主　编　陈立原　副主编　任尧民

经济数学基础
学习指导

山东科学技术出版社

前　言

本书是配合中央广播电视大学最新出版的《经济数学基础》教材的使用而编写的指导书。本书主要适用于电视大学经济、管理学科各专业的学生,也可作为其他成人高等学校学生的学习参考书。参加本书编写的人员是从事教学第一线的优秀教师。本书重点突出,具有较强的实用性。各章按基本要求、基本内容、例题选解、自测题等四部分介绍;书末附有模拟试题及参考答案。

书中例题力求典型、多样,注重基础知识和基本技能的训练。自测题和模拟试题知识覆盖面广且重点突出。

参加本书编写的有:王海波(第八章),季荣芳(第五、七章),肖峰(第一章),申作伟(第二章),孙平(第十章),武颖静(第六章),胡振媛(第三章),任尧民(第九章),陈立原(第四章),鲁冰(绘图)。王海波参加了部分章节的修改,全书由主编统稿审定。

本书编写过程中得到山东广播电视大学各级领导的大力支持和帮助,表示感谢。

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中存在的不足之处恳请读者批评指正。

编　者

1998年6月

目　　录

第一章　函　　数

一、基 本 要 求

1. 理解函数概念，掌握函数定义域和函数值的求法．
2. 了解函数的主要性质．
3. 熟练掌握五类基本初等函数的表达式、图形及主要特征．
4. 了解复合函数和初等函数，会对初等函数进行分解．
5. 会建立简单的经济函数关系．

二、基 本 内 容

（一）基本概念

1. 函数

设 x,y 是两个相关的变量．x 在区域 D 内变化，如果对于 D 内的每一个 x，按照某种规则 f，都有唯一的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)\quad x\in D$. 其中 x 称为自变量，x 的变域 D 称为函数的定义域．

说明

(1)函数由它的定义域 D 和对应法则 f 完全确定．因此，定义域和对应法则称为函数的两要素．当两个函数的定义域相同，对应法则也相同时，称两函数相同．例如

$$y=2x+1$$

$$y=2t+1$$

$$y=2v+1$$

都是相同的函数．而

$$y=\frac{x^2}{x}$$

$$y=x$$

就是两个不同的函数，因为它们的定义域是不同的．

(2)本书所指的函数是单值函数，即对于定义域 D 内的每一个自变量 x 都有唯一的函数值 y 与之对应．

(3)如果两个变量之间的对应方式由一个方程来确定，如

$$y^2+3xy-x^3=0$$

即 x 值确定后可由此方程确定 y 的值．这种由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为隐函数．

2．单调函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对 D 内任意的 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 D 内单调增加．若当 $x_1<x_2$ 时

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 D 内单调减少．

单调增加或单调减少的函数，统称为单调函数．

3．奇偶函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对 D 中任意的 x 满足

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 是偶函数．如果满足

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $y=f(x)$是奇函数．

4．有界函数

设函数 $y=f(x), x\in D$,若存在正数 M,使得对于 D 中任意 x,有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $y=f(x)$在 D 上有界．

5．基本初等函数

(1)常数函数　$y=c$　(c 为常数)

(2)幂函数　$y=x^{\alpha}$　(α 为实数)

(3)指数函数　$y=a^{x}$　$(a>0, a\neq 1)$

特别地 $y=\mathrm{e}^{x}$

(4)对数函数　$y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$

特别地 $y=\ln x$

(5)三角函数

正弦函数　$y=\sin x$

余弦函数　$y=\cos x$

正切函数　$y=\mathrm{tg} x$

余切函数　$y=\mathrm{ctg} x$

正割函数　$y=\sec x$

余割函数　$y=\csc x$

6．复合函数

若 $y=f(u)$是 u 的函数，$u=\varphi(x)$是 x 的函数．如果 $u=\varphi(x)$的值域包含在 $y=f(u)$的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的复合函数．记作

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]$$

7．初等函数

由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除或复合而得到的函数．

8．常用经济函数

(1)需求函数

$$Q=Q(P)$$

其中，Q 表示对商品的需求量，P 表示商品的价格．P 是自变量，对商品的需求量是该商品价格的函数．

一般地，需求量随价格上涨而减少，因此，通常需求函数是价格的减少函数．

常见的需求函数有：

线性需求函数

$$Q=a-bP \qquad (a\geqslant0,b\geqslant0)$$

二次曲线需求函数

$$Q=a-bP-cP^2 \qquad (a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0)$$

指数需求函数

$$Q=Ae^{-bP} \qquad (A\geqslant0,b\geqslant0)$$

需求函数的反函数是价格函数，记作

$$P=P(Q)$$

(2)总成本函数

$$C(q)=C_1+C_2(q)$$

其中，C_1 为固定成本，C_2 为可变成本．即总成本等于生产 q 个单位时某种商品的可变成本与固定成本之和．

平均成本：即生产 q 个产品时，单位产品的成本，记作 $A(q)$．

$$A(q)=C(q)/q$$

(3)总收入函数

总收入：平均收入都是售出商品数量的函数．

设 P 为商品价格，q 为商品量，有

总收入　　$R(q)=qP(q)$

平均收入　$\overline{R}=\dfrac{R(q)}{q}=P(q)$

其中 $P(q)$是商品的价格函数．

(4)总利润函数

利润又称纯收入，是总收入与总成本之差，

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

其中 q 是产品数量．

平均利润

$$\overline{L}(q)=\frac{L(q)}{q}$$

总利润 L 和平均利润$\overline{L}$都是产量q 的函数．

(二)基本性质

1．幂函数　$y=x^{\alpha}$(α 为实数)

$\alpha>0$ 时，图形过(0,0)，(1,1)点，x 无限增大时，x^{α} 也无限增大．

$\alpha<0$ 时，图形过(1,1)点，而不过(0,0)点，x 无限增大时，x^{α} 无限接近 0.

2．指数函数　$y=a^{x}$　($a>0,a\neq1$)

图形过(0,1)点，且在 x 轴上方.

$a>1$ 时，$y=a^{x}$ 单调增加. x 无限增大时，a^{x} 也无限增大；x 无限减小时，a^{x} 无限接近 0.

$0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 单调减少．x 无限增大时，a^{x} 无限接近 0；x 无限减小时，a^{x} 无限增大．

特别地　$y=\mathrm{e}^{x}$，x 无限增大，e^{x} 无限增大；x 无限减小，

e^x 无限接近 0.

3. 对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0, a\neq 1)$

图形过(1,0)点,且在 y 轴右边.

$a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增大.x 无限增大时,$\log_a x$ 无限增大;x 从右侧无限接近 0 时,$\log_a x$ 无限减小.

$0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少.x 无限增大时,$\log_a x$ 无限减小;x 从右侧无限接近 0 时,$\log_a x$ 无限增大.

特别地,$y=\ln x$　当 x 无限增大时,$\ln x$ 无限增大;当 x 从右侧无限接近 0 时,$\ln x$ 无限减小.

4. 三角函数

(1)正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 都是有界函数.$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$.

当 x 无限增大时,$\sin x$,$\cos x$ 都在$[-1,1]$内摆动,不与任何常数无限接近.

(2)正切函数 $y=\mathrm{tg}x$　$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$(k 为整数)

当 x 从左侧无限接近 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$\mathrm{tg}x$ 无限增大.

当 x 从右侧无限接近 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$\mathrm{tg}x$ 无限减小.

(三)基本方法

1. 确定函数定义域的方法

(1)分式:分母不等于零.

(2)偶次根式:被开方式大于或等于零(非负).

(3)对数:真数大于零.

(4)实际问题中的函数:由自变量的实际意义确定.

2. 求函数值

给定 x 的值,按对应规律求出 y 的值.

如 $f(x)=\frac{x}{x+1}$,函数的对应规律是

$$f(\quad)=\frac{(\quad)}{(\quad)+1}$$

$$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(a)=\frac{a}{a+1}$$

$$f(-x)=\frac{-x}{-x+1}=\frac{x}{x-1}$$

$$f[f(x)]=f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{x+x+1}$$

$$=\frac{x}{2x+1}$$

3. 函数奇偶性的判定方法

(1)根据定义,若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$为奇函数.如

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\text{是偶函数}$$

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\text{是奇函数}$$

(2)用已知奇偶函数的四则运算判定

已知 x^{2n},$\cos x$ 是偶函数;

x^{2n+1},$\sin x$ 是奇函数

奇×奇=偶　　　偶×偶=偶

奇×偶=奇　　　奇+奇=奇

偶+偶=偶　　　奇+偶(非奇非偶)

如　$y=x^3\cdot\cos x$，　$y=x^3+\sin x$　是奇函数

$y=x\cdot\sin x$，　$y=x^2+\cos x$　是偶函数

$y=x^2+2x+1$　非奇非偶

4. 复合运算

设 $y=f(u)$，$u\in D$，$u=\varphi(x)$，当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 D 的交集非空时，y 也是 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$ 是 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 的复合函数，x 是自变量，u 是中间变量，y 是 x 的复合函数．

如 $y=\sin u$，$u=x^2$ 是两个基本初等函数，复合运算就是把 $u=x^2$ 代入 $y=\sin u$ 中得到 $y=\sin x^2$，就是复合函数．

说明

两个函数复合必须满足一定条件，即中间变量的值域与前者函数的定义域的交集非空．如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 就不能构成复合函数．

5. 初等函数分解或简单函数的四则运算和复合运算

基本初等函数和多项式函数称为简单函数．如 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 可分解为

$y=\ln u$，$u=x+\sqrt{v}$，$v=x^2+1$

这里每一层函数都是基本初等函数或基本初等函数的四则运算．掌握分解的方法是为复合函数求导做准备的．

三、例题选解

例 1　下列各组中，两个函数相同的有(　　)．

(1)　$y=x-3$ 与 $y=\sqrt{(x-3)^2}$；

(2)　$y=\ln(x^2-4)$与 $y=\ln(x+2)+\ln(x-2)$；

(3)　$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

(4)　$y=\sqrt{x^2}$与 $y=|x|$；

(5)　$f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x\sin x}{\sin x}$；

(6)　$f(x)=3x$ 与 $g(x)=\ln e^{3x}$；

(7)　$f(x)=x-1$ 与 $g(u)=u-1$.

解

只有定义域相同,对应关系也相同的两个函数才是相同的函数．

(4)中两函数定义域均为$(-\infty,+\infty)$,且$\sqrt{x^2}=|x|$,所以两函数相同．

同理(6)和(7)题中各对函数也是相同的．

因此本题应选(4)、(6)、(7).

例 2　求下列函数的定义域

(1)　$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$　(2)　$y=\dfrac{x}{x^2-9}$

(3)　$y=\sqrt{6-x}$　(4)　$y=\sqrt{9-x^2}$

(5)　$y=\ln(x+4)$　(6)　$y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-3x+2}+\ln(x+1)$

(7)　$y=\sqrt{\lg x}+\lg(5-x)$

(8)　$y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\lg(x+1)}$

解

(1)分母不能等于零,即

$$x^2-3x+2\neq 0$$

$$(x-1)(x-2)\neq 0$$

得 $x\neq 1, x\neq 2$.

定义域为$(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$.

(2) $x^2-9\neq 0$,即 $x\neq \pm 3$

定义域为$\{x\mid x\neq \pm 3\}$.

(3)被开方数非负,必须 $6-x\geqslant 0$,即 $x\leqslant 6$

定义域为$(-\infty,6]$.

(4)必须 $9-x^2\geqslant 0$

$$x^2\leqslant 9$$

$$|x|\leqslant 3$$

$$-3\leqslant x\leqslant 3$$

定义域为$[-3,3]$.

(5) $x+4>0$

$$x>-4$$

定义域为$(-4,+\infty)$

(6)必须$\begin{cases}x^2-3x+2\neq 0\\ 9-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases}$

解得 $x\neq 1, x\neq 2$ 且 $-3\leqslant x\leqslant 3, x>-1$.

定义域为其公共部分:$(-1,1),(1,2),(2,3]$.

(7)必须$\begin{cases}\lg x\geqslant 0\\ 5-x>0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x\geqslant 1\\ x<5\end{cases}$ 得 $1\leqslant x<5$,

定义域为$[1,5)$.

(8)必须$\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ \lg(x+1)\neq 0\\ x+1>0\end{cases}$

即 $x\leqslant 2$，且 $x\neq 0, x>-1$，

定义域为其公共部分 $(-1,0)(0,2]$.

例 3 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，那么 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域为______ .

解 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，所以

$$\begin{cases}0\leqslant x+\dfrac{1}{4}\leqslant 1\\ 0\leqslant x-\dfrac{1}{4}\leqslant 1\end{cases} \quad 即 \begin{cases}-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant \dfrac{5}{4}\end{cases}$$

故 $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant \frac{3}{4}$，所以，$f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

例 4

(1)已知 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$，求 $f(x)$.

(2)设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解

(1)令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$.

由 $\quad f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$

可得 $\quad f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+(\frac{1}{t})^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$

由于函数关系与字母表示无关，所以

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

(2)令 $t=x+\frac{1}{x}$,解出 x,代入原式中就可得 $f(x)$.

因为 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

即 $f(t)=t^2-2$

所以 $f(x)=x^2-2$

例 5 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^2\sin x$　　(2) $y=x^5-2x^3+x$

(3) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$　　(4) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$

(5) $y=(x^2+x)\sin x$　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解

(1)因为 $y=x^2$ 是偶函数,$y=\sin x$ 是奇函数,它们之积应为奇函数,所以 $y=x^2\sin x$ 是奇函数.

(2)由定义 $f(-x)=(-x)^5-2(-x)^3+(-x)$

$$=-x^5+2x^3-x=-(x^5-2x^3+x)=-f(x)$$

所以 $y=x^5-2x^3+x$ 是奇函数.

(3)因为 $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$

所以原函数为偶函数.

(4)因为 $f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数.

(5)因为 $f(-x)=(x^2-x)\sin(-x)=-(x^2-x)\sin x$

可见,$f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,

所以原函数非奇非偶.

(6)因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$

$$-f(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

$$=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

所以 $f(-x)=-f(x)$,故原函数为奇函数 .

例 6 下列函数为奇函数的是(　　).

A. $2x^2+3x$　　　B. x^3+1

C. $4\sin x+2x$　　　D. $\ln(1-x^2)$

解

由奇偶函数四则运算规律可判断 A,B 均非奇非偶 . 根据定义可判断 D 是偶函数 . 而 C 中 $4\sin x$ 与 $2x$ 均为奇函数,所以 $4\sin x+2x$ 是奇函数 .

因此,本题应选 C.

例 7 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 的定义域是______,$f(-0.5)=$____,$f(0.5)=$____,$f(1.5)=$____ .

解

分段函数定义域是各段函数定义域的并集,所以 $f(x)$ 的定义域为$(-1,0)\cup[0,1]\cup(1,3]=(-1,3]$

$$f(-0.5)=2^x\big|_{x=-0.5}=2^{-0.5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(0.5)=2\big|_{x=0.5}=2$$

$$f(1.5)=x-1\big|_{x=1.5}=0.5$$

例 8 设 $f(x)=3x+5$,那么 $f[f(x)-2]=$______ .

解

$$f[f(x)-2]=f[3x+5-2]=f(3x+3)=3(3x+3)+5$$
$$=9x+14$$

例 9 下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\ln\cos x^2$ (2) $y=e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$

(3) $y=\ln(\sin\sqrt{x^2+1})$

解

(1)设 $\cos x^2=u$,那么 $y=\ln u$ 是基本初等函数.

设 $x^2=v$,那么 $u=\cos v$ 是基本初等函数.

故 $y=\ln\cos x^2$ 由 $y=\ln u, u=\cos v, v=x^2$ 三个基本初等函数复合而成.

(2) $y=e^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$ 由 $y=e^u, u=\mathrm{tg}v, v=\sqrt{x}$ 三个初等函数复合而成.

(3) $y=\ln(\sin\sqrt{x^2+1})$ 由 $y=\ln u, u=\sin v, v=\sqrt{t}, t=x^2+1$ 复合而成.

例 10 已知需求规律为 $q=4500-250p$,那么收益函数是______.

解

因为 $R(q)=p\cdot q$,由需求函数 $q=4500-250p$ 可知,价格函数为 $p=18-0.004q$,故收益函数为

$$R(q)=(18-0.004q)\cdot q=18q-0.004q^2$$

四、自　测　题

(一)填空题