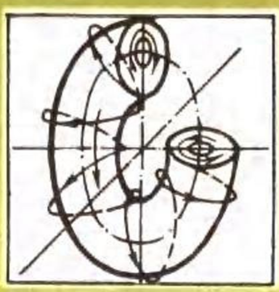
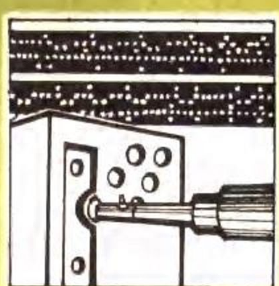
高等学校试用教材





活塞式压缩机测试技术

华中工学院谈庆财　编

机　械　工　业　出　版　社

活塞式压缩机测试技术

华中工学院谈庆财　主编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 · 印张 14 · 字数 342 千字

1981 年 1 月北京第一版 · 1981 年 1 月北京第一次印刷

印数 0,001—3,700 · 定价 1.50 元

*

统一书号：15033·5012

前　言

本书是根据1978年4月高等学校一机部对口专业座谈会的精神和压缩机技术专业教材大纲审定会上拟定的《活塞式压缩机测试技术》教材编写大纲编写的。

随着我国"四个现代化"的发展，从事压缩机、制冷技术和气体动力机械的工作者，经常要遇到大量的测试工作。如果对各种物理量的变换原理、各种动态物理量的测定，以及实验装置的设计和数据分析等方面，缺乏扎实的理论基础和实验技能，就不能很好地胜任工作。例如，上述工作者不仅要掌握静态几何量的测定，还必须掌握相当广泛的各种物理量（如振动、噪声、压力、温度和流量等）的测试技术。

测试技术是一门综合性的技术基础学科。它需要数学、物理学、电子学和力学等基础知识。压缩机、制冷技术和气体动力机械专业设置《活塞式压缩机测试技术》课程，可以使学生掌握科研和生产中常用的测试技术，也能促进学生深化所学的基础理论知识。

本书较系统地介绍了压缩机测试技术的基础理论知识和基本方法，详细讨论了压缩机性能测试中遇到的问题（如压力、温度、流量、转速和轴功率等），对压缩机指示图的录取、气阀运动规律的测定、振动和噪声的测量等亦有较详细的介绍。

本书可作为高等学校压缩机及制冷技术专业和气体动力机械专业的试用教材，也可供有关技术人员参考。

本书由华中工学院谈庆财同志主编，叶树椿、钟型义和仲石廉三位同志参加编写。

本书由西安交通大学王迪生、吴丹清两同志主审，石华鑫、郁永章等同志参加会审。审稿中提出了许多宝贵意见，编者对此表示感谢。

在编写过程中，北京无线电二厂、江西红声器材厂、上海转速表厂、华东电子仪器厂和北京牛街电子仪器厂等单位为本书提供了一些资料，对此一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和缺点，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1979年9月

目　录

第一章　总　论

在讨论压缩机测量技术之前，为了便于分析各种测量方法和测量仪表，本章先介绍一些有关测量仪表各主要组成元件的概念，测量工作上常用的术语和测量的基础知识，以便读者更好地了解以后各章的内容。

§1-1　测量系统的组成

测量系统的组成方框图如图1-1所示。被测量的现象是一种物理变化或化学变化。测量的第一步，就是用某种方法感受这种量的变化。用于感受这种量变化的元件称为感受件。为了要感受这种量的变化，就应该根据目的，把这种量的变化转换为相应的物理变化或化学变化。第二步，是将感受的物理变化或化学变化，传送到目的地的传递过程，此外，还可能加上改变这些量的形式和性质的变换过程，以及扩大量的放大过程等等。具有传递、变换或放大作用的元件，统称为传送件。更进一步，还有将加、减、乘、除、微分、积分等演算都放在测量系统内进行。最近也有将电子计算机直接连接在测量系统内，这样就可以进行复杂的运算，直接得出最后测量结果。

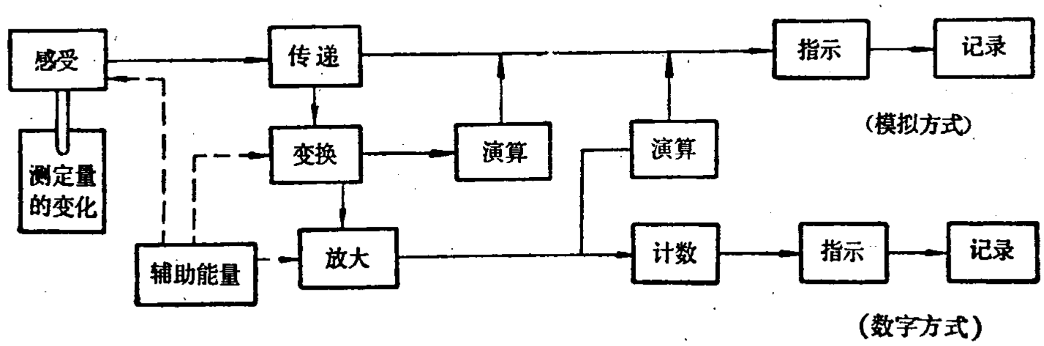


图1-1　测量系统的组成方框图

经历上述各过程的量，最终是用指针摆动或其他形式"指示"出来或"记录"下来。用于指示或记录的元件称为显示件。这种指示值通常是用肉眼读取，因此也可以说是模拟的，这种类型的仪表称为指示式仪表。最近用数字显示的方法也正在增多。上述测量系统的不同组成部分可以各自独立，也可以作成整体式的。

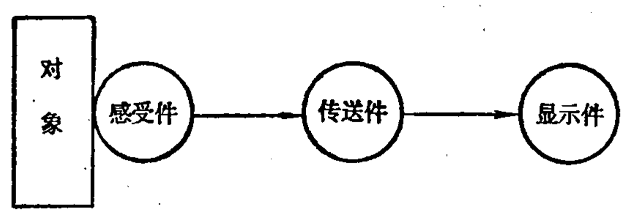


图1-2　三个作用元件的相互关系

从上述可知，任何测量系统，一般均具有三个主要作用元件：感受件、传送件和显示件。感受件直接与被测对象发生联系（但不一定接触），它的作用是感受被测参数的变化，同时对外发出一个相应的讯号；传送件的作用，是将感受件发出的讯号（改变或不改变这种讯号的性质）直接地或经放大后传送给显示件；显示件直接与观测者发生联系，它的作用是根据感受件发出的讯号，向观测者指示出被测

参数的变化值。上述三个作用元件的相互关系如图 1-2 所示。

下面以具体的例子作一说明。图 1-3 为用机械式指示器测量指示图的原理图。小活塞 1 受到压缩机气缸气体的压力，由于感受到这个压力，使小活塞产生位移，通过杠杆机构传送和放大位移，然后通过指针 2 的移动，直接把压力的变化记录在转筒 4 上。

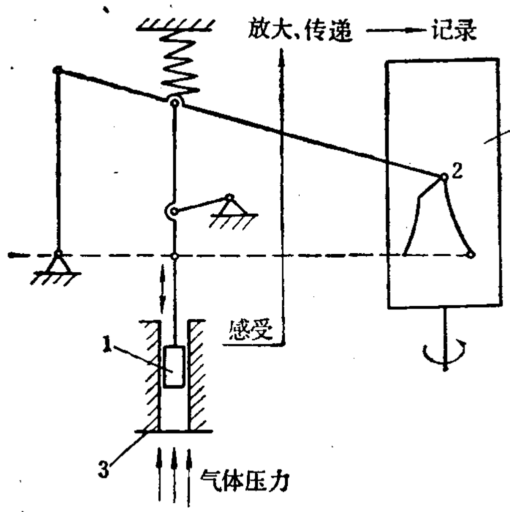


图 1-3　用机械式指示器测量指示图

1—小活塞　2—指针　3—气缸　4—转筒

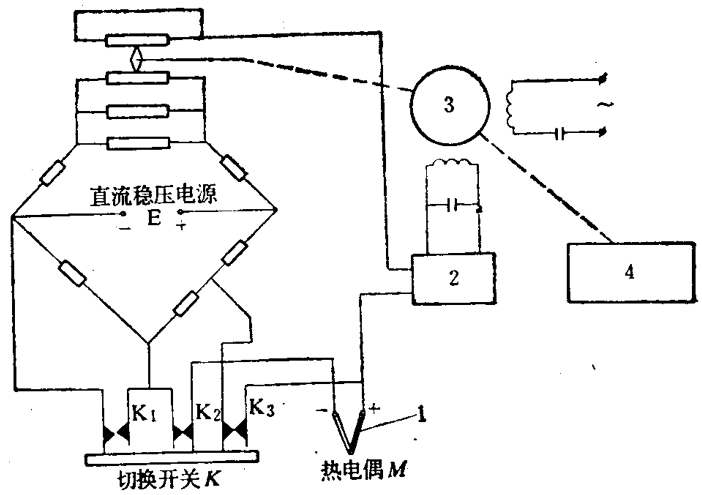


图 1-4　用热电偶测量温度的测量系统简图

1—热电偶　2—放大器　3—可逆电机　4—指示或记录机构

图 1-4 为用热电偶温度计测量温度的测量系统简图。图中热电偶 M 为感受件，通过它将测点温度的变化转换为热电势变化；然后通过电子电位差计，来指示或记录测点温度的变化值。

由于组成测量系统的各个主要作用元件的任务不同，对它们的要求也就不同，现分述如下：

一、测量系统的感受件

作为测量系统的感受件，它必须满足下列条件：

1. 它必须随着被测参数的变化而对外发出一个相应的讯号。

2. 它只能随着被测参数的变化而发出讯号。如被测参数是温度，感受件就只能在温度变化时发出讯号，在压力变化时就不应发出同样的讯号。

3. 感受件发出的讯号，与被测参数之间有单值的函数关系，最好成线性关系。

第一个条件是较易满足的，因为各种现象之间的普遍联系和相互依存是客观存在的。例如被测参数是温度，当温度变化时，几乎所有的物质都要发生体积、电阻和其他物理性质的改变。

第二个条件是较难完全满足的，因为各种现象是相互联系的。例如用气体膨胀的性质来测量温度，当温度变化时，气体的比容固然会变化，但当压力变化时，气体的比容也会改变，这就给测量带来困难。因此，在实践上要找到同时满足上述两个条件的感受件是困难的。在测量系统的设计上，一般只能做到下列各项之一：

1. 找到一种感受件，它对被测参数的变化反应特别强烈，虽然对被测介质其他参数的变化也有反应，但反应很微弱，以致在通常情况下可以忽略。例如用金属热电阻来测量温度，虽然金属热电阻的阻值也会随压力的变化而变化，但变化非常微弱，可以忽略。

2. 创造条件，使能干扰测量结果的被测介质其他性质保持不变或加其他补偿。

3．将被测介质的其他性质对测量系统读数的影响关系用理论方法或实验方法确定下来，然后对测得的读数加上修正值。

从上述可以看出，测量系统的感受件不会是完美无缺的，它们都有一定的使用条件，如果不加以注意，就可能得到错误的测量结果。

二、测量系统的传送件

最简单的传送件是单纯起"传达"作用的，例如热电偶与毫伏计之间的导线。这种简单的传送件，一般只有在感受件发出的讯号较强和感受件与显示件之间的距离不大时才能应用。当感受件与显示件之间的距离较大或感受件发出的讯号较弱时，往往需要将感受件发出的讯号加以放大，甚至要求改变讯号的性质，以便远距离传送读数。

测量系统的放大件有两类：一类是感受件发出的讯号较强，放大时不需外加能量，它只利用一些简单的传动机构来加以适当放大，使之易于观测；另一类是需要外加能量的，这在电测仪表中见得较多。例如用电子电位差计测量热电偶的热电势时，有时就要将热电势放大若干倍。这一类放大，在热工测量系统中，一般是利用相应的晶体管电路来完成的。

为便于传送和放大讯号，特别是感受件发出的讯号较弱或感受件与显示件之间的距离远时，通常需要将感受件发出讯号的性质加以改变。最方便和最常用的是将感受件发出的讯号转换成电量。因为这样可以一律用电测仪表来测量；一律用晶体管电路来将讯号放大；一律用电能来供给放大时所需的外加能量等等。

三、测量系统的显示件

感受件发出的讯号，是通过显示件向观测者反映出被测参数在本质上和数量上的变化。测量系统的显示件可以是一台完整的仪表，也可以是最简单的指示件，如指针、标尺等。

最后顺便指出，一台完整的测量仪表同样亦具有上述三个主要作用元件。实际上，它也是一个测量某种物理量的测量系统。

§1-2 测量方法

测量的方法很多，按如何得到测量结果来分类，可分为直接测量和间接测量。

凡由实验数据直接得出测量结果的测量方法称为直接测量。例如用尺量长度，用水银温度计量温度等。

凡是基于直接测量得出数据，再按它们与被测量间的函数关系，通过计算才能求得测量结果的测量方法称为间接测量。例如功率的测量，它是从扭矩和转速的直接测量结果，再通过计算而得到的。

在间接测量中，测量结果 y 与直接测量值 x_i 之间的关系式为

$$y=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

在直接测量中，常用的测量方法有：

1．直读法 用度量标准直接比较或由仪表直接读出，例如用压力计测量压力。

2．差值法 用仪表直接测出二量之差值，此差值即为所测的量。例如用热电偶测量温差。此法较用直读法先求出两量后再求差的方法准确些，特别是当差值比原二量之值小得多时。

3．代替法 用已知量代替被测量，当两者对仪表的影响相同时，则已知量即等于被测量。

例如用光学高温计测量高温。

4. 零值法 使被测量对仪表的影响被同类的已知量相抵消，此已知量即等于被测量。用天秤称重量是典型的零值法。此法的准确度最高，但较费时。

除上述分类法外，也可以把测量方法分为实验室用的和工程上用的两种。在实验室用的测量中，需要考虑到测量结果的准确度，也就是说，应该知道测量值的误差大小和可靠程度，一般需要作多次重复的测量。在工程的测量中，只要误差不超过预先规定的范围，一般只作单次测量。

对测量仪表，亦可以分为两大类：

1. 范型仪表 凡是准备用以复制和保持测量单位，或是用来进行各种测量仪表校验和刻度工作的仪表。这类仪表的准确度最高。

2. 实用仪表 供实际测量目的用的仪表。它又分为：

(1) 实验室用仪表 这类仪表，在运用时要考虑到测量准确度，也就是说，对这类仪表需要供给关于它们读数的校正曲线或校正值表。使用时，一些对测量结果有影响的因素（如温度、压力、磁场等）都要加以考虑。

(2) 工程用仪表 它的准确度是预先根据它们的制造和使用条件定出，对它们并不供给任何校正资料。对这类仪表的要求是作用迅速而简单。其测量结果在工程上被认为是准确的。

§1-3 仪表读数的准确度

由测试仪表的组成可知，从测量对象的原始变化到最后读数，要经过许多元件的作用，这就可能产生仪表的读数与真实情况不一致，而造成仪表读数的“误差”。由于被测对象的真实情况都要用仪表来测量，而仪表的读数不可避免地会有误差，因此被测对象的真实值是不知道的，只能就目前科学技术水平所及，用目前认为最可靠的测量仪表和测量方法作为标准。在计量工作中，仪表的检验或检定，通常是把两具仪表对同一对象进行测量，被检仪表的读数与作为标准仪表的读数差别，即认为是被检仪表的误差。如被检仪表的读数为 a，标准仪表的读数为 A，则在对象为 A 时仪表的读数误差为：

$$\text{绝对误差 } \varDelta = |a - A|$$

$$\text{相对误差 } \delta = \frac{a - A}{A} \times 100\%$$

在某一标准值时，仪表的读数误差可能是正值，也可能是负值，且各点的读数误差也不一定相同。在量程范围内，仪表各点的读数误差的最大值称为仪表的绝对误差。它不能用来判断仪表的质量。因为如果两只仪表的绝对误差相同，但它们的量程不同，显然，量程大的那只仪表相对来说就具有较高的准确度。所以判断仪表的质量，常不用仪表的绝对误差，而用仪表的折合误差。所谓仪表的折合误差，就是将仪表的绝对误差折合成该仪表量程的百分数，即

$$\text{仪表的折合误差 } \delta_A = \frac{\varDelta_A}{A_0} \times 100\%$$

式中 $\varDelta_A$——仪表的绝对误差；

A_0——仪表的量程。它为仪表标尺最大值与标尺最小值之差值。

通常说的仪表精确度和等级数，就是指仪表进行测量时所允许的最大折合误差。即

$$精确度\ \delta_a=\frac{[\varDelta_A]}{A_0}\times 100\%$$

例：某水银温度计的标尺为 $-50°\sim 150℃$，所允许的最大绝对误差 $[\varDelta_A]=\pm 3℃$。试求该温度计的精确度。

解：仪表的精确度为

$$\delta_a=\frac{[\varDelta_A]}{A_0}=\frac{\pm 3}{150-(-50)}\times 100\%=\pm 1.5\%$$

故此温度计的精确度为 1.5 级，用 1.5 表示。

我国常用仪表的精确度等级有：

I 级标准仪表：0.005；0.02；0.05

II 级标准仪表：0.1；0.2；0.3；0.5

一般工业用仪表：1.0；1.5；2.5；4.0

仪表的精确度越高，其误差越小，但仪表的造价越高。因此，在满足使用的条件下，应尽可能选用精确度等级低的仪表。

允许的仪表最大绝对误差(亦称仪表的基本误差)，是指仪表出厂时，制造厂保证该仪表在正常工作条件下的最大误差。正常工作条件，通常是指仪表周围环境温度为 20℃，在某些情况下，还附加有大气压力、电源电压、电源频率或其他要求等条件。如果仪表不在制造厂所规定的工作条件下工作，则会由于外界条件的影响而产生额外误差，仪表的基本误差就不能保证了。

应当指出，仪表的精确度等级只能说明该仪表标尺上各点的可能最大绝对误差，它不能说明在标尺上各点的实际读数误差。

对于实验室用仪表，为了得到更可靠的测量结果，可以通过仪表的校验将仪表标尺上各点的实际误差测出，然后在使用时对该仪表的读数引入一个修正值。

对工业用仪表，一般只规定一个允许误差，同时规定定期校验的时间间隔，只要仪表标尺上各点的读数误差均在仪表的允许误差范围内，就不必再加其他修正。

评定仪表品质的指标，除仪表精确度等级外，还有仪表的灵敏度和恒定性。

仪表的灵敏度，是指仪表指示机构的位移与引起此位移的被测参数变化量的比值。即

$$灵敏度=\frac{仪表指示机构的位移}{被测参数的变化量}$$

仪表应有足够的灵敏度，否则被测参数的变化就反映不出来。

仪表的恒定性，是表示在相同的外界条件下，仪表工作的稳定程度。它通常用“变差”来衡量。在外界条件不变的情况下，一个仪表对同一被测参数进行反复的测量，当指针从不同的方向接近被测参数值时，其读数可能不同，它们之间的最大差值称为变差(通常以量程的百分数表示)。显然，仪表的变差不应超过仪表的基本误差。产生变差的原因，是因为仪表内部有阻尼和传动机构中有间隙等。

在上述三个评定仪表品质的指标中，仪表的精确度等级是最重要和最基本的，选用仪表时，重要的是正确选用仪表的精确度等级。

§1-4 使用仪表时可能产生的误差

上面所讨论的误差是仪表本身的，在实际用仪表进行测量的过程中，还可能产生各种误差。测量的结果是否可靠，不仅决定于仪表本身是否准确，在很大程度上还决定于仪表的使用是否得当。因此，在实际工作中，除了要经常注意保持仪表本身的准确度外，更应该注意仪表的使用条件和使用方法。

仪表在使用过程中可能产生的误差来源，既与仪表本身的原理、结构有关，也与被测介质的具体情况、仪表的周围环境和使用人的情况等因素有关。由于牵涉的面很广，有时甚至难于估计产生测量误差的原因和大小，因此这里只就易见到的情况加以分析。

1．使用仪表时，不能满足仪表基本误差所要求的条件。因为仪表的分度和检定工作均是在实验室的条件下进行的，而现场使用的条件往往与实验室的条件不符，这就会造成误差。例如仪表工作时的温度和检定时不一致，现场有振动使仪表不能正确工作，现场的其他设备对仪表读数产生干扰（如磁场）等。因此，如果不注意仪表使用现场的情况而轻信仪表准确度的话，有时会得出错误的测量结果。

2．被测参数变化时，由于仪表的惰性而产生读数的“滞后”。因为仪表一般均具有惰性。例如机械式仪表中有质量，电测仪表中有电磁感应和电容，在讯号的传送过程中存在阻力等。所以当被测参数变化时，仪表往往不能立即反映出当时的真实值，而是落后一个时间。被测参数变化得越快，仪表瞬时读数的误差越大。当被测参数突然变化时，仪表的读数更可能发生周期性的波动，或需经过相当的时间才能得到稳定的读数。

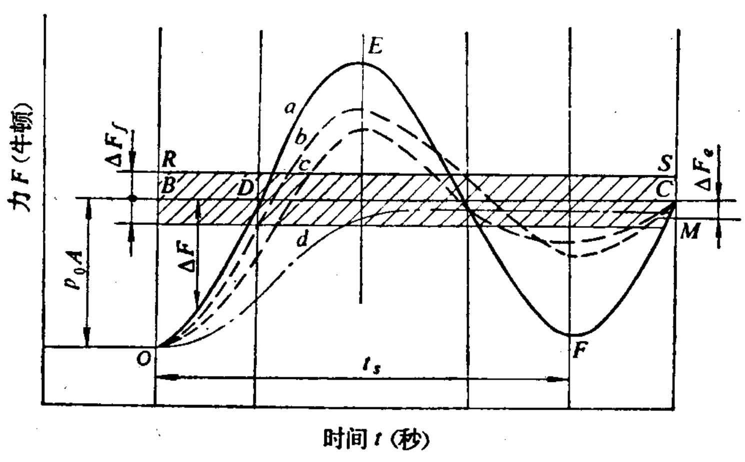


图 1-5　测量仪表的振动特性

p_0—压力　A—受压面积

在压缩机试验研究中，有许多参数（如气缸中气体的压力、温度等）是随时间变化的，故必须考虑测试仪表是如何随着被测参数变化的。现以图 1-5 所示的被测值由 O 点突然变到 B 点，然后保持不变的情况为例进行讨论。这种情况，可设想为把压力 p_0 突然加到弹簧压力计上的情况。压力计的弹簧不会马上变形，所以指示压力的指针也不会马上摆动。弹簧的变形过程可用曲线 OD 表示。图中 BC 与曲线 OD 之纵坐标差值 ΔF 就是推动压力计指针（在这里用指针来代表整个弹簧系统）位移的力。如果没有摩擦和其他吸收能量的因素，则指针达到 D 点后就按 DEF 作往复振动，这种振动就是弹簧系统的固有振动。但在实际仪表中，由于指针的移动必然消耗能量，所以指针的摆动将如曲线 b 或曲线 c 那样随时间逐渐衰减。这种作用称为阻尼。如果阻尼进一步加强，指针将如曲线 d 所示那样没有振动，只以一个方向渐近于 BC 线，此即所谓非周期性阻尼。

其次，若测量系统内有固体摩擦力时，则当位移力减小到比摩擦力 ΔF_f 还小时，指针就会在 BC 线上下 $\pm\Delta F_f$ 之间任意点上停止，这就是说，如仪表有固体摩擦力，仪表指针就只能指

示出具有一定幅度的数值。固体摩擦通常包括指针以及其他传动件的轴承和齿轮等的摩擦，它们不可能完全被消除。因此，在使用仪表时，与其等到指针完全静止后再读数，倒不如在指针多少有些摆动的状态下读出其摆动的中点刻度值更为正确些。或者在读数时，用手指轻轻叩打仪表，使其轻微振动，使静摩擦变为动摩擦，这时指针就在真值左右来回摆动，并在真值的附近停下来。

以上是被测参数突然变化时的情况，这时指针的频率对读数的影响不太大。但在被测参数随时间不断变化时，仪表的固有频率对于能否正确得出被测值对时间的变化波形则有很大影响。

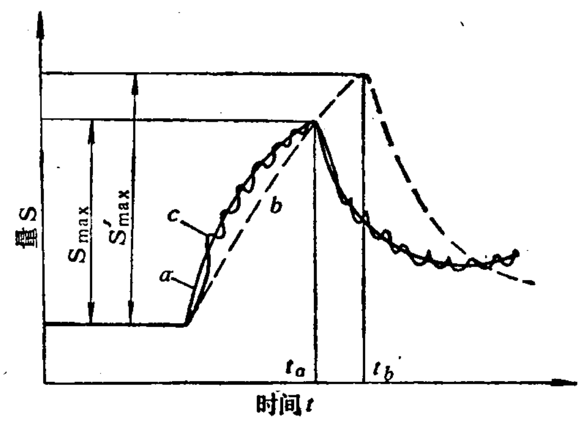


图 1-6 测量仪表的动态特性

就图 1-6 曲线 a 所示的变化现象来说，在固有频率很低的情况下，即使有阻尼，被测值 S 的最大值及变化历程有可能象曲线 b 那样完全失真。而固有频率高的仪表，即使没有阻尼，也能如曲线 c 与曲线 a 那样很好地吻合，把变化现象基本正确地表示出来。因此，对于测定随时间而变化的量来说，仪表的固有频率必须足够大。

3．由于测量点的选择不当而产生的误差。这是一个与测量仪表安装有关的重要问题。现举二例加以说明。

当测量气流的压力时，如果测量点选在气流有旋涡处，则很难测准气流的压力。

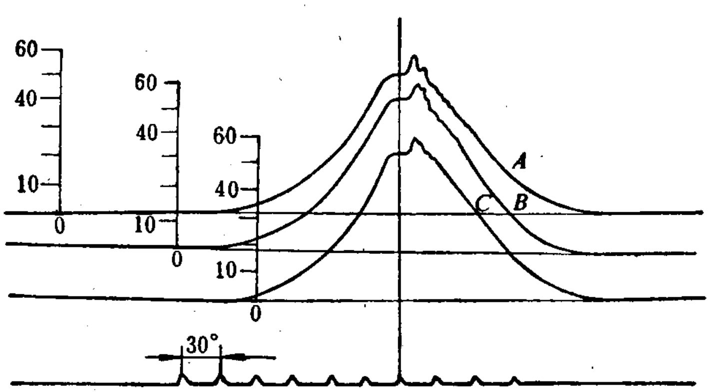


图 1-7 感压孔道对指示图的影响

图 1-7 为在同一机器上测得的指示图。曲线 C，为指示器没有通过长的感压孔传递压力的情况，而曲线 A 和 B，分别为用长 110 和 50 毫米的小孔传递气体压力时的压力变化情况，可以看出，在 A、B 的情况下，由于感压孔道内气柱的压力波动和其他因素的影响，使压力波形有某些失真。

4．测量仪表对被测对象的干扰而产生的误差。例如测量管道中高速气流的温度时，由于测温管的插入，阻挡了气体的流动而在感受件附近发生绝热压缩，因而使气体的动能转变为热能，使感受件的温度与原来气流的温度略有差别。

当然，在仪表使用过程中，还可能产生许多其他的误差来源，这些将在以后各章中结合具体的仪表和测量方法来加以分析。

从上述的分析已可以看出，要得到可靠的测量结果，除了要注意仪表的准确度外，还要特别注意研究仪表的原理和它的性能以及它的正确使用方法。

§1-5 误差理论基本知识

如上所述，在测量过程中，由于仪表本身的缺点，测量方法的不完善，周围环境条件不稳定，人的主观性等等原因，不可避免地会产生或多或少的误差，致使所测得的结果并非真实值

而是近似值。因此，对于每一次测量，只有在误差已经知道或是误差范围已经指出时方才有效。

分析和研究测量误差的目的在于：

(1) 找出测量误差产生的原因，并设法避免或减小产生误差的因素，提高测量的准确度。

(2) 通过对测量误差的分析和研究，求出测量误差的大小或其变化的规律，修正测量的结果和判断测量的可靠性。

一、测量误差的分类

测量误差概括起来可分为三类：

1．系统误差(或称规律误差)

这类误差是由于仪表的不完善，使用得不恰当，或测量方法采用了近似公式以及外界因素(如温度、电场、磁场等)等原因所引起的。这种误差是遵循一定规律变化的，或者是保持恒定不变的。这种误差有的可以用试验方法检查出来并消除掉，有的可以计算出来。

2．过失误差(或称粗差)

这类误差是由于测量错误或计算错误，或是由于疏忽大意的结果，如读错数、看错刻度等。尤其是在责任心不强、刻度不清楚、噪声大、光线昏暗等场合容易发生这类误差。因此，在记录试验数据时，必须经常进行分析比较，凡是有过失误差的数据，必须从测量值中去掉。

3．偶然误差

在测量中，如果已经消除引起系统误差的一切因素，而所测数据仍在末一位或末二位数字上有差别，就称这类误差为偶然误差。它的正负符号及大小不一定。如在测量距离时，尺段之间衔接不准确产生的误差；刻度值的尾数估读不准引起的误差等。由于偶然误差的存在，即使在同一条件下，对同一被测量进行测量，每次所得的结果也往往互不相同。虽然从每一次测量值来看，这类误差是没有规律的，但从多次测量结果来看，它却服从概率论的一定法则。因此，偶然误差可以用概率论的法则来处理。

二、误差理论基础

假定系统误差已在测量值中加入修正值校正过来，过失误差已从测量值中去掉，现在来研究偶然误差的分布规律。

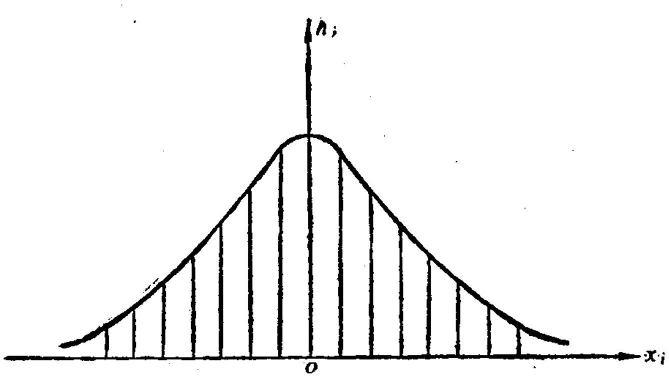


图 1-8　偶然误差分布图

如果对某一真值 A 进行多次的测量，则每次测得的数值都或多或少地与真值有一点差别。若测量很多次以后，可以发现：离开真值远的次数少，离开真值近的次数多；出现正误差的次数与出现负误差的次数几乎相等；同一误差的数值，出现正值与出现负值的次数也几乎相等。上述这些性质与总的测量次数有关，次数愈多，愈接近于对称。如果以误差 x_i 作为横坐标，x_i 出现的次数 n_i 作为纵坐标，就可以得到图 1-8 的形状。

众所周知，在一组测量中，任一误差 x_i 出现的概率，等于此误差出现次数 n_i 被总的测量次数 n 除，即误差 x_i 出现的概率为

$$\frac{n_i}{n}=\frac{n_i}{n\Delta x}\cdot\Delta x \tag{1-1}$$

此式的物理意义为：在一组测量中，测量的总次数为 n，其中某一误差 x_i 出现的次数为 n_i，则误差介于$\left(x_i+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$与$\left(x_i-\dfrac{\Delta x}{2}\right)$的范围内出现的概率为 $\dfrac{n_i}{n}=\dfrac{n_i}{n\Delta x}\cdot\Delta x$，或简称误差 x_i 出现的概率为 $\dfrac{n_i}{n}$。

设将 Δx 减小至微分量，并令

$$y=\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \tag{1-2}$$

若以 y 为纵坐标，x 为横坐标画图，当 $n\to\infty$ 时，则得误差正态分布曲线，如图 1-9 所示。

显然，任一误差 x_i 位于 x_i 与 $(x_i+\mathrm{d}x)$ 之间出现的概率为

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

式中 $y=\dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}x}$

若 $\mathrm{d}x$ 足够小，在 x_i 与 $(x_i+\mathrm{d}x)$ 之间不多于一个测量值，$y\,\mathrm{d}x$ 可称为 x_i 出现的概率。

既然 $y\,\mathrm{d}x$ 代表任一误差 x_i 位于 x_i 与 $(x_i+\mathrm{d}x)$ 之间出现的概率，若将所有 x 的可能值的 $y\,\mathrm{d}x$ 相加，必等于 1，即

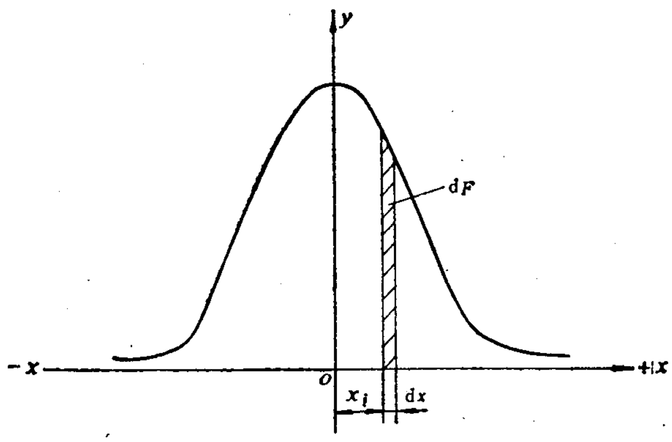


图 1-9　误差正态分布曲线

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y\,\mathrm{d}x=\sum\left(\frac{n_i}{n\Delta x}\right)\Delta x=1 \tag{1-4}$$

出现概率等于 1，表示事件的发生是确定的。

从图 1-9 可以看出：

(1) 绝对值相等的正、负误差出现的概率相等。

(2) 误差绝对值小的所出现的概率，大于误差绝对值大的所出现的概率。

(3) 极大误差出现的概率非常小，故大误差一般不会出现。

误差 x 和该误差出现的概率密度 y 的关系，如图 1-9 所示。根据最小二乘法，这一曲线的函数式为

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{1-5}$$

或

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \tag{1-6}$$

式中 y——偶然误差等于 x 的概率密度；

x——偶然误差。它等于各次测量值 a_i 与真值 A 之差，即 $x=a_i-A$；

σ——均方根误差。用下式计算

$$\sigma=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \tag{1-7}$$

n——测量的总次数；

h——精密度指数。它与 σ 的关系为

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} \tag{1-8}$$

从式 (1-5)、(1-6) 可以看出：在测量中如果 h 比较大，误差接近于零时出现的概率也较大；由于误差曲线与 x 轴所包围的面积不管 h 的大小如何都等于 1，所以精密度高的曲线，亦即 h 大的曲线与 h 小的曲线相比，误差曲线下降要快一些。图 1-10 示出不同 h (或 σ) 值的误差曲线。

如前所述，误差曲线下的微元面积 $\mathrm{d}F=y\,\mathrm{d}x$(见图 1-9)，即为误差 x 在 x_i 与$(x_i+\mathrm{d}x)$之间出现的概率。当误差为 $\pm\sigma$ 时，其出现的概率为

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} y\mathrm{d}x=\int_{-\sigma}^{+\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\mathrm{d}x=0.683$$

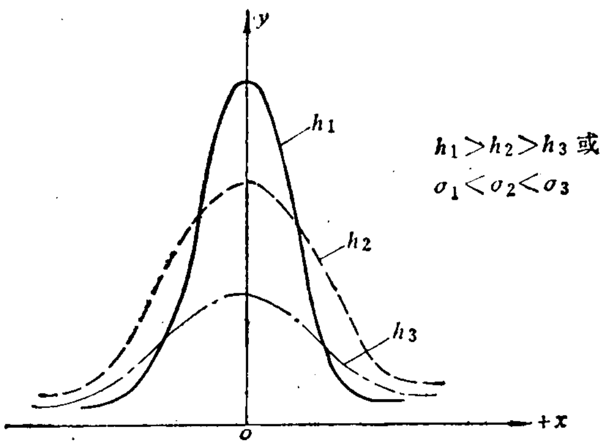


图 1-10　不同 h(或 σ) 值的误差曲线

即误差介于 $\pm\sigma$ 范围内出现的概率为 68.3%；同理，误差介于 $\pm2\sigma$ 范围内出现的概率为 95.4%；误差介于 $\pm3\sigma$ 范围内出现的概率为 99.7%。如果认为在有限的测量次数中（通常为 10, 15 或 20 次）某一测量值出现的概率为 0.3% 已属极小，则可认为超出 $\pm3\sigma$ 的误差，一定不属于偶然误差，而为系统误差或过失误差。这就是通常判断误差为系统误差或偶然误差的基础。

在所有测量中，无论直接测量或间接测量，最根本的目的都是为求得某一被测对象的真值，例如压力、温度、排气量等。但是，即使熟练的实验工作者用精密的仪表仔细地测量，也不可避免会有误差，不可能求得真值。因此，必须在给定条件下，找出我们所测数值与真值之间的关系，从而由一组测量值中确定一最佳值，用此最佳值代表所要测的某一物理量。根据误差分布定律，当在同一条件下对同一对象进行很多次测量以后，正负误差出现的概率相等，故将各测量值相加，加以平均时，在无系统误差和过失误差情况下，可以获得极近于真值的数值。故真值是指测量次数为无限多时求得的平均值。实际工作中，测量的次数是有限的，故用有限的测量次数求出的平均值，只能是近似真值，或称最佳值。我们称这一最佳值为平均值。常用的平均值有：算术平均值、均方根平均值、加权平均值、中位值和几何平均值等，其中算术平均值为最常用的一种。除特别说明外，本书所讲的平均值均指算术平均值。

根据最小二乘法原理，在具有同一精确度的许多测量值中，最佳值乃是能使各测量值的误差的平方和为最小的那个值。假设各次测量的结果为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 最佳值为 A, 那么

$$(a_1-A)^2+(a_2-A)^2+\cdots+(a_n-A)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i-A)^2$$

就应有一个最小的数值。若将上式对 A 取一阶偏导数，然后令其等于零可得

$$\sum_{i=1}^{n}-2(a_i-A)=0$$

或
$$(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)=0$$

故
$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\overline{A} \tag{1-9}$$

上式说明最佳值也就是算术平均值 $\overline{A}$。

上面讨论了误差分布的定律,现在再来讨论误差的计算方法及误差的表示法等问题。

1. 有限测量次数中均方根误差的计算

如前所述,在没有系统误差和过失误差的情况下,真值是测量次数为无限多时所求得的平均值。当测量次数为有限时,所得的平均值只近似于真值。因此,真值与测量值之差 x_i 同平均值与测量值之差 d_i 是不相等的。可以证明,它们之间的关系为

$$\sum d_i^2=\frac{n-1}{n}\sum x_i^2 \tag{1-10}$$

上式表明,在有限的测量次数中,自算术平均值计算的偏差平方和永远小于自真值计算的误差平方和。根据均方根误差的定义:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

式中 $\sum x_i^2$ 为测量次数无限多时误差的平方和,故当测量次数有限时,

$$\sigma=\sqrt{\frac{n\sum d_i^2}{(n-1)n}}=\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}} \tag{1-11}$$

式中 d_i——测量值与平均值 $\overline{A}$ 之差,即 $d_i=a_i-\overline{A}$;

n——测量的总次数;

x_i——测量值与真值 A 之差,即 $x_i=a_i-A$。

2. 误差的表示法

误差的表示法通常有下列四种:

(1) 范围误差 范围误差是指一组测量中的最高值与最低值之差,以此作为误差变化的范围。例如一组测量中,其最高值为 15.50,最低值为 15.45,则

$$\text{范围误差}=15.50-15.45=0.05$$

表示误差时,仅写出误差绝对值大小是不够的,它必须与所测物理量相联系。因此,有用相对误差表示的。设范围误差为 Δ,$\overline{A}$ 为所测物理量的平均值,则相对误差为

$$\delta_{\Delta}=\frac{\Delta}{\overline{A}}\times 100\%=\frac{0.05}{15.475}\times 100\%=0.32\%$$

范围误差的最大缺点是 δ_{Δ} 只取决于两极端值,而与测量次数无关。因此,它不能将偶然误差与测量次数有关这一事实显明地表示出来。

(2) 算术平均误差 算术平均误差是表示误差的较好的方法,其定义为

$$\delta=\frac{\sum|d_i|}{n},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

式中 n 为测量次数,d_i 为测量值与平均值的偏差。

算术平均误差的缺点,是无法表示出各次测量间彼此符合的情况。因为在一组测量中,在偏差彼此接近的情况下与另一组测量中偏差有大中小三种的情况下,所得的平均值可能相同。

(3) 均方根误差 均方根误差不仅是一组测量中各个测量值的函数,而且对一组测量中的较大误差或较小误差感觉比较灵敏,故均方根误差为表示精确度的较好方法。近代科学技术上已广为采用。

(4) 或然误差 或然误差常用符号 γ 表示。它的意义为:在一组测量中,若不计正负号,误差大于 γ 的测量值与误差小于 γ 的测量值将各占总测量次数的 50%。γ 与均方根误差 σ 的

关系为

$$\gamma = 0.6745\sigma \tag{1-12}$$

3．统计上允许的合理误差范围

根据误差分布定律，大误差出现的概率是极小的，小误差出现的概率是很大的。因此，目前一般选择 2σ（或 3γ）至 3σ（或 4.5γ）作为合理误差范围或统计上允许的最大误差。凡测量值的误差大于此范围时，可以说此误差不属于偶然误。此时应当引起注意，并找寻其原因。一般原因可能如下：

(1) 各次测量的物理量可能不是同一物理量，而测量者认为是相同的。

(2) 测量过程中，测量条件已发生变化，而测量者仍未觉察到。

(3) 测量过程中，由于条件稍有变化，使原来不起作用的因素变成起作用的重要因素，因而影响到所测物理量的数值。

(4) 测量中有过失误差等。

4．可疑测量值的舍弃

在一组实验中，通常很容易发现某一测量值与其余测量值相差很大。如果保留这一测量值，则对平均值及或然误差都将引起很大影响。初学者往往随便舍弃这一数值，企图获得测量结果的一致性，这显然是片面的或不对的。一个实验工作者在其实验过程中，只有当他有充分的理由后，如充分证明是读数错误或仪表出了偶然的毛病等后，他才能舍弃这一坏数值。如果没有充分理由，只有根据误差理论决定取舍才是正确的。其方法如下：

(1) 求出算术平均值以及或然误差。计算时，可疑测量值均应包括在内。

(2) 算出可疑的较大偏差与或然误差的比值。

(3) 根据测量次数 n，由表 1-1 查出 d/γ 值。若(2)算得的 d/γ 值大于表 1-1 的数值，则可疑测量值可以舍弃。

表 1-1　不同测量次数 n 的 d/γ 值

n	d/γ	n	d/γ
5	2.5	20	3.3
10	2.9	50	3.8
15	3.2	100	4.2

例　下表为用铂铑-铂热电偶温度计测量温度时所测得的热电势数据，试决定可疑测量值 1.83 的取舍。

解：

(1) 求算术平均值得：

$$\overline{A} = 1.564$$

(2) 求取或然误差 γ。

由式(1-11)和式(1-12)得：

$$\gamma = 0.6745\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}} = 0.6745\sqrt{\frac{0.12024}{9}} = 0.078$$

比值 $\dfrac{d}{\gamma} = \dfrac{0.266}{0.078} = 3.4$

由表 1-1，当 $n=10$ 时，$\dfrac{d}{\gamma} = 2.9$。因 $3.4 > 2.9$，故可疑测量值 1.83 应弃去。

热电势(毫伏)	d	d^2
1.52	0.044	0.001936
1.46	0.104	0.010816
1.61	0.046	0.002116
1.54	0.024	0.000576
1.55	0.014	0.000196
1.49	0.074	0.005476
1.68	0.116	0.013456
1.46	0.104	0.010816
*1.83	0.266	0.070756
1.50	0.064	0.004096

$\sum d_i^2 = 0.120240$

上面方法是作为初学者的一个指导，以防止随便弃掉一个测量数据是有好处的。对于有经验的工作者来说，当他发现一个偏差很大时，如果这一偏差值确属偶然误差，则继续多次重复测量，一定会有与此符号相反的偏差出现。

5．算术平均值的误差

如前所述，在一组精确度相同的测量中，算术平均值为其最佳值。很显然，如果知道算术平均值本身的误差，从而在若干组平均值中，知道任一平均值与总平均值相差某一数值所出现的概率大小，同样是很重要的。

若将平均值 $\overline{A}$ 作为一个测量值，并进行一组、一组的很多组测量，每组的平均值也符合正态分布的规律，当测量的组数很多时，各组平均值的总平均仍然是极近于真值，同时分布情况也可以用平均值的均方根误差 $\sigma_{\overline{A}}$ 来衡量。只要将 $\overline{A}$ 及 $\sigma_{\overline{A}}$ 代替前面所述的 x 及 σ 的地位，一切误差与概率之间的关系都是一样的。可以证明，算术平均值的均方根误差 $\sigma_{\overline{A}}$ 与测量值的均方根误差 σ 之间的关系为

$$\sigma_{\overline{A}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{1-13}$$

将上式两边同乘以 0.6745，得算术平均值的或然误差与测量值的或然误差之间的关系为

$$\gamma_{\overline{A}} = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \tag{1-14}$$

平均值误差与测量次数的关系如图 1-11 所示。从图可以看出，当 $n>10$ 时，$\gamma_{\overline{A}}$ 随 n 的变化已不很明显；$n \geq 20$ 时变化更慢。因此，在一般的测量中，取 $n=10$ 或 12 就可以了。

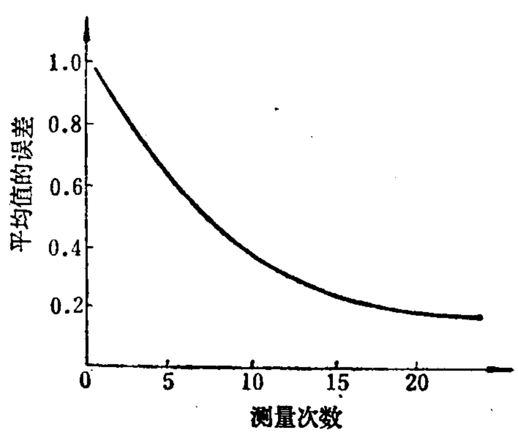


图 1-11　平均值误差与测量次数的关系

三、实验结果精确度的表示法

测量的精确度，可用绝对误差表示，亦可用相对误差表示。用绝对误差表示时，因所用误差的表示方法不同，可分为：

1．测量值的均方根误差

$$\overline{A} \pm \sigma, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}$$

2．平均值的均方根误差