

概 率
基 础 知 识
及 其 应 用

Gailü
Jichu Zhishi
Jiqi Yingyong

概率基础知识及其应用

上海市第一商业局教育处 主编
上海市教育局职业技术教育处

上海科技教育出版社

概率基础知识及其应用

上海市第一商业局教育处 主编
上海市教育局职业技术教育处

上海科技教育出版社出版

(上海冠生园路 303 号)

新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 737×1092 1/32 印张 6.25 字数 139,000

1988 年 6 月第 1 版 1988 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—5,400

ISBN 7-5428-0021-3

G·22

定价: 1.55 元

前 言

随着我国经济体制改革的深化,进一步实行对外开放,对内搞活经济,流通领域也必须逐步扩大。商业是流通领域中最重要一环,“无商不活”,要搞活经济,必须发展商业,要使上海的金融、贸易做到消息灵,渠道畅,经营活,服务好,效益高,并发挥其沟通城乡、连结内外的流通中心的作用,就必须有一套与之匹配的强大的、完整的商业网络和一批具有现代商业经营知识、经营技能的专门人才。

李鹏同志在视察上海市商业职业技术学校时指出:“开展职业教育,为人民服务,为商业育人育才。”我们培育的商业人才必须掌握从事现代化商业必备的基础知识,并具有善于把知识运用于实际工作中的能力,还要求具有良好的职业道德。这就要求我们在形成一支训练有素的师资队伍,完善学校的专业教学设施的同时,进行教材的编写,更是当务之急。

这次我们组织商业战线的教育工作者和专家撰写了商业经济基础知识、商业信息、商业法规、商业职业道德规范、商品学、商业会计、统计、商业仓储、商业物价、售货艺术、商品产销与运输、公共关系以及广告艺术、书法、应用文等商业专业教材。教材内容针对学生特点,教材的安排加强实践的环节,文字表达上也力求深入浅出,简明扼要。无疑,这套教材的出版必定有利于商业职业技术教育质量的提高。希望它能为兄弟省市商业职业教育带来方便。

在此,我们对撰写教材的专家和教育工作者表示谢意。由

于商业职业技术教育起步较迟,缺乏经验,编写中难免有不成熟的地方,欢迎有识之士批评指教,为发展商业、搞好教育而共同努力。

上海第一商业局副局长 由月东

上海教育局副局长 凌同光

本书由虞介夫、谭镇祥、李志丰编写,虞介夫执笔,沈鹤九审核。

目 录

前言	1
第一章 随机现象与事件	1
§ 1-1 两种现象	1
§ 1-2 随机事件 必然事件 不可能事件	3
§ 1-3 事件间的关系	5
§ 1-4 基本事件	18
第二章 概率及其性质和求法	22
§ 2-1 概率及其性质	22
§ 2-2 古典概型	25
§ 2-3 逆事件的概率	32
§ 2-4 概率的乘法公式	35
§ 2-5 概率的加法公式	43
§ 2-6 全概率公式与贝叶斯公式	52
§ 2-7 n 次独立试验概型(或贝努里概型)	59
第三章 随机变量	65
§ 3-1 离散型随机变量	65
§ 3-2 离散型随机变量的分布列与性质	67
§ 3-3 离散型随机变量的几种分布	71
§ 3-4 离散型随机变量的概率分布函数	79
§ 3-5 离散型随机变量的特征数——数学期望和 方差	82
§ 3-6 连续型随机变量与频率直方图	94

第四章 应用举例	99
§ 4-1 市场预测	99
§ 4-2 市场决策	124
§ 4-3 产品检验	125
复习题	144
附录	149
附录 I 排列组合基本知识	149
附录 II 公式推导	166
1. 一元线性回归系数计算公式	166
2. 二元线性回归系数计算公式	168
3. 相关系数	171
4. 复相关系数	175
5. 总体均方差的无偏估计量	177
6. 剩余均方差	178
7. 三 σ 规律	181
附表 1 阶乘表	184
附表 2 普阿松分布表	185
附表 3 标准正态分布表	187
附表 4 t 分布表	189
附表 5 χ^2 分布表	190
附表 6 相关系数检验表	192
附表 7 标准型抽样检验方案表	193

第一章 随机现象与事件

概率论被广泛应用于社会科学、自然科学各领域以及国民经济的各部门。如应用于对变幻莫测的气象作出预报；对潜伏的病虫害灾害作出预报；对繁复多变的市场进行预测、决策；对产品进行质量管理等等。

§ 1-1 两 种 现 象

在自然界中有两种现象：一种是确定性现象（或称必然现象），一种是随机现象（或称偶然现象）。

纯水在一个标准大气压下，加热到 100°C 时，水必然会沸腾；导线通电后，导线必然会发热。这种水、导线在上述条件下必然产生沸腾、发热的结果是确定不变的。这些现象具有这样的特点：在一定条件下，必然会发生某一种结果，这种现象称为确定性现象（或称必然现象）。

如果把硬币的某一面规定为“正面”，另一面为“反面”。在桌上随意掷一枚硬币，那末就有“正面向上”或“反面向上”两种可能性。在投掷前无法事先确定“正面向上”或“反面向上”，只知道有两种可能发生的结果，而每种结果的发生是偶然的，或称为随机的。

在一批商品中随意抽查 5 件，这 5 件商品中次品的件数可能是 0 件（即没有次品），也可能是 1、2、3、4 或 5 件，共有 6 种可能发生的结果，其结果事先不能确知，每种结果的发

生也是偶然的(或称随机的)。

某战士打靶,射击一发子弹可能发生的结果有不命中、命中1环、2环、……、10环,共有11种可能发生的结果,在射击前是不可能确定发生哪一种结果,其结果的发生也是带有偶然性或随机性的。

上述这些现象都具有这样的特点:在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,这种不能预先断言出现哪种结果的现象,称为随机现象(或称偶然现象)。

对确定性现象的结果进行研究的学科有很多,如物理、化学、数学等。研究的现象有导体通电、电解水、两个三角形的相似等。这些现象确定的结果分别是导体内的电流强度与导体两端的电压成正比,与导体的电阻成反比;产生氧气和氢气;两个三角形相似,对应边成比例。

而随机现象的结果带有偶然性,不如确定性现象的结果那样具有必然性,那末如何研究其结果呢?

事实上,对随机现象进行一次试验(或观察),确实不能事先确定发生哪一种可能发生的结果。但是对该随机现象在同样的条件下进行大量重复的试验或观察,并对所发生的结果进行分析,就会发现每一种可能发生的结果具有一种确定的规律。

把一枚厚薄均匀的硬币投掷一次,不能事先确定其结果是“正面向上”还是“反面向上”。如果对同一硬币重复投掷多次,把“正面向上”与“反面向上”的次数记录下来,就会发现正、反面向上的次数各占投掷总次数的二分之一左右。

对同一批商品进行大量重复抽查,并对抽查结果进行统计分析,可以确定其“次品率”。

某战士在同样条件下,对靶进行大量射击,对射击的结果

进行统计分析,可确定他的“命中率”.

对随机现象进行大量重复试验(或观察)的结果进行统计和分析,可见各种结果是具有确定的规律性的. 这就是统计规律性. 它呈现了随机现象的必然性.

所以随机现象具有两个特点:

(1) 偶然性: 在一次试验(或观察)前, 不能预言发生哪一种结果.

(2) 必然性: 在相同的条件下, 进行大量重复的试验(或观察), 随机现象的结果呈现统计规律性.

概率论就是应用数学的方法研究随机现象统计规律的一个数学分支.

习 题 1-1

1. 什么叫做确定性现象? 试举一例.
2. 什么叫做随机现象? 试举一例.
3. 随机现象具有哪两个特点?
4. 什么叫做统计规律性?
5. 概率论是一门什么学科?

§ 1-2 随机事件 必然事件 不可能事件

概率论是研究随机现象结果的统计规律性的学科. 在一定条件下对随机现象进行试验(或观察)的每一个可能的结果, 称为随机事件, 简称事件. 对不同的事件通常用不同的符号 A 、 B 、 C 、 $\dots$ 等来表示.

如, 向桌上投掷一枚硬币作为一次试验(或观察). 条件是向桌上投掷一枚硬币, 在此条件下有两种事件可能发生, “正面向上”或“反面向上”, 可分别用 A 和 B 表示这两种事

件. 表示方法为 A : “正面向上”, B : “反面向上”.

在一批可能含有次品的商品中抽查 5 件进行检验, 这也是作为一次试验(或观察). 条件是在一批商品中抽查 5 件, 在 5 件商品中可能发生的事件有 0 件次品、1 件次品、2 件次品、3 件次品、4 件次品和 5 件次品, 可分别用 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 来表示这 6 个事件. A : “有 0 件次品”, B : “有 1 件次品”, ……., F : “有 5 件次品”.

某战士对靶射击一次也是一次试验(或观察). 条件是某战士对靶射击一次, 从命中与否来看, 有两个事件. 可用 A : “未命中”, B : “命中”表示. 如果还需了解命中情况, 可用 A : “未命中”, B_1 : “命中 1 环”, B_2 : “命中 2 环”, ……., B_{10} : “命中 10 环”, 表示各事件.

在每次试验(或观察)中, 某一事件一定发生, 这样的事件称为必然事件, 用 Ω 表示; 反之, 在每次试验(或观察)中某一事件一定不发生, 这样的事件称为不可能事件, 用 $\emptyset$ 表示.

如对纯水在 1 个标准大气压下加热到 100°C , 进行一次试验(或观察). 条件是对纯水在 1 个标准大气压下加热到 100°C , 结果是水必然沸腾. 这种必然发生的结果就是必然事件, 用 Ω 表示“纯水在 1 个标准大气压下加热到 100°C 时水沸腾”. 在上述条件下不可能产生水结冰的结果, “水结冰”的事件就是不可能事件, 用 $\emptyset$ 表示“纯水在 1 个标准大气压下加热到 100°C 时水结冰”.

现举例说明下列现象的事件分别是什么事件? 用相应的符号正确表达并指出其条件.

例 1 在一批商品中抽出一件商品既是正品又是次品.

解: $\emptyset$: “抽出一件商品既是正品又是次品”.

条件: “在一批商品中抽出一件商品”.

例 2 投掷一次骰子, 向上的一面为 6 点.

解: A : “向上一面为 6 点”.

条件: “投掷一次骰子, 观察向上一面”.

例 3 在自然数中任取两个数相乘, 积为偶数.

解: B : “积为偶数”.

条件: “在自然数中任取两数相乘, 观察其积”.

例 4 某战士对靶射击一发子弹, 同时命中 6 环和 9 环.

解: $\emptyset$: “同时命中 6 环和 9 环”.

条件: “某战士对靶射击一发子弹”.

习 题 1-2

1. 指出下列各事件中哪些是必然事件? 哪些是不可能事件? 哪些是随机事件?

- (1) 用手上抛一个物体, 经过一段时间, 该物体下落.
- (2) 从混有次品的一批货物内抽取一件货物恰为次品.
- (3) 从一副扑克牌中任意地抽取一张是黑桃.
- (4) 没有水份, 水稻种子会发芽.
- (5) 从一批一级品的货物里抽取一件货物是合格品.
- (6) 明天下雨.
- (7) 水池里的水在 25°C 时结冰.
- (8) 购买奖券中奖.
- (9) 任意取两个相邻的自然数, 其积为偶数.
- (10) 顾客上柜, 营业员主动招呼, 经营成交.

2. 试举一些必然事件、不可能事件和随机事件的例子, 并指出其条件.

§ 1-3 事件间的关系

在研究随机事件的统计规律性时, 常遇到复杂的事件, 而

复杂的事件常和数个事件有关，所以必须掌握这些事件间的关系。

一、六种基本关系

1. 包含关系

某学校组织一个课外射击小组，报名参加的学生很多，需通过一定的测试，测试合格者才被准许加入。规定一次试射能命中 6 环以上，作为测试合格。某学生一次试射命中 8 环（即已发生命中 6 环以上）作为测试合格被吸收为小组成员。

设 A : “命中 8 环”；

B : “命中 6 环以上”（合格）。

可见，事件 A 发生导致事件 B 必然发生。

“事件 A 发生导致事件 B 必然发生”，这一事件称为事件 B 包含事件 A ，记作 $B \supset A$ ；或称为事件 A 包含于事件 B ，记作 $A \subset B$ 。

事件之间的关系通常用图示法直观地表示。必然事件 Ω 通常画成一个方块，方块内各图形分别表示各个事件，对随机现象的每一次试验（或观察）所发生的随机事件，可视作一个点随机地落入相应事件的图形内，也就是说发生该图形所表示的事件（见图 1-1）。

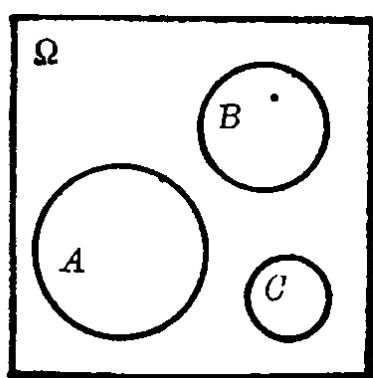


图 1-1

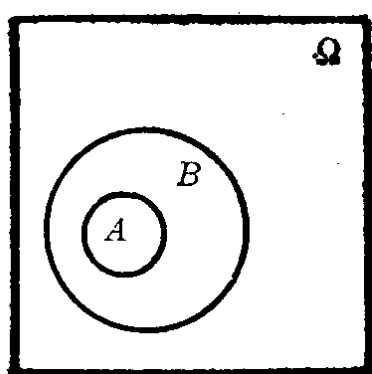


图 1-2

$B \supset A$ 的图示法见图 1-2. 易见对任何事件 A , 必有 $\Omega \supset A$, 还规定 $A \supset \emptyset$, 所以 $\Omega \supset A \supset \emptyset$.

例 从一批商品中抽查一件商品, 说明一件商品是合格品和这件商品是一级品之间的关系, 用图示法表示之; 并研究图中各部分的意义.

解 设 A : “一件商品是一级品”;

B : “一件商品是合格品”.

$\therefore$ 事件 A 发生一定导致事件 B 发生,

$\therefore B \supset A$ 或 $A \subset B$.

图 1-3 中表示 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

图 1-4 中, 阴影(\\)\\)表示一级品; 阴影(/)\\/表示非一级的合格品; 阴影(\\)\\) + (/)\\/表示合格品; 方框内的空白部分表示非合格品.

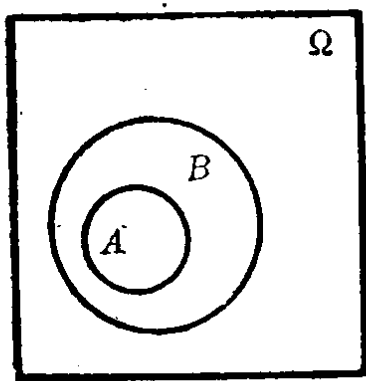


图 1-3

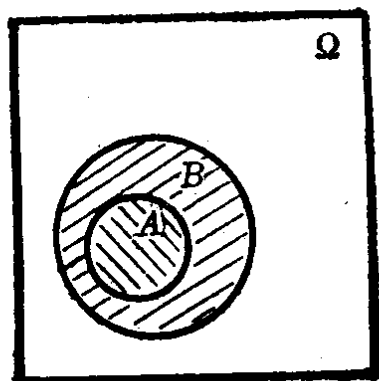


图 1-4

2. 相等关系

从 1、2、3、4、5 五个数中取出最大的一个数和从中取出一个能被 5 整除的数. 如果设

A : “取出一个最大的数”;

B : “取出一个能被 5 整除的数”.

显然 A 发生导致 B 必然发生, 即 $B \supset A$; 同时 B 发生也

导致 A 必然发生, 即 $A \supset B$.

若事件 B 包含事件 A , 同时事件 A 也包含事件 B , 称为事件 A 与事件 B 相等, 记作 $A=B$, 其图示法见图 1-5.

3. 并(或和)的关系

甲、乙两民兵向同一目标射击, 命中目标. 命中目标是射击的结果, 也就是事件, 甲命中或乙命中也都是事件.

设 A : “甲命中”;

B : “乙命中”;

O : “命中目标”.

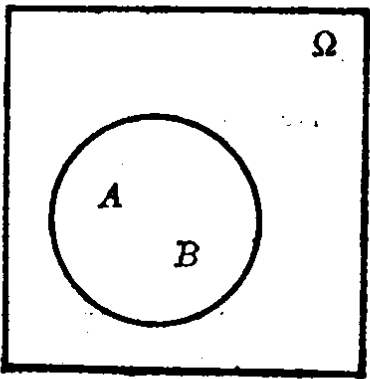


图 1-5

显然, 事件 O 发生必须是事件 A 与 B 中至少有一个发生.

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(或和), 记作 $A \cup B$, 事件并的图示法见图 1-6.

这里 $O = A \cup B$.

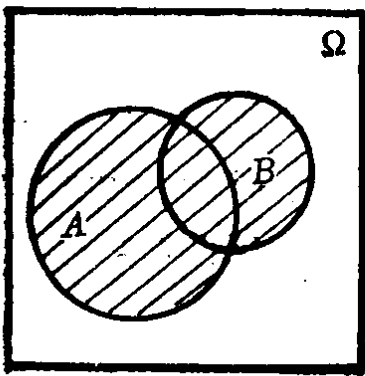


图 1-6

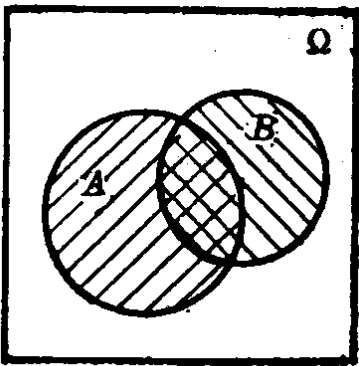


图 1-7

图 1-6 中, 阴影部分表示 $A \cup B$. 由图可知, $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$.

图 1-7 中, 阴影(\\\\\\)表示甲命中; 阴影(////)表示乙命

中; 阴影(●)表示甲、乙都命中; 方框内空白部分表示甲、乙都未命中.

例 某生产收录机的厂的厂方检验质量指标规定, 收音质量指标和录音质量指标都合格才被认可产品质量合格. 那末收录机质量不合格与收音质量指标不合格或录音质量指标不合格之间有何关系? 用图示法表示事件间的关系.

解 设 A : “收音质量指标不合格”;

B : “录音质量指标不合格”;

O : “收录机质量不合格”.

$\therefore$ 事件 O 发生必定是事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,

$$\therefore O = A \cup B.$$

图中阴影部分表示 $A \cup B$.

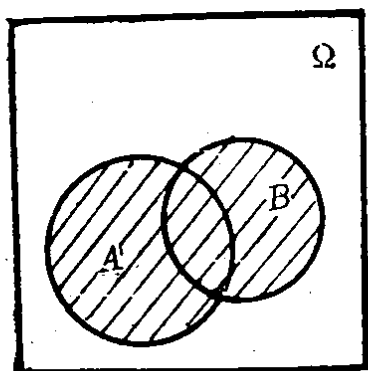


图 1-8

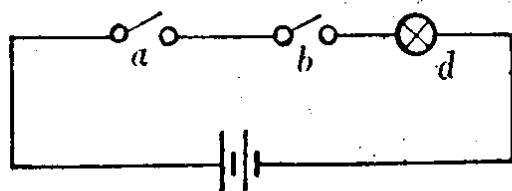


图 1-9

4. 交(或积)的关系

在图 1-9 中, 设 A : “开关 a 闭合”; B : “开关 b 闭合”; D : “灯 d 亮”.

要使事件 D 发生, 事件 A 与事件 B 必须同时发生.

“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的交(或积), 用 $A \cap B$ 或用 AB 表示, 这里 $D = AB$.

事件 A 与事件 B 的交的图示法见图 1-10，其中阴影部分表示 AB 。

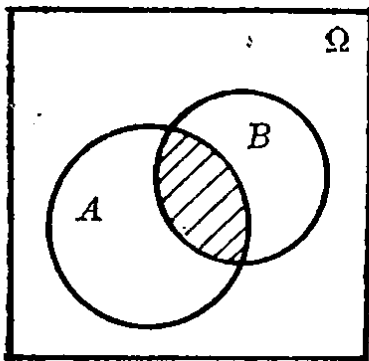


图 1-10

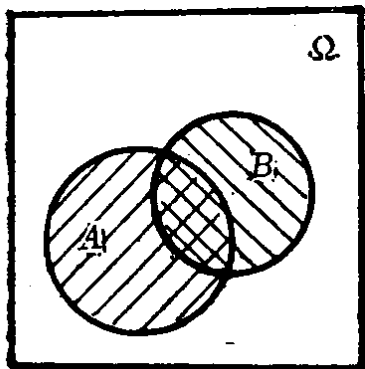


图 1-11

在图 1-11 中，阴影(/////)表示仅当开关 a 闭合；阴影(\\\\\\)表示仅当开关 b 闭合；阴影(⊗)表示开关 a 、 b 都闭合；方框内的空白部分表示开关 a 、 b 都没有闭合。

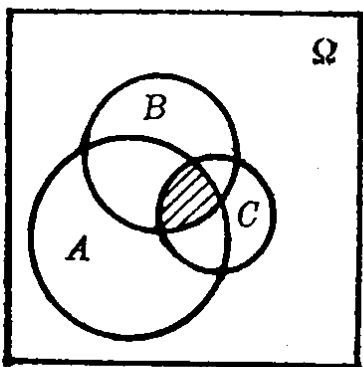


图 1-12

例 一般地使用照相机拍摄相片，须正确地调节光圈，正确地选择快门速度和正确地测定拍摄的距离。试找出它们与拍摄到清晰的相片的关系，并用图示法表示它们之间的关系。

解 设 A ：“正确地调节光圈”；
 B ：“正确地选择快门速度”；
 C ：“正确地测定拍摄的距离”；
 D ：“拍摄到清晰的相片”。

$\because$ 事件 D 的发生必须要事件 A 、 B 、 C 同时发生，
 $\therefore D = ABC$ 。

图 1-12 中的阴影部分表示 $D = ABC$ 。

5. 互不相容关系