矩阵（递阶结构系统）
a_i 前项集合（结构模型解析法）
$\boldsymbol{B}$ 状态方程的常数矩阵（递阶结构系统）
$C(v_i, v_j)$ 弧的容量（图论）
C 单位产品单位时间的库存费用（存贮论）
C_2 单位时间缺货损失（存贮论）
C_3 单位时间装置费用（存贮论）
C 总费用（存贮论）
C_0 最佳总费用（存贮论）
$\boldsymbol{C}$ 输出方程的常数矩阵（递阶结构系统）
D 定长输入或定长服务（排队论）
D 有向图（结构模型解析法）
E_k 爱尔朗分布的输入或服务（排队论）
$f(v_i, v_j)$ 弧（v_i, v_j）上的流量（图论）
$f(t)$ t的密度函数（GERT）
G 图（图论）
G_I 独立输入（排队论）
G 一般服务分布（排队论）
G 收入量（存贮论）
$\boldsymbol{I}$ 单位矩阵（递阶结构系统）
J 系统目标函数
J_i 子系统目标函数
$l(v_i, v_j)$ 边长（图论）
M 简单流或负指数分布（排队论）
$\boldsymbol{M}$ 可达性矩阵（结构模型解析法）
$M_t(s)$ 发生函数矩（GERT）
P 概率
p 生产速度（存贮论）
p_a 录用概率（GERT）
p_r 退回概率（GERT）
Q 生产（或供应）产品量（存贮论）
Q_0 最佳供应量（存贮论）
$\boldsymbol{Q}$ 常数阵（递阶结构系统）
R 供应速度（存贮论）
$R(i)$ 事项时差（PERT）
$R(i, j)$ 总时差（PERT）
$r(i, j)$ 单时差（PERT）
$\boldsymbol{R}$ 有从属关系（结构模型解析法）
$\bar{R}$ 无从属关系（结构模型解析法）
R_i 可达性集合（结构模型解析法）
$\boldsymbol{R}$ 常数阵（递阶结构系统）
S 规定库存量（存贮论）
T 树（图论）
t_0 最佳生产循环时间（存贮论）
$t(i, j)$ 完成某一工序所需时间（PERT）
$t_{ES}(i, j)$ 最早开工期（PERT）
$t_{EF}(ij)$ 最早完工期（PERT）
$t_{LS}(ij)$ 最迟开工期（PERT）
$t_{LF}(ij)$ 最迟完工期（PERT）
$t_E(i)$ 事项最早时间（PERT）
$t_L(i)$ 事项最迟时间（PERT）
t_a 录用过程时间（GERT）
t_r 退稿过程时间（GERT）
$\boldsymbol{U}$ 系统的控制矩阵
V 顶点的集合（图论）
$|V|$ 顶点数（图论）
V 原有存贮量（存贮论）
X 库存量（存贮论）
$\boldsymbol{X}$ 系统状态矩阵（递阶结构系统）
$\dot{\boldsymbol{X}}$ 状态的一阶导数（递阶结构系统）
$\boldsymbol{X}_0$ 状态的起始值（递阶结构系统）
$\boldsymbol{Y}$ 系统输出量矩阵（递阶结构系统）
Z 目标函数（数学规划）
β 最低库存量（存贮论）
(β) 协调变量（递阶结构系统）
λ 拉格朗日乘子（数学规划）

第1章 概 论

1 系统工程的基本概念

由于生产过程自动化和工程组织管理系统的发展，以及电子计算机在国防、国民经济各部门的广泛应用，出现了许多规模庞大、结构复杂、影响因素众多的工程和非工程系统。例如大型钢铁联合企业、石油化工联合公司、导弹控制系统、城市交通运输调度系统、资源的开发和分配系统、环境保护和水源系统等等。这些系统的问题由单一学科是很难解决的，必须综合应用自动控制技术、计算机科学、管理科学以及运筹学、信息论等新技术来进行研究和分析，从而形成了一个新兴的边缘学科——系统工程学。

系统工程学主要是利用系统科学理论解决大系统的最优的规划设计、最优控制和最优的组织管理。工程系统的规划设计是系统工程的重要内容，它从整个系统总的要求出发，用分析、处理和表达方法使各个环节协调起来，以形成合理的工艺流程和各种工程系统。而系统的控制是从单一对象的局部控制向整个车间、整个工厂、整个联合企业的大规模复杂的控制系统发展。因此最优控制问题也是从单机的最优化向整个工厂企业的最优化控制发展。至于组织管理工作也是强调"系统总体"的概念，把整个工业企业作为一个系统。管理工作功能着重于指导、协调和控制系统的各个环节，以使整个系统取得最好的技术经济效果，有时在协调过程中发现局部系统最优但和整个系统最优有矛盾，可以牺牲局部系统的经济指标，以达到整个系统的最优。

1.1 系统的基本特性

系统有下列基本特性，即系统各要素之间的有机联系性、系统目标的整体性和统一性，以及系统的环境适应性。

1. 系统各要素之间的有机联系性：一个系统起码要有两个或两个以上的可以互相区别的要素组成。以运输系统为例：就由产地、运输工具和用户三个要素所组成。这些要素集合成一个系统，要素之间相互联系、相互作用，使该系统具有它本身的特点。

2. 系统目标的整体性和统一性：每一个系统都有它的特定目标，如生产计划指标，质量要求等等。要从整个系统出发来考虑目标要求，而不能从局部出发，这就体现了目标的整体性和统一性。在系统总目标的指导下，以一定的手段和方法协调和安排各子系统的各种指标。

3. 系统对环境的适应性：任何一个系统都处于一定环境之中，因此必定受到周围环境的影响。例如市场需求，外部其它部门对本系统的影响等等，都属于本系统的环境，环境对系统影响形成了本系统的干扰因素和约束条件。系统要以一定的功能来适应环境的各种变化，并保持最优的适应状态。

总之，系统是由若干可以相互区别又相互联系、相互作用的若干要素所组成的，它处于一定的环境之中，以一定的功能，为达到所规定的目的而存在的有机集合体。

1.2 系统工程的定义

系统工程的定义目前尚未统一，由于侧重面不同，定义不尽一致。下面列出几种有代表性的作为参考：

"组织管理的技术—系统工程"（钱学森等：1978年9月27日文汇报）。

"所谓系统工程学，就是为了最好地达到系统的目标，对于作为系统的对象的组成要素、组织结构、信息、控制机构等进行分析的技术"（日本工业标准JIS）。

"系统工程学的方法，是把由各种特殊构造和多层机能所组成的系统看作一个整体，而且系统应当有一个目的，系统的全体应与其目的相称，为使系统内各部分经常保持最佳状态而进行调整工作，这就是系统工程的目的。"[5]

“系统工程是一个具有许多侧面的东西，用一段文字来定义是不可能的，通过下列事项可以定义：（1）它的开发；（2）系统工程的过程；（3）它的目的性；（4）进行的工作种类；（5）为执行工作所需要的机能及其构成；（6）使用的工具和技术；（7）操作人员的种类；(8)同管理、施行、作业研究等其它部分的关系。”[6]

2 系统工程的结构

系统工程的结构，最为典型的是由A·P·Sage[2]引用的由A·Hall提出的系统工程三维结构，此三维即“知识维”“逻辑维”和“时间维”。“知识维”指系统工程所需的各种专业知识，包括工程学、社会学、法学和医学等等；“时间维”指系统从规划到使用，更新的全过程，按时间划分成若干阶段（或称为各个状态）；“逻辑维”指每一个时间阶段所要经历的工作步骤。具体划分如下：

时间维分七个阶段：（1）规划阶段（Program Planning）；（2）方案制定（project Planning）或叫初步设计阶段，提出具体方案；（3）系统开发（System Development）阶段，实施系统研制方案，并作出生产计划；（4）生产（Production）阶段，系统各零部件及整个系统已生产出来，并提出安装计划；（5）安装（Installation)阶段，安装完毕并提出运行计划；（6）运行（Operation）阶段，系统按预期用途使用；（7）更新(Retirement）阶段。

每个阶段又划分为逻辑维的七个步骤：（1）问题定义（Problem Definition）：提供足够历史资料和数据说明问题的形成；（2）评价系统设计（Value System Design）：确定解决问题的目标及衡量标准；（3）系统综合（Systems Synthesis）：将达到目标所可能采取的各种策略，控制行为或系统概念化；（4）系统分析（Systems Analysis）：包括模型化，研究所采取的策略，控制行为和目标之间关系及特性；（5）最优化（Optimization）：选定各个策略的参数和系数，使之最优地满足评价目标系统；（6）决策（Decision making）：选择一种或多种供进一步研究的策略；（7）实施计划（Planning for action）：重新制订下阶段上述六个步骤的工作计划。

3 系统工程的今后发展

系统工程的发展今后需要着重解决下列几个问题：

1）如何处理系统结构的复杂性：大系统是由若干分系统和环节组成的且有特定功能的有机整体，而本身又从属于一个更大系统。这些系统、分系统和环节之间存在着相互作用和相互依赖关系，但同时又具有矛盾的特殊性和相对的独立性。因此将系统的复杂结构进行分析、简化不仅需要，而且是今后一个重要的任务。

2）如何保证系统的有序性（连贯性）：我们可以将复杂系统按时间顺序划分为一系列阶段，每一阶段作出一项主要决策或执行一项主要任务，避免在同一阶段作出许多决策或执行许多任务而引起混乱，保证整个系统有次序地完成预定目标。

系统工程学运用网络模型描述系统的全过程以及各个阶段，因而可以对系统进行分析和控制，并已形成一些广泛应用的技术方法，如PERT和GERT等。

3）如何处理系统多目标和多种技术方案：大规模复杂系统必然会出现多个目标，它不是一个目标函数，而往往是“目的树”或一个多级结构的目标系统。多级“目的”如何确定？衡量标志是什么？如何综合评价？这都是在大系统设计、分析中遇到的问题。

4 系统工程的方法及理论基础

系统工程的方法，是以系统的概念和理论，把对象作为系统进行分析、评价和综合以求得能满足设计，运用要求的最优化的系统。

系统分析是为了使对象的目的和其它要求事项得以最优地实现，系统分析工作要贯彻到系统各个步骤之中。在分析中将每次分析结果同制订的评价标准作比较，并考虑约束条件等环境因素。当分析后认为合适时，就转入综合。所谓综合，是根据分析结果明确的特定解和评价结果，来决定系统的构成和施实方式，作出系统的设计方案。这时应尽可能地作出若干个不同的系统设计方案，以这些方案与制定的评价标准做比较，从不同的观点进行综合评价，以选出最优的系统设计。当得不到最优的系统设计时，将反复进行这一综合过程，直到达到最

优为止。系统工程的基本方法如图9.1-1所示。其中综合评价基本上是根据系统的性能、费用

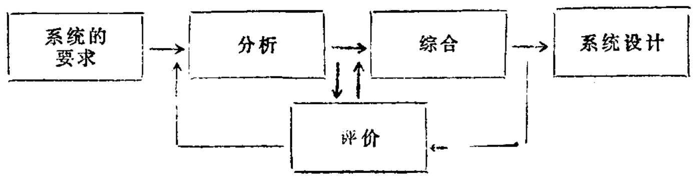


图9.1-1 系统工程的基本方法

和时间三个要素来进行的。时间一般说可以变换为费用的要素来考虑。但在系统评价中，时间要素是重要的，如果设计的要求日期不能完成时，将发生和时间延误有关的两种损失：一是时间延长带来物质费用的损失；二是因时间延长所造成的机会损失。这些都可以变换为费用。在综合评价中，是把若干系统代替方案从性能、费用和时间三个方面依评价基准进行评价，但是要根据系统要求，把三个评价要素的某一个作为评价重点，适当地考虑三者间的依存关系。

至于系统工程的基础理论，主要的是运筹学，自控理论及信息论等，可参考图9.1-2。

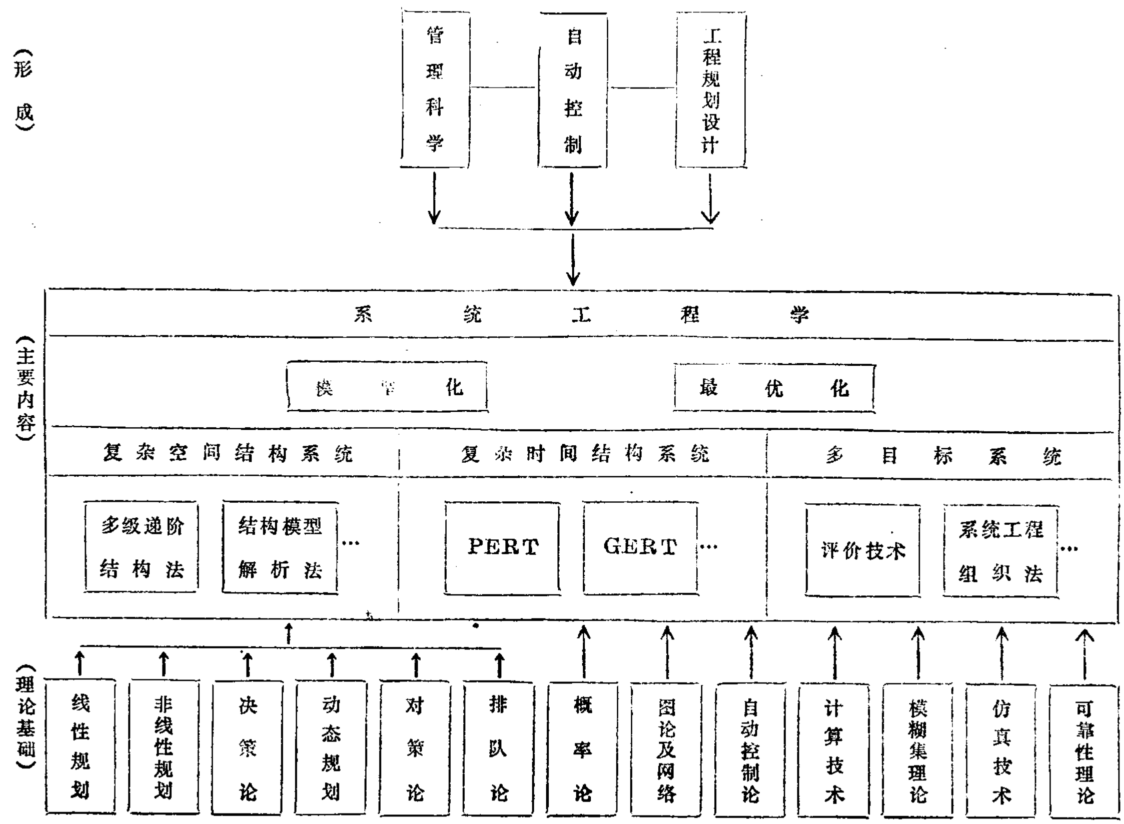


图9.1-2 系统工程的主要内容及其理论基础

第 2 章 系统工程的基础理论

系统工程的基础理论主要是运筹学、控制理论、经济管理及信息论等。由于控制论、信息论等在有关篇章已写，这里着重介绍图与网络理论、对策论、排队论、决策论和数学规划等。

1 图与网络理论

所谓图是用来反映对象之间的某种关系。它和几何学中的图不一样。在这里，点的准确位置，点与点之间联线的长短曲直都是无关紧要的，重要的是点之间相互联结的情况。

图与网络理论就是撇开各种图的具体内容，来讨论这种由点、线段组成的抽象形式的图。从中研究其一般规律，以及典型问题的定性、定量分析和解法。将这些规律和方法用于具体问题就可以对解决某些理论的和实际的问题提供有效途径。

1.1 图论的一些术语和概念

1）无向图与有向图：现用G表示图，它是由点V_i（称为G的顶点）和点间联线组成。此联线如不考虑方向的称为边，由顶点V_i和顶点V_j组成的边用符号$[V_i, V_j]$表示，而无向图即为用顶点和边所组成的图。为了与边有所区别，那种用箭头表示的联线就称为弧，而由顶点和弧所组成的图称为有向图。如图9.2-1所示。

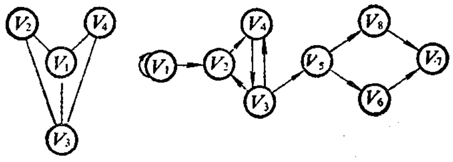


图 9.2-1 无向图与有向图
a）无向图 b）有向图

2）网络：根据生产实际需要，在图G上的联线还需标明各种数量指标，如距离、费用、消耗的功率等等。这种有数量指标的图就称为网络。如图9.2-2所示

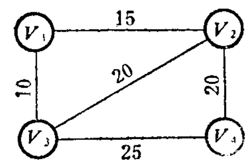


图9.2-2 网络图

3）图中一条弧用符号$a=(V_i, V_j)$表示，我们把V_i叫做弧a的起点，V_j叫做弧a的终点，并说弧a是从V_i指向V_j的。所谓与顶点V_i关联的弧是指那些以V_i为起点，或以V_i为终点的所有的弧。图9.2-1b）中V_3的关联弧为(V_3,V_5) (V_4,V_3)及(V_3, V_2)。

4）链和路：从一个顶点V_i到另一个顶点V_j要经过几个弧，若这些弧有正向的，有反向的，则称这个由V_i到V_j的连通部份为链。如果这个连通部分中间经过的弧都是正向的，则称为路。类似地，若路中所含的弧均不相同，则称为简单路。如不加以特别注明，凡说到链（路）都是指简单链（路）。图9.2-1b)中，$\{V_2, V_3, V_5, V_6\}$就是从V_2到V_6的一条链，而$\{V_2, V_4, V_3, V_5, V_6\}$是从$V_2$到$V_6$的一条路。

当链是从V_i经过若干弧以后又回到V_i，则称这个链为圈。而从V_i经过若干弧以后又回到V_i的路，则称为回路。如图9.2-1b）中$\{V_3, V_2, V_4, V_3\}$是一个回路，而$\{V_5, V_6, V_7, V_8, V_5\}$是一个圈。

5）一个图$G=(V\cdot A)$中V代表顶点集合，A代表弧的集合。若A是空集，即G是由许多孤立点所构成的，则称G是完全不连通图，或叫零图。特别地称$|V|=1$（用$|V|$表示顶点数，$|A|$表示弧数）的零图为平凡图。若$|V|=0$则称之为空图。

6）若是G是有向图，称G中以V_i为起点的弧的个数为点V_i的出次，记作$d^+(V_i)$或d_i^+。

称以V_i为终点的弧的个数为点V_i的入次，记作$d^-(V_i)$或d_i^-。

称$d^+(V_i)+d^-(V_i)$为点V_i的次，记作d'

（$d_i=1$ 的点，称为悬挂点）。

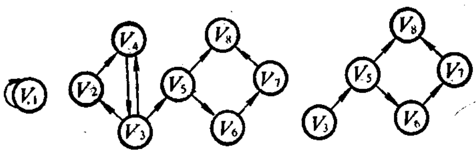
若q是图G的弧数，即 $|A|=q$则

$$2q=\sum_{i=1}^{p} d_i=\sum_{i=1}^{p}(d_i^{+}+d_i^{-})$$

这里p是G的点数，即$V=\{V_1, V_2 \cdots, V_p\}$。

7）两个图$G(V, A)$及$G'=(V', A')$，如果$V=V'$，$A' \subseteq^{\ominus} A$，则称G'是G的一部分图，或称由A'生成的部分图。

如果$V' \subset V$，$A' \subset A$，则标G'是G的一个子图。若$V' \subseteq V$，$A'=\{(V_iV_j) \in A(V_i \in V', V_j \in V')\}$称$G'$是由V'生成的子图，有时记为$GV'$。



a）　　b）

图9.2-3　部分图和子图

a）部分图　　b）子图

图 9.2-3a）为图 9.2-1b）的部分图，而图 9.2-3b）为图 9.2-1b）中由$V' \subset \{V_3, V_5, V_6, V_7, V_8\}$生成的子图。

8）图上的运算：设$G_1=(V_1, A_1)$；$G_2=(V_2, A_2)$是两个给定的图。

定义：G_1和G_2的和图$G \bigcup G_2=(V_1 \bigcup V_2, A_1 \bigcup A_2)$。$G_1$和$G_2$的交图$G_1 \bigcap G_2=(V_1 \bigcap V_2, A_1 \bigcap A_2)$。$G_1$和$G_2$的环和指图$(V_1 \bigcup V_2, (A_1 \bigcup A_2)/(A_1 \bigcup A_2))$记为$G_1 \oplus G_2$。若$G_1$和$G_2$是点不交的，即$A_1 \bigcap A_2=\phi$，（空集），$G_1 \bigcap G_2$是空图。若$G_1$，$G_2$是弧不交的，即$A_1 \bigcap A_2=\phi$，则$G_1 \oplus G_2=G_1 \bigcup G_2$，$G_1 \bigcap G_2$是零图。例如9.2-4图所示：

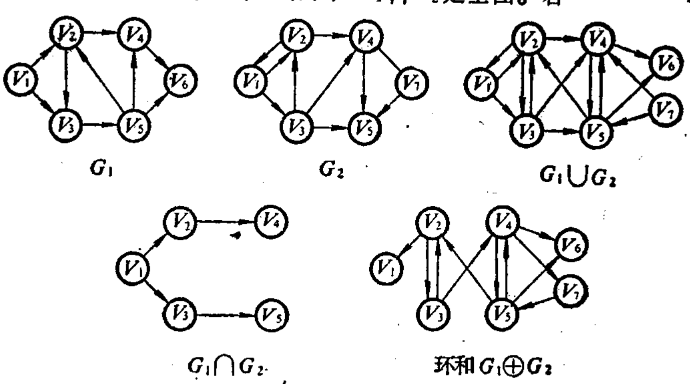


图9.2-4　图G_1和G_2的运算

9）完全图：若G是无向图，图中每两点之间均有一条边相连，则称之为完全图。用$G=(V, E)$表示完全图，$|V|=P$，则记G为kp，例如图9.2-5所示G为K_4。

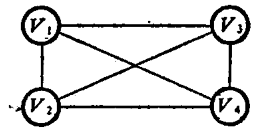


图9.2-5　完全图

10）偶图：若V可以分解成两个不交的子集S，T（$S \bigcap T=\phi$，$S \bigcup T=V$），使E中每一边的一个端点属于S，另一个端点属于T，则称G为偶图，记作$G=(S, T, E)$。

若G是偶图，且对每点$V_s \in S$及每点$V_t \in T$，均有边$[V_s, V_t] \in E$，则称G为完全偶图，若$|S|=m$，$|T|=n$记作$K_{m,n}$。例如9.2-6所示：

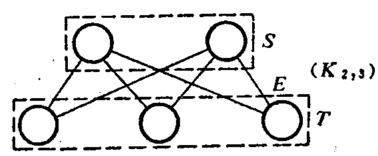


图9.2-6　偶图

偶图定理：图$G=(V, E)$是偶图，当且仅当G中不含弧数为奇数的初等圈，如图9.2-6所示偶图每一个初等圈的弧数均为 4。

1.2　树

1）树的定义：若$T=(V, E)$是一个不含圈的连通图，称T是一棵树。若图(V, E)是不含圈的图，则它或者是一棵树，或者是几棵树（森林）。

树有下列性质：若$T=(V, E)$，$P=|V|>2$，$q=|E|$则

（1）T是不含圈的连通图；

（2）T不含圈且$q=P-1$；

（3）若在T中任意加进一条边，则得一个且仅仅一个圈，

（4）T连通，但若任意去掉一条边，

⊖"集论"的数学符号见ISO31/Ⅺ P.2-4

图便不连通；

（5）T的任意连点，有一条且仅仅一条链相连。

图$G=(V,E)$中，$T=(V,E')$是G的一个部分图，若T是树，则称T为G的一个部分树。图$G=(V,E)$的其余部分$\overline{T}=(V,E/E')$，称为G的一个上树，上树并不是树。如图9.2-7所示由图$G=(V,E)$分解为树$T=(V,E')$和上树$\overline{T}=(V,E/E')$。

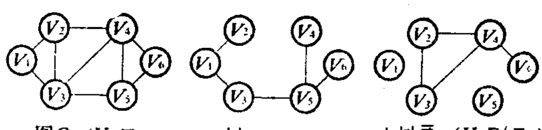


图9.2-7 树和上树

2）树的基本变换：由上可知，若T是一棵树，若e'是不属于T的一条边，则$T+e'$含有一个且仅仅一个圈μ，设e是μ上属于T的任一边，显然$T+e'-e$仍然是一棵树。我们把这种由一棵树通过加进一条边，再丢一条边而得到的另一棵树的变换称为树的基本变换。

若G是一个给定的连通图，T_1和T_2是G的两个不同的部份树，则由T_1经过若干次基本变换可以得到T_2。因为由基本变换知，T_1加一边再减去属于T_1的任一边可以得到另一棵新树。虽然新的树不一定为T_2，但经过若干次这样的基本变换，总是可以得到T_2。

3）最小树问题：设连通图$G=(V,E)$，每一边$e\in E$，有一个非负长度$l_{(e)}$。所谓最小树问题就是寻求G的一个部分树T，使树T的边称为内边（T内边），其余的边称为树外边（T外边）。

定理9.2-1：部分树T是最小的，当且仅当对每条树外边长$l(V_i,V_j)$有

$l(V_i,V_j)\geqslant\max[l(V_1,V_{i1}),l(V_{i1},V_{i2})\cdots l(V_{ik-1},V_j)]$式中$\{V_i,V_{i1},V_{i2}\cdots V_{ik-1},V_j\}$是$T$中连接点$V_i$，$V_j$的（唯一的）链。

基于定理9.2-1，Kruskal提出了一个寻求最小树的算法：以例说明，如图9.2-8

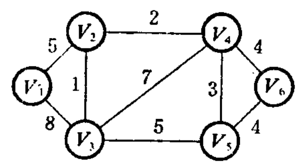


图9.2-8 例图

标法1：每一步从未选的边中选这样的边：使与已选边不构成圈，且长度尽可能小。经过$n-1$步，选出的边使构成最小树。依次选(V_2,V_3)，(V_2,V_4) (V_4,V_5) (V_4,V_6)（或(V_5,V_6)）.(V_1,V_2)得图9.2-9所示的最小树的总长度为15。

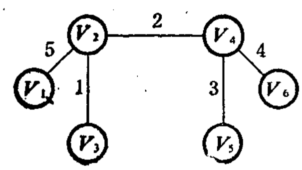


图9.2-9 最小树

标法2：开始任取一顶点V_i，找出由点V_i出发到其它点的边中最小的边，得到边(V_i,V_{i1})然后由V_i和V_{i1}出发，选到其它点的边中最小的边，可得到V_i和V_{i1}及V_{i2}所形成的树，这样一直做下去，可以把V_i，V_{i1}，$V_{i2}\cdots\cdots V_j$点全包括的最小树。现以表9.2-1为例。

表9.2-1 最小树标法

K	1	2	3	4	5
X_K	$\{V_2\}$	$\{V_2,V_3\}$	$\{V_2,V_3,V_4\}$	$\{V_2,V_3,V_4,V_5\}$	$\{V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$
选出边	(V_2,V_3)	(V_4,V_4)	(V_4,V_5)	(V_4,V_6)	(V_1,V_2)

即可得到图9.2-9所示的最小树。当然在运算中，选的边不能和原有的边形成圈。

1.3　网络最大流

本节讨论如下问题：在A，B两城市之间，有若干中间站，由铁路网连成一片，每两站之间的铁路线上，给一个数，作为它的通过能力的限制，问从A到B的最大运输量是多少？

1）容量网络和流：给一个有向图$G=(V\cdot A)$，与每个弧$a=(V_iV_j)\in A$相对应，有一个非负的数$C(a)$（也写作$C(V_i,V_j)$或C_{ij}）称为弧a的容量。这样图$G(V\cdot A)$与容量$c(a)$一起就构成了一个容量网络，有时记为$G=(V\cdot A\cdot C)$。

所谓网络上的流，就是指定义在弧集合A上的一个函数$f=\{f(a)\}$（若$a=(V_i,V_j)$，也记作$f(V_i,V_j)$，或f_{ij}），并称$f(V_i,V_j)$为弧(V_i,V_j)上的流量。

设G是一个容量网络，给两个特定的点，一点为V_s，称为发点；一点为V_t，称为收点；其余的点称为中间点。称这样的网络为带发收点的容量网络，在不会引起混淆的情况下，都通称为网络。

如果流f满足如下两个条件：

（a）容量限制条件：对每个弧$(V_i,V_j)\in A$
$$0\leq f(V_i,V_j)\leq C(V_i,V_j)$$

（b）平衡条件：若流量满足下列条件

$$\sum_{(V_i,V_j)\in A} f(V_i,V_j)-\sum_{(V_j,V_i)\in A} f(V_j,V_i)=\begin{cases}V(f) & i=s\\ 0 & i\neq s,t\\ -V(f) & i=t\end{cases}$$

则称为一个可行流，$V(f)$称为f的流量。

可以用运输问题给网络上可行流一个直观的解释。V_s看做是某种产品的产地，V_t是销地，产品从产地通过交通运输网输送到销地。条件（a）表示每一段运输线上所输送的产品数量不能超过这一段运输线上的最大通过能力。条件（b）表示在每一个中间点，总运进产品的数量等于总运出产品的数量。而V_s的净运出量为$V_{(f)}$，V_t的净运进量为$V_{(f)}$，因此一个可行流就是一个总输送量为$V_{(f)}$的运输方案。

为了简便起见设P，Q是V的两个子集，$P\leq V$，$Q\leq V$记 $f(P,Q)=\sum_{(u,v)\in(P,Q)} f(u,V)$

于是，条件（b）可改写为：

$$f(V_i,V)-f(V,V_i)=\begin{cases}V(f) & i=s\\ 0 & i\neq s,t\\ -V(f) & i=t\end{cases}$$

显然，可行流总是存在的。

例　图9.2-10所示的网络中，每一弧上的数顺序定为G_{ij}，f_{ij}。所谓网络最大流问题就是寻求一个使流量$V_{(f)}$达到最大的可行流，这样的流称为最大流。

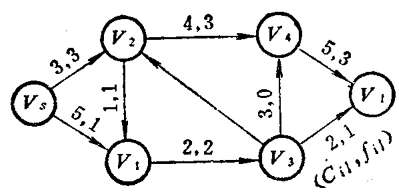


图9.2-10　网络实例

2）截集和截量：给定一个网络$G=(V\cdot A\ C)$，若把V任意分成两部分；x和$\bar{x}$（$\bar{x}=V/x$）·使$V_s\in x$，$V_t\in\bar{x}$，则称弧集合$(x,\bar{x})$为G中分离V_s，V_t的一个截集、直观上，截集是这样的一组弧，从网络中丢去后，V_s到V_t便没有路。

记$C(x,\bar{x})=\sum_{(u,v)\in(x,\bar{x})} C(u,V)$称为截集$(x,\bar{x})$的容量，简称截量。

图9.2-9中若取$x=\{V_s,V_1,V_2\}$、$\bar{x}=\{V_3,V_4,V_t\}$，则$(x,\bar{x})=\{(V_2,V_4)(V_1,V_3)\}$，$C(a,\bar{x})=6$。

从截集的定义可见，截集是从发点到收点的必经之道，所以任一个流的流量$V_{(f)}$决不会超过任一个截集的截量$C(x,\bar{x})$。

$V(f)\leq C(x,\bar{x})$于是若能找到一个可行流f^*，和一个截集$(x^*,\bar{x}^*)$使$V_{(f)}{}^*=c(x^*,\bar{x}^*)$。则$f^*$便是最大流，同时$(x^*,\bar{x}^*)$便是所有截集中容量最小的一个，称之为最大截集。

3）基本定理及计算方法：定理9.2-2（max-flow，min-cut）：任一个网络G中，

从V_s到V_t的一条链，f是一个可行流，若弧$(V_i,V_j)\in\mu^+$，$0\leqslant f_{ij}<c_{ij}$（μ^+表示弧向与走向一致）。弧$(V_i,V_j)\in\mu^-$，$0<f_{ij}\leqslant c_{ij}$（μ^-表示弧向与走向相反）。则称μ是一条关于f的增广链。

推论：当且仅当不存在关于f的增广链时，可行流f^*是最大流。若存在，即可以得到一个流量增大的新的可行流f'，再寻求关于f'的增广链；若不存在，则求得最大流。标法分两大步骤：

第一步骤：标号过程

每点总处于三种状态之一：未标号，标号而未检验，标号且已检验。

标号点V_j的标号有两个数，第一个数是某个点的下标，指明可以由该点向V_j增加的流量；第二个数则指明了从发点到V_j可以增加的流量。

过程开始，总先给发点V_s标上$[S^+,+\infty]$。这时点V_s是标号而未检验的，其它所有点是未标号的。一般地，设点V_j是标号而未检验的，点V_j的标号是$[i^+,Q_{(j)}]$或$[i^-,Q_{(j)}]$，对每个弧(V_j,V_k)，若$0\leqslant f_{jk}<C_{jk}$且点V_k是未标号的，则给点V_k标上$[j^+,Q_{(k)}]$，这儿

$$Q_{(k)}=\min[Q_{(j)},c_{jk}-f_{jk}]$$

对每个弧(V_kV_j)，若$0<f_{kj}$，且点V_k是未标号的，则给点V_k标上$[j^-,Q_{(k)}]$这儿

$$Q_{(k)}=\min[Q_{(j)},f_{kj}]$$

这时，点V_j是标号而已检验的，通过V_j被标上号的所有V_k则是标号而未检验的。

重复这个过程，最后出现两种可能性之一：（1）收点V_t被标号，转入第二步骤。（2）G中没有标号而未检验的点，但V_t未标号，这时不存在关于f的增广链，取所有的标号为x^*，$\overline{x^*}$为未标号点的集合，这样$(x^*,\overline{x^*})$是分离V_s，V_t的一个截集，从而f是最大流。

第二步骤：　调整流的过程

如果点V_t的标号是$[K^+,\theta_{(t)}]$则把f_{kt}换成$f_{kt}+\theta_{(t)}$，考虑点V_k，若其标号是$[j^+,\theta_{(k)}]$则把f_{jk}换成$f_{jk}-\theta_{(t)}$转而考虑V_j。如此继续下去，直到到达点V_s，这样得到一个流量$V_{(t)}+\theta_{(t)}$的新的可行流f'。

（这个调整流的过程相当于根据标号得到一条链$\mu=\{V_s\cdots\cdots V_j,V_k,V_t\}$则

$$f'_{ij}=\begin{cases}f_{ij}+\theta_{(t)} & (V_i,V_j)\in\mu^+\\ f_{ij}-\theta_{(t)} & (V_i,V_j)\in\mu^-\\ f_{ij} & \text{其余弧}\end{cases}$$

以后称这个过程为对f在μ上作$\theta_{(t)}$的平移，简记$f\xrightarrow{\mu}\theta_{(t)}$）

抹去所有的标号，对新的可行流f'，转入第一步骤。

易见，每调整一次流，使流量增大$\theta_{(t)}$，如果初始流及弧容量都是整数的话，则$\theta_{(t)}$至少是1，于是有限步后得到了最大流。

从标号算法可以看到，我们不仅找到了从发点到收点的最大流，而且同时找到了一个最小截集，它是影响网络中流量进一步提高的“瓶口”，即网络中的薄弱部位，要想提高流量，只有首先增大最小截集的弧容量才有可能。

现在以图9.2-9为例，说明标号标法

标号过程：首先给V_s标上$[S^+,+\infty]$检验V_s，它有两个相邻点V_1、V_2。但$f_{s2}=C_{s2}$，故不能给V_2标号。而$f_{s1}<C_{s1}$，所以点V_1可以标上$[S^+,4]$。点V_s是标号而已检验的，点V_1是标号而未检验的。检验V_1，它也有两个相邻点V_2、V_3，因$f_{13}=C_{13}$，故V_3不能被标号，而$f_{21}>0$所以点V_2可标上$[1^-,\min(4,1)]=[1^-,1]$。检验V_2，有两个相邻点V_3，V_4。易见，点V_3可标上$[2^-,1]$点V_4可标上$[2^+,,1]$。

这时有两个标号而未检验的V_3，V_4，可以任选一个，例如V_3先检验，它的相邻点只有V_t是未标号点，$f_{3t}<C_{3t}$，于是V_t标上$[3^+,1]$。如图9.2-11所示

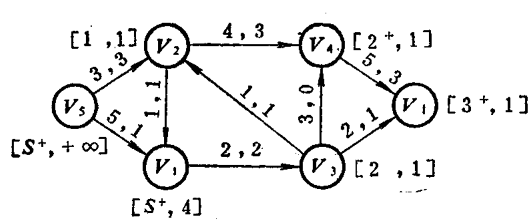


图 9.2-11　例图

转入第二步骤：调整流

通过标号过程，找到一条增广链μ：

$$\begin{matrix} & f_{s1} & & f_{s2} & & f_{s3} & & f^+_{3t} & \\ V_s & \longrightarrow & V_1 & \longleftarrow & V_2 & \longleftarrow & V_3 & \longrightarrow & V_t\end{matrix}$$

$\mu^+=\{(V_s,V_1),(V_3,V_t)\}$，$\mu^-=\{(V_2,$

$V_1)$，$(V_3, V_2)\}$，在μ上作$\theta(t)$的平移，即：

$$V_s \xrightarrow{f_{s1}+\theta(t)} V_1 \xleftarrow{f_{s1}-\theta(t)} V_2 \xleftarrow{f_{s2}-\theta(t)}$$

$$V_3 \xrightarrow{f_{s3}+\theta(t)} V_t$$

$\theta(t)=\min(4, 1, 1, 1)=1$ 于是得到可行流（图9.2-12）

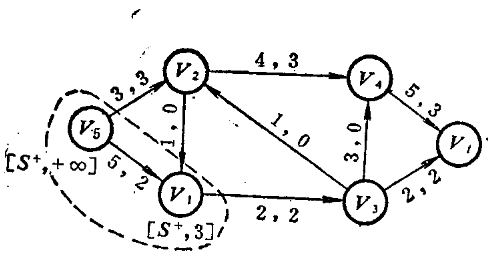


图9.2-12　例图

以图9.2-12转入标号过程：

在先给V_s，V_1标号以后，易见，不可能再给其它点标号，这时令$X=\{V_s, V_1\}$，$\overline{x}=\{V_2 V_3 V_t\}$。

截集$(x, \overline{x})=\{(V_s, V_2)(V_1, V_3)\}$

$C=(x, \overline{x})=5$　这时$V_{(f)}=5$，f即为所求之最大流。

2　对策论（或称博奕论）

在竞赛和斗争中，各方都需要有很好的策略，以便最终取得胜利或获得尽可能好的结局。但每方为取胜和取得尽可能好的结局，都要受到竞赛对方的干扰和破坏。所以在考虑自己得到胜利结局的同时，必须考虑对方可能采用什么策略以便战胜它。对策论就是这样一种学科，它不仅在下棋、赌博、竞赛中加以应用，而且已发展到自动跟踪问题和自动控制系统问题的设计中。

2.1　对策论的三个根本要素

1）局中人

对一场竞赛或斗争中都有这样的参加者，他们为了在一局中力争好的结局，必须制定对付对手们的行动方案。我们把这样有决策权的参加者称为局中人。

有时竞赛参加人数很多，局中人就可能很多，但可以把利益完全一致的参加者只看作一个局中人，因为他们利益一致，行动如一个人，看成为一个局中人可以使问题得到商化。我们称只有两个局中人的对策现象为“两人对策”。而多于两个局中人的对策称为“多人对策”。在“多人对策”中，两个局中人可以允许合作的称为“结盟对策”否则称为“不结盟对策”等等。

2）策略

一局对策中，每个局中人都有供他选择的实际可行的完整的行动方案，即此方案不是某一步的行动方案，而是指导自始至终如何行动的一个方案。我们把一个局中人的一个可行的自始至终通盘筹划的行动方案，称为这个局中人的一个策略，而把这个局中人的策略全体，称为这个局中人的策略集合。

3）局对策的得失

一局对策，人们力争的不外乎是胜利或失败，名次前后，物质收入或支出，赢利或亏本等等。用数学语言来说，一局对策结束时，每个局中人的“得失”用“支付函数”来表示，它是策略的函数。策略的好坏当然“支付函数”是不一样的。

2.2　有限零和两人对策

有限零和两人对策是指这样一类对策现象，其中参加对策的只有两个局中人，而每个局中人都只有有限多个可选择的策略，而在任一局势中两个局中人的得和失之和总是等于零。即一个局中人所得为另一个局中人所失。

如果我们用甲、乙表示两个局中人。假如甲共有m策略（又称纯策略），把这些策略编上序号为A_1，$A_2 \cdots\cdots A_i \cdots\cdots A_m$代表该策略。同样假如乙共有$n$策略（又称纯策略），以序号$B_1$，$B_2 \cdots\cdots B_i \cdots\cdots B_n$表示该策略。

表9.2-2　甲的支付表

甲的支付 乙的策略 / 甲的策略	$B_1 \quad B_2 \cdots B_j \cdots B_n$
A_1	$a_{11} \quad a_{12} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n}$
A_2	$a_{21} \quad a_{22} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
A_i	$a_{i1} \quad a_{i2} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}$
$\vdots$	$\vdots$
A_m	$a_{m1} \quad a_{m2} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn}$

当甲取第A_i个策略，乙取第B_j策略，这时得到甲的收入为a_{ij}（也就是乙的支出），当a_{ij}为正值时，甲的收入为正，反之当a_{ij}为负值即表示此时甲支出，不是收入。

那么，甲的支付可列成表9.2-2。

由于是零和对策，所以乙的收入是这些元素加上负号即可。如在局势(ij)中乙的收入为$-(a_{ij})$。列成甲的支付矩阵为。

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

乙的收入矩阵为：

$$-(a_{ij})=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12}\cdots -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22}\cdots -a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2}\cdots -a_{mn} \end{pmatrix}$$

这两个矩阵称为有限零和两人对策矩阵，简称为对策矩阵。

在对策矩阵中，各局中人如何比较自己各策略的优劣呢？这就要从极大极小原则定义的最优策略来加以考虑，我们来看表9.2-3有限零和两人对策

表9.2-3 有限零和两人对策表

甲的支付 乙的策略 / 甲的策略	B_1	B_2	B_3	各行最小数
A_1	−7	1	−8	−8
A_2	3	2	4	2*
A_3	+16	−1	−9	−9
A_4	−3	0	5	−3
各列最大数	16	2**	5	

从表9.2-3中可见局中人甲有A_1，A_2，A_3和A_4四个策略，而局中人乙有B_1，B_2，B_3三个策略，而且甲的最大收入是16，于是甲想得16而出策略A_3，但是乙分析到甲的这种心理就会出策略B_3，使甲非但得不到16，反而付出9。同样，如果乙为得最大收入9而出策略B_3，而甲猜到乙将出策略B_3，就会出策略A_4，结果乙也得不到9反而要付5。所以，各局中人不想冒险，必须考虑对方会出的策略，使对方得到最坏的收入。

显然，甲的各策略的最坏收入是支付表9.2-2中各策略所对应的最小数。我们把各行的最小数列在第四列（见表9.2-2）并把其中的最大数标上"*"号。于是甲如不存侥幸心，他只能在最坏收入中去找尽可能好的结局，即应该出带有*号所在行所对应的策略（即策略A_2），这样他是比较保险的。同样，乙的各策略最坏收入是表9.2-2各列的最大数的负数。我们把各列的最大数列成第五行，并把其中的最小数标上"**"号。从而乙如不存侥幸心，那么，为了得到尽可能好的结局，应该有"**"号的列作为他的策略(即策略B_2)。

如果标*号与标**号的数相等，如表9.2-2上都为2，那么只要有一个局中人不存侥幸心而取"*"（或"**"）号所对应的策略，则另一个局中人如果有侥幸心不取"**"（或"*"）号所对应的策略就会吃亏。如果表9.2-2上例甲不存侥幸心而采用策略A_2，而乙有侥幸心不出策略B_2，那末只会使甲的收入超过2，这是甲所希望的。为了使乙不太吃亏，乙祗有老老实实地采用带"**"号对应的策略，以使得他支出最少。所以A_2和B_2分别为甲、乙的最优纯策略。

当标"*"和"**"号的数不等，如表9.2-4所示。

表9.2-4 对策表

甲的支付 乙的策略 / 甲的策略	B_1	B_2	B_3	各行最小数
A_1	−7	1	−8	−8
A_2	3	0	4	0*
A_3	16	−1	−9	−9
A_4	−3	0	5	−3
各列最大数	16	1**	5	

在表9.2-4可见，这里新列的最大数为1，不等于新行的最小数。这样为使甲不能有所得，乙必须采取策略B_2，此时甲虽然采用A_2策略为不败的策略（即为0），可是他分析乙的心理，他决定冒险，出其不意地采用策略A_1，则他自己得到1（由

过0）。而如果乙看到甲不甘心于得到0的结局，将会冒险出策略A_1，乙也会冒险出其不意出策略B_3（即乙将得到8，甲得到－8）。因此，在这个对策中，各局中人都会制造自己某些策略的假象，使对方作出错误的判断，然后突然出另一策略，使对方必有所失。总之，在这个对策中总有局中人想冒险，亦即不存在前述意义下的最优纯策略。

为了不被对方猜到各局中人的决策，最好是随机地选取纯策略。于是引入了"混合策略"的概念。即每一个局中人决策时，用一定概率去选取每个纯策略。例如乙可以用$\frac{1}{3}$的概率选策略B_1，$\frac{2}{3}$的概率选策略B_2和B_3并按策略的序号排列起来，得$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right)$，则$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right)$就被称做乙的一个混合策略。这样乙的所有混合策略可以表为集合：

$$S=\{y=(y_1,\ y_2,\ y_3);\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ y_3\geqslant 0\quad y_1+y_2+y_3=1\}$$

而$y_1=\frac{1}{3}$，$y_2=\frac{2}{3}$ $y_3=0$ $y_1+y_2+y_3=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+0=1$

用数学的规律来写，甲的所有混合策略集S_A为：

$$S_A=\{\ x=(x_1,\ x_2\cdots x_i\cdots x_m);\ x_i\geqslant 0\quad i=1,\ 2\cdots m\quad \sum_{i=1}^{m}x_i=1\}$$

$x=(x_1\cdot x_2\cdots x_i\cdots x_m)$称为甲的混合策略。

乙的混合策略集S_B为：

$$S_B=\{y=(y_1,\ y_2\cdots y_j\cdots y_n);\ y_j\geqslant 0\quad j=1,\ 2\cdots n\quad \sum_{j=1}^{n}y_j=1\}$$

$y=(y_1、y_2\cdots y_j\cdots y_n)$为乙的混合策略。

根据数学上的推导可以得到下列结论：

当甲取混合策略$x=(x_1,\ x_2\cdots x_m,\ )$，乙取混合策略$y=(y_1,\ y_2\cdots y_n)$时，甲的支付期望值为：

$$E(x、y)=\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m}x_i\ a_{ij}\ y_j$$（其中a_{ij}为原支付矩阵的元素）

当然乙的支付期望值在有限零和两人对策的情况下为$-E(x,\ y)$可以证明对任意支付矩阵A（$=a_{ij}$）都有：

$$\max_{x\epsilon S_A}\ \min_{y\epsilon S_B}\ E(x,\ y)=\min_{y\epsilon S_B}\ \max_{x\epsilon S_A}E(x,\ y)$$

此即对策论中有名的极大极小定理。进一步推导得到支付矩阵A（a_{ij}）的最优混合策略的介x^*，y^*使下式成立

$$\min_{y\epsilon S_B} E(x^*,y)=V=\max_{x\epsilon S_A}E(x,\ y^*)$$

那么，当甲取策略x^*时，不管乙如何聪明，他也无法使甲的期望收入少于V。反之，当乙出策略y^*时，不管甲怎么聪明，甲也无法使自己的期望收入多于V，所以使上式成立的x^*全体和y^*全体，分别称为甲、乙的最优策略集。应用矩阵运算，可以把这些最优策略全部求出来。

2.3 对策的混合策略的值和解

设支付矩阵为：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

要求两个局中人的最优混合策略及对策的值。

根据对策的定理可以列出下列条件：

$$\begin{array}{ll}
x_1+x_2+x_3=1 & y_1+y_2+y_3=1\\
0\leqslant x_1\leqslant 1 & 0\leqslant y_1\leqslant 1\\
0\leqslant x_2\leqslant 1 & 0\leqslant y_2\leqslant 1\\
0\leqslant x_3\leqslant 1 & 0\leqslant y_3\leqslant 1
\end{array}$$

$$(1)x_1+(-1)x_2+(-1)x_3\geqslant V$$
$$(1)y_1+(-1)y_2+(-1)y_3\leqslant V$$
$$(-1)x_1+(-1)x_2+(2)x_3\geqslant V$$
$$(-1)y_1+(-1)y_2+(3)y_3\leqslant V$$
$$(-1)x_1+(3)x_2+(-1)x_3\geqslant V$$
$$(-1)y_1+(2)y_2+(-1)y_3\leqslant V$$

（ ）中的数值为支付矩阵中之元素，为了解出x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3必须把"$\geqslant$"换成"$>$"及"$=$"各种情况。若我们从等式开始，把六个不等式都换成等式，可得：

$$\begin{array}{ll}
x_1-x_2-x_3=V & y_1-y_2-y_3=V\\
-x_1-x_2+2x_3=V & -y_1-y_2+3y_3=V\\
-x_1+3x_2-x_3=V & -y_1+2y_2-y_3=V\\
x_1+x_2+x_3=1 & y_1+y_2+y_3=1
\end{array}$$

利用我们所熟悉的初等代数，可求出这组方程的解是：

$$x_1=\frac{6}{13}\quad x_2=\frac{3}{13}\quad x_3=\frac{4}{13}\quad y_1=\frac{6}{13}$$

$$y_2=\frac{4}{13}\quad y_3=\frac{6}{13}\quad V=-\frac{1}{13}$$

这样求得的x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3都是正数符合要求，因此最佳混合策略为：

$$x^*=\left(\frac{6}{13},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{13}\right)$$

$$y^*=\left(\frac{6}{13},\ \frac{4}{13},\ \frac{3}{13}\right)$$

对策值$V=-\frac{1}{13}$也就是甲可以这样走一局，使他有把握不至于输得比$\frac{1}{13}$还多，而乙在一局中不至于赢数低于$\frac{1}{13}$。

但是并不是所有支付矩阵都能用等式去求最佳混合策略和对策的解。因此在使用等式有时会发现这些等式是不相容的或无解。例如支付矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

要求两个局中人的最优策略和对策的值。利用等式得：

$$\begin{array}{ll}
x_1+x_2+x_3=1 & y_1+y_2+y_3=1 \\
0\leqslant x_1\leqslant 1 & 0\leqslant y_1\leqslant 1 \\
0\leqslant x_2\leqslant 1 & 0\leqslant y_2\leqslant 1 \\
0\leqslant x_3\leqslant 1 & 0\leqslant y_3\leqslant 1 \\
3x_1-2x_2+4x_3\geqslant V & 3y_1-2y_2+4y_3\leqslant V \\
-x_1+4x_2+2x_3\geqslant V & -y_1+4y_2+2y_3\leqslant V \\
2x_1+2x_2+6x_3\geqslant V & 2y_1+2y_2+6y_3\leqslant V
\end{array}$$

首先把一切不等式都换成等式得：

$$\begin{array}{ll}
3x_1-2x_2+4x_3=V & 3y_1-2y_2+4y_3=V \\
-x_1+4x_2+2x_3=V & -y_1+4y_2+2y_3=V \\
2x_1+2x_2+6x_3=V & 2y_1+2y_2+6y_3=V \\
x_1+x_2+x_3=1 & y_1+y_2+y_3=1
\end{array}$$

容易验证这些方程没有x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3的非负解，这就说明不能把全部不等式变为等式，所以必须考虑其它情况：如把第一式的“$\geqslant$”换成“$>$”其它各不等式还是等式可以得：

$$\begin{array}{ll}
3x_1-2x_2+4x_3>V & 3y_1-2y_2+4y_3=V \\
-2x_1+4x_2+2x_3=V & -y_1+4y_2+2y_3=V \\
4x_1+2x_2+6x_3=V & 2y_1+2y_2+6y_3=V \\
x_1+x_2+x_3=1 & y_1+y_2+y_3=1
\end{array}$$

根据对策论即知，如某一行（或列）所成的方程式是“$<V$”（或“$>V$”）则该行的$x_i=0$（或该列$y_i=0$）现因为$3x_1-x_2+2x_3>V$所以该列的$y_1=0$在方程中把y_1换成为零。可得出x_1，x_2,x_3及y_1，y_2，y_3的方程，从方程可见这些方程是互不相容的。如果继续做下去，最后可以看到，如果令不等式$4x_1+2x_2+6x_3>V$即$y_3=0$和不等式$3y_1-2y_2+4y_3<V$即$x_1=0$，我们可以得到方程组为：

$$\begin{array}{ll}
-x_2+2x_3=V & -y_1+4y_2=V \\
4x_2+2x_3=V & 2y_1+2y_2=0 \\
x_2+x_3=1 & y_1+y_2=1
\end{array}$$

这组方程的解：$x=0$；$x_3=1$；$y_1=\frac{2}{5}$；

$$y_2=\frac{2}{5};\ V=2。$$

3　排队论

排队论又称随机服务系统理论。在日常生活中人们要经常遇到的，如上下班坐汽车，汽车和乘客就构成一个服务系统。另外如打电话定火车票，旅客和定票处也构成一个服务系统。

要求服务的“顾客”可以是人，也可以是某种物品（另件）。例如仪表另件生产的自动流水线中，传送到某一工序的另件就是要求服务的“顾客”。因此工序就是一个“服务机构”，它们也构成一个服务系统。

各种服务系统中，顾客到来的时刻与进行服务的时间，都随不同的时机和条件而变化。因此，服务系统的状况也是随机的。我们的任务就是要考察这些随机现象的规律。为了强调系统的随机性，就把这种服务系统称为随机服务系统。

各种服务系统有下列共同的组成部分：（1）输入过程；（2）排队规则；（3）服务机构。

3.1　输入过程

输入过程可以分为下列几类：

1）定长输入：顾客有规律地以等间隔时间到达。例如每隔时间C到达一个顾客，此时相继到达间隔T的分布函数$A_{(t)}$为：

$$A_{(t)}=p\{T\leqslant t\}=\begin{cases}1, & t\geqslant c\\ 0, & t<c\end{cases} \qquad (9.2\text{-}1)$$

医院预约病人指定半小时到达一个，以及产品通过传送带进入包装箱都属这类输入的例子。

2）最简单流：也称泊松（Poisson）流输入。满足下列四个条件的输入称为最简单流：

（1）平稳性：在区间$[a, a+t]$内有k个顾客到来的概率与a无关，而只与t，k有关。记此概率为$V_k(t)$

（2）无后效性：不相交区间内到达的顾客数是相互独立的。

（3）普通性：令$\psi(t)$表示长为t的区间内至少到达两个顾客的概率，则

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=0 \qquad (9.2\text{-}2)$$

（4）有限性：任意有限区间内到达有限个顾客的概率为1。因而

$$\sum_{k=0}^{\infty}V_k(t)=1 \qquad (9.2\text{-}3)$$

这种输入是应用最广泛的，而且是最容易处理的一种输入。可以证明，最简单流长为t的时间内，到达k个顾客的概率$V_k(t)$，遵从泊松分布即：

$$V_k(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\quad k=0, 1, 2\cdots \qquad (9.2\text{-}4)$$

其中，$\lambda>0$为一常数。同时可以证明，最简单流的重要条件是相继到达的顾客的间隔T_1，T_2……为相互独立，相同分布的，且其分布函数为负指数分布：

$$A(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (9.2\text{-}5)$$

3）爱尔朗输入E_k：顾客到达间隔相互独立，具有相同的爱尔朗分布密度$a(t)$：

$$a(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t},\ t\geqslant 0 \qquad (9.2\text{-}6)$$

其中k为正整数。

4）一般独立输入：顾客到达间隔相互独立，相同分布，记其分布函数为$A(t)$。上面所有的输入都是一般独立输入的特例。

5）成批到达的输入：假定有一系列到达点，顾客到达的间隔分布，可以是上述的各种分布，但在每一到达点上到来的不是单独一个顾客，而是一批顾客。每批顾客的数目N为一随机变量，其分布为：

$$p\{N=k\}=a_k,\ k=0, 1\cdots \qquad (9.2\text{-}7)$$

3.2　排队规则

1）损失制：顾客到达时，若所有服务台均被占，该顾客就自动消失，永不再来。

2）等待制：顾客到达时，若所有服务台均被占，他们就排成队伍，等待服务，服务次序可以采取下列各种规则：

（1）先到先服务：这是最通常的情况。

（2）后到先服务：如通讯系统中，最后到达的信息，一般说是最有价值的，因而采用“后到先服务”的方式。

（3）随机服务：先到和后到顾客，以相同的概率受到服务。

（4）优先权服务：重要顾客，有受到服务的优先权，例如急诊病人。

（5）多个（n个）服务台情形：到达的顾客排成n个队，第m个顾客到达时，以概率C_i^m排入第i个队（$\sum_{i=1}^{n}C_i^m=1$，$m=1, 2\cdots\cdots$）。

3）混合制：介于上述二者之间，可分为下列各种情况：

（1）队长有限制的情形：顾客到达时，若队长$<N$，就排入队中；若队长$\geqslant N$，顾客就离去，永不再来。

（2）等待时间有限制的情形：顾客等待时间不能超过T，超过T后顾客就离去，永不再来。

（3）逗留时间（等待时间与服务时间之和）有限制的情形：顾客的逗留时间不能超过某一T，超过时顾客就离去，永不再来。例如高射炮打飞机，飞机飞过高射炮射击区域所需时间为T，若敌机在此时间T内不被击落，就称消失。

3.3　服务机构

服务台的个数可以是一个或几个，可以是单个

服务，也可以是成批服务。有各种服务分布，如下所述：

1）定长分布：每一顾客的服务时间都是常数l，此时服务时间V的分布函数为：

$$B(x)=p[V\leqslant x]=\begin{cases}1, & x\geqslant l\\ 0, & x<l\end{cases}\quad (9.2\text{-}8)$$

2）负指数分布：即各个顾客的服务时间相互独立，具有相同的负指数分布：

$$B(x)=\begin{cases}1-e^{-\mu x}, & x\geqslant 0\\ 0 & x=0\end{cases}\quad (9.2\text{-}9)$$

其中$\mu>0$为一常数，其平均服务时间为：

$$EV=\int_0^\infty x\mathrm{d}B(x)=\mu\int_0^\infty xe^{-\mu x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\mu}\quad (9.2\text{-}10)$$

3）爱尔朗分布：各个顾客的服务时间相互独立，具有相同的爱尔朗分布，其密度为：

$$b(x)=\frac{k\mu(k\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\mu x},\ x\geqslant 0\quad (9.2\text{-}11)$$

其中$\mu>0$为一常数，k为正整数。可算出平均服务时间为：

$$EV=\int_0^\infty xb(x)dx=\frac{1}{\mu}\quad (9.2\text{-}12)$$

当$k=1$时，爱尔朗分布化为负指数分布；$k\to\infty$时得到长度为$\frac{1}{\mu}$的定长分布。

4）一般服务分布：所有顾客的服务时间是相互独立，具有相同分布的随机变量，其分布函数记为$B(x)$。前面所有的各种服务分布都是一般服务分布的特例。

5）多个服务台的情形：可以假定各个服务台的服务分布参数不同或类型不同。

6）服务时间依赖于队长的情形：这反映了一般服务者的心理，排队的人愈多，服务的速度也就愈快。

3.4　关于随机服务系统分类的记号

常用随机服务系统分类记号为：令M表示最简单流或负指数服务分布，D表示定长输入或定长服务，E_k表示爱尔朗分布的输入或服务分布，GI表示独立输入，G表示一般服务分布。于是$M|M|n$就表示最简单流输入，负指数服务分布，n个服务台的随机服务系统，$M|G|I$表示最简单流输入，一般服务分布，单服务台的随机服务系统。同样去理解$M|D|I$；$GI|E_k|I$；$GI|G|n$……系统。

3.5　随机服务系统的几个主要的数量指标

随机服务系统的最主要的数量指标有三个：

1）等待时间：即从顾客到达起，到他开始接受服务时止的这段时间，这对顾客来说，是最关心的。因为每个顾客希望他的等待时间愈短愈好。

2）忙期：即服务台连续繁忙的时期，这与服务台有直接关系，它关系到服务台工作强度。

3）队长：即系统中顾客的数目。这是顾客和服务台都很关心的，特别对系统设计人员来说更为重要。因为它涉及到等待空间的大小，地方小了无法容纳，地方大了又会造成浪费。

此外在不同类型的问题中，还会注意到其它一些数量指标。如损失制及混合制系统中讨论损失率及被损失的顾客数目，在防空阵地上计算敌机的消失率（未被击中而越过防空带的比例数），显然是他们最值得关心的问题。

3.6　排队论应用实例（求机器看管问题处于等待状况的概率）

假定有一个工人看管m台自动机器（$m\geqslant 1$），当机器发生故障而停止运转时，就立即由该工人负责修理。但当机器发生故障时，如果该工人正在修理在此以前已损坏的机器，则刚损坏的机器就只能停着等待修理。我们又假定：

1）每台机器的正常运转时间T，遵从为λ的负指数分布，因而若机器在时刻t正在运转，那么它在（t，$t+\Delta t$）内损坏概率为：

$$P=\{t\leqslant T<t+\Delta t/T\geqslant t\}=\frac{P\{t\leqslant T<t+\Delta t\}}{P\{T\geqslant t\}}$$

$$=\frac{e^{\lambda t}-e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}}=1-e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+0(\Delta t);$$

$\Delta t\to 0$

式中$0(\Delta t)$为高阶无穷小量。

2）每台机器的修复时间遵从参数为μ的负指数分布，因而与上同理，若机器在时刻t正在进

行修理，那么它在（t，$t+\Delta t$）内被修复而开始运转的概率为$\mu\Delta t+0(\Delta t)$，$\Delta t\to 0$。

3）各台机器在任意时段内工作与修理都是彼此独立的。

我们说系统在t时，处于j台机器损坏待修的状态记作$N(t)=j$。此处j台机器损坏待修的状态记作$N(t)=j$。此处j可取值0，1，2……m。令其概率为

$$P=\{N(t)=j\}=Pj(t) \quad (9.2\text{-}13)$$

若在Δt时，系统状态由j转移到i，经推导当$\Delta t\to 0$概率在状态j的导数为：

$$P'_j(t)=(m-j+1)\lambda P_{j-1}(t)-((m-j)\lambda+\mu)Pj(t)+\mu P_{j+1}(t)$$

$$(0<j<m) \quad (9.2\text{-}14)$$

同理可得状态为0和m概率导数分别为

$$P'_0(t)=-m\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \quad (9.2\text{-}15)$$

$$P'_m(t)=\lambda P_{m-1}(t)-\mu P_m(t) \quad (9.2\text{-}16)$$

式（9.2-14），（9.2-15）和式（9.2-16）就是机器看管问题的状态概率所满足的一组微分方程组。

由生灭过程的理论，可以证明极限概率

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t)=P_j>0 \quad 0\leqslant j\leqslant m \quad (9.2\text{-}17)$$

存在，于是我们断言，必有：

$$\lim_{t\to\infty} P'_j(t)=0 \quad 0\leqslant j\leqslant m \quad (9.2\text{-}18)$$

现由式(9.2-14)，(9.2-15)，（9.2-16）取极限$t\to\infty$，根据（9.2-17），（9.2-18）两式，并考虑到：

$$(m-j+1)\lambda P_{j-1}-\mu P_j=0 \quad 1\leqslant j\leqslant m$$

可得：

$$P_j=\frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^j\binom{m}{j}j!}{\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\binom{m}{i}i!} \quad 0\leqslant j\leqslant m \quad (9.2\text{-}19)$$

这就是我们所要求的极限等待状态的概率。因故障而停着的机器的平均数为

$$E_{Pj}=\sum_{j=1} jP_j=\frac{\sum_{j=1} j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\binom{m}{j}j!}{\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\binom{m}{i}i!} \quad (9.2\text{-}20)$$

4 数学规划

4.1 线性规划

线性规划广泛地应用于最优化的技术中，它是处理线性函数的极大或极小问题。在线性规划中，要使可行的解在线性的约束条件下。具体的说，就是考虑变量x_1，x_2……x_n，求线性目标函数Z为极大（或极小）其中

$Z=c_1x_1+c_2x_2\cdots+c_nx_n$（线性函数）

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2$

……

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m$，

而非负条件为

$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$……$x_n\geqslant 0$

这里，a_{ij}，b_i和c_j是已知的常数，未知变量x_j（$j=1$，2……n）可以由线性规划方法求得。

当变量只有两个，即x_1和x_2时，可以用图解法求此线性规划。

例1：设某一工厂生产A和B两种产品，已知制造产品A，单位用煤9吨，电4千瓦，劳力3个。制造产品B，单位用煤4吨，电5千瓦，劳力10个。又知产品A 1单位的经济价值是700元；产品B 1单位的经济价值为600元。这个工厂只有煤360吨/天，电力200千瓦/天，劳力360个/天，问在这种条件下每天应生产A，B各多少单位，创造的产值才最多？

设生产A，B产品每天产量各为x_1，x_2单位，根据题意x_1，x_2应满足下列约束条件：

$9x_1+4x_2\leqslant 360$ （煤）

$4x_1+5x_2\leqslant 200$ （电）

$3x_1+10x_2\leqslant 360$ （人）

非负条件为：$x_1\geqslant 0$；$x_2\geqslant 0$

而所获得的经济价值的目标函数为

$Z=7x_1+6x_2$

我们需要求得适合约束条件的x_1，x_2值，使z的值为最大。利用图解法来求z的极大值，如图9.3