医用模糊数学及计算机程序

张仲　李霞　编著

哈尔滨工业大学出版社

前　言

目前生物学、医药学、中医学的研究，已从定性（经验）分析进入到定量分析，数学方法在其研究中得到日趋广泛深入的应用。由于生物学、医学研究的对象大多是很复杂的系统，而且概念诸多是“模糊”的，宜用模糊数学方法处理。这样，使得模糊数学在生物、医学界引起极大的兴趣和重视。各医学院校在学时紧张的情况下，相继对本科生、研究生开设了“医用模糊数学”的必修课或选修课。但目前极缺可供使用的适用教材，为此，我们在原编写的讲义——《模糊数学及在医药学中的应用》基础上，结合几年来利用模糊数学方法进行医学科研及对研究生、本科生、生物医学工程、卫生干部管理班及生物数学教师研讨班的教学实践，重新编写了此教材，以解此急。

本书可作为具备微积分、概率论、线性代数基础知识的各医药、中医学院本科生、研究生的20—40学时的医用模糊数学教材，同时也可作为研究生、医师、医学院校教师及计算机、生物工程等专业科研人员的数学方法参考书或者作为模糊数学的入门学习书。

编写过程中，我们力图以介绍应用方法为主，紧密地结合医学应用，介绍模糊数学的基本思想和基本概念。对于书中有*号的节、段，在第一次阅读时可以跳过，授课时也可以不讲，这并不影响系统的一贯性。这些内容可作为提高、自学或应用时的资料。第七章介绍了我们在实际工作中使用过的计算机程序，供读者在应用中参考。

本书的第一、二、三、五、六章由张仲执笔，第四、七章由李霞执笔，最后由张仲对全书统一定稿。

编者衷心感谢刘骥教授在百忙中逐例、逐字地审阅了全书内容，提出诸多的修改意见和建议，编者也正是在刘骥老师的指导下，走上数学与医学结合的道路，实为编者良师。同时哈尔滨医科大学教务处、基础部及教材科刘伟老师为本书的顺利出版提供了大量的帮助，张弘怡为本书精心绘制了插图，对此，编者一并表示谢意。

限于编者水平，加之时间仓促，本书难免存在缺点和错误，欢迎读者批评指正。

作　者

1991年12月　哈医大

目　录

绪　论

一、模糊数学——一门新兴的学科

模糊数学是数学分支一门年轻的学科。从1965年美国加里福尼亚贝克利大学控制论专家查德（L.A.Zaden）教授创立模糊数学开始，距今只有20余年。廿多年来，由于它在应用上的显著成果，引起了数学及应用学科工作者的广泛兴趣，他们的工作使该学科日趋完善和成熟。

模糊数学是从量的角度研究和处理模糊现象的科学。所谓模糊性是指客观事物的差异在中介过渡时所呈现的划分上的"亦此亦彼"性。这种性质在客观世界上是大量存在的。如，"健康"与"患病"，"治愈"与"无效"，"秀发"与"秃子"等等。这些概念，从差异的一方到另一方，找不到明确的分界，中间经历了一个从量变到质变的连续过渡的过程，这种现象叫做差异的中介过渡。由这种中介过渡引起的划分上的"亦此亦彼"性，就是模糊性。

当代科学的发展，各门科学迫切地要求数量化和精确化。但是，科学的深化意味着研究对象的复杂化，复杂的对象又难于精确化，这种复杂性与精确性的尖锐对立，是当代科学发展中的一个基本矛盾。电子计算机的产生在一定程度上解决着这个矛盾，然而正是电子计算机的广泛应用，使这个矛盾更加激化，一方面是严密的程序要求高度的精确，另一方面，机器所执行的任务更加复杂。查德在实践中总结出这样一条事实："当一个系统复杂性增大时，我们使它的精

确性能力将减少。在达到一个阈值之上时，复杂性和精确性将相互排斥”——即大系统的“不相容原理”。因此，要解决这一基本矛盾，用传统的数学方法远不能得到满足，需要寻求一种新的数学工具。这就是模糊数学产生的历史背景。

我们知道，一个概念具有内涵和外延。内涵是指它的本质属性，而外延就是一个集合。传统的数学判断一个对象是否符合某一概念，就是看它是否属于这一概念的外延（集合），它要求在属于与不属于之间，二者必居其一，且仅居其一，二者绝不能模棱两可。这样，作为近代数学基础的集合论，只能表现“非此即彼”的概念，这种有明确外延的概念，通常称为确切的概念。由于事物本身大都存在一定的模糊性，因而在使用传统的数学解决一些问题之后，回到实践时，就存在一定的差距。例如，按年龄来讨论一个人是否为“年轻人”时，通常是预先规定一个年限，假如是25岁，说25岁以下为年轻人，这时若截然地把一个25岁与25岁刚过一天的人区分开，一个为年轻人，一个不是年轻人，这显然不符合实际情况。因此，需要打破传统的集合论观点，使它更接近人的认识实际。查德正是从这一点上提出了模糊集合论，即对没有明确外延的概念——模糊概念，用隶属程度来描述差异的中介过渡，从而创立了模糊数学。

模糊数学不是让数学变成模模糊糊的东西，而是让数学进入模糊现象这个禁区，即是用精确的数学语言对模糊性的一种描述。例如，众所周知，一根头发没有的是秃子，有一根头发的人也是秃子，有两根的也应是秃子，因为后者比前面只多一根头发，如此下去，若有 n 根头发的人也是秃子，则有 $n+1$根头发的人也应是秃子，由此推得所有的人

都是秃子，这就是“秃子悖论”。这个问题只能用模糊数学思想去解释，即“秃子”是一个模糊概念，在秃与秀发之间，没有明确的分界，不能以头发的根数来分界。17世纪，随着物理学、力学及天文学的发展，推动了数学的发展，并取得了许多辉煌的成就，这些成就又极大地推动了科学技术的发展。从此，数学做为自然科学的皇后到处受到人们的欢迎和称赞。不过当人们试探着把传统数学引入人文科学和生物学的时候，发现工作是那么艰难。有人宣称，这些学科是数学的禁区。有人认为，它们的规律过于简单，不需要数学。随着人们认识的提高，人们已清楚地认识到，任何一门科学，如果没有数学，它将不能成为一门真正的科学。某些学科不是规律太简单，恰恰是它们的规律很复杂，而且常常伴有模糊性，必须从数量上把握它们，因而数学这个皇后，应当尽快地打开这个禁区的大门。但是传统的数学方法常常感到力不从心，它们不能表达生物种的分类、人的思维规律及语言、语法规则等一系列新问题。而模糊数学一出现，就被广泛地应用到这些学科中去，成为这些学科的有力工具。

模糊数学诞生仅廿余年，但应用的触角已伸向各个角落，医学、气象、农业、控制、图象识别、教学、管理、语言等诸方面都有许多显著的成果。即数学从“非此即彼”的研究转入“亦此亦彼”的研究，应用日趋广泛、深入，而应用的广泛也正在创造、完善新的数学——模糊数学。

二、模糊数学在医学上的应用

大约在一百年前，恩格斯在《自然辩证法》中概括当时数学在各门自然科学中的应用时曾指出：数学在生物学中的

应用“等于零”。数学是从数量的侧面来研究客观世界的一门科学，由于它的特点，不能有，也不应该有不应用数学的学科。当然，生物学、医学也不能例外。产生这种现象的原因，一方面是由于系统过于复杂，另一方面是因为现实世界中存在的现象，一种是确切的，通常用函数关系来定量描述，传统的数学解决得很好；一种是非确定的现象，诸如，“生男婴”、“掷硬币出正面”等，属于随机现象，现已用概率论和数理统计来描述。在非确切现象中，有很多象上面所指出的模糊现象，例如医学中疾病的表现：“患病”与“健康”；疗效的评价：“痊愈”、“有效”及“无效”；检验结果的描述：“阳性”与“阴性”等等，表现是很突出的，用传统的数学描述很困难或者无法做到。模糊数学的出现为解决医学中大量的这类现象提供了一个新的强有力的工具。查德在1969年发表的著名论文《模糊集和系统在生物学中的应用》率先把模糊数学与生物学联系起来。1976年模糊数学传到我国后，也是最早应用到生物、医学中。如1979年，曾用模糊方法进行癌细胞的识别，在医疗上编制了中医电子计算机诊疗程序等。现在，模糊数学方法在医学中的应用越来越广泛，并引起了广大医学工作者的关注，同时取得了很多优异的成果，各医学院校相继将模糊数学做为本科医学生和研究生的选修及必修课程。

第一章　模糊集合的概念及运算

本章从集合能表示确切概念、特征函数能表示集合入手，拓广到隶属函数能表示模糊集合和模糊概念，然后介绍模糊集合的运算，最后介绍模糊集合与普通集合的互相转换。本章内容是以后各章的基础。

§1.1　经典集合及特征函数

在提出模糊集合的概念前，需要简单回顾经典集合论的一些知识。

一个概念有其内涵和外延。**内涵**是指符合此概念的对象所具有的共同属性；而**外延**是指符合此概念的对象组成的集合，所以，可用集合表示概念。例如，从"人"的范围内挑选出18岁的男性构成一个集合A，A便是"18岁男性"这一概念的外延，即它的集合表现。

当我们考虑某个问题时，议题总离不开一定的范围。议题范围内被讨论的对象的全体称为**论域**，常以大写字母Ω、U、X等表示。论域中的每个对象称为**元素**，通常以小写字母a、b、x、y等表示。给定了一个论域U，U中某一部分元素的全体，称为U中的一个**集合**，以大写字A、B、C等表示。

一般地，给定论域U，设α为某一概念，它的外延是U的一个集合A，对于U中任一元素u，有

$$u\text{符合概念}\alpha \Leftrightarrow u\in A \tag{1.1}$$

其中符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价于"；记号"$\in$"表示"属

于”；“不属于”则用符号“$\bar{\in}$”表示。

按经典集合论的要求，元素u与集合A之间，$u\in A$或$u\bar{\in}A$，两者必居其一，且仅居其一；相应地，“u符合概念α”或“u不符合概念α”，两者必居其一，且仅居其一。我们称这种概念是**确切的**。所以，经典集合只能表现“非此即彼”的现象，即表现确切的概念。

若集合A只有有限个元素，可以表示为：

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

这是将论域中所有属于A的元素用枚举的办法写出的，表明由这些元素构成了集合A。

当集合A中的元素无法枚举时，可采用定义法表示：

$$A=\{x|A(x)\}$$

其中$A(x)$是x应满足的条件。如，$A=\{x|x^2-1=0$，且x为正数$\}$。

如果把论域U中的每一个子集合，包括空集Φ，都看作新的元素，则由子集合组成的集合称为**集合类**，即子集的集合。如，对论域$U=\{1, 2, 3\}$，它的全体子集：

Φ，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$

由这些子集合可以构成集合，如，集合

$$A=\{\Phi, \{1\}, \{1, 3\}\}$$

就是一个集合类。

论域U上的集合类的全体，称为论域U上的集合的**幂集**，记为$P(U)$。

经典集合论中曾引入映射的概念：

设有论域U、V，如果有一对应关系，使得对任意$u\in U$，

有唯一的一个$v\in V$与之对应，我们就说，其对应关系 f是一个由U到V的**映射**，写成

$$\begin{aligned} f:\ U &\longrightarrow V \\ u &\longrightarrow f(u) \end{aligned} \tag{1.2}$$

此时U叫作f的定义域，而集合 $f(U)=\{f(u)|u\in U\}$ 称为f的值域。记号"$\longrightarrow$"表示"对应于"。

若U、V为实数域R时，这时映射称为**函数**。可见，映射为函数概念的推广。

定义1 对于论域U上的任一经典集合 A，U中每一元素u与集合A的关系可由

$$C_A(u)=\begin{cases}1 & \text{当}u\in A\text{时}\\ 0 & \text{当}u\notin A\text{时}\end{cases} \tag{1.3}$$

确定，称C_A为集合A的**特征函数**，它的图象如图 1.1 所示。其特征函数值$C_A(u)$通常称作元素u对集合A的**隶属度**。如，当$u\in A$时，$C_A(u)=1$，表明u完全属于A；当$u\notin A$时，$C_A(u)=0$，表明u完全不属于A，即属于A的程度（隶属度）为0。由此可见，经典集合论是二值逻辑。

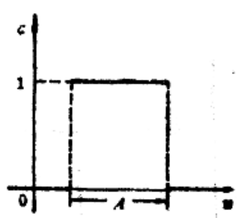

图1.1

集合的关系和运算可用特征函数表示。

对于两个集合的包含和相等，有

$$A \supseteq B \Longleftrightarrow C_A(u) \geq C_B(u)$$
$$A = B \Longleftrightarrow C_A(u) = C_B(u) \tag{1.4}$$

对于A与B的并集$A \cup B$、交集$A \cap B$及A的余集A^c，它们的特征函数则分别有下列等式：

$$\left.\begin{aligned} C_{A\cup B}(u) &= C_A(u) \vee C_B(u) \\ C_{A\cap B}(u) &= C_A(u) \wedge C_B(u) \\ C_{A^c}(u) &= 1 - C_A(u) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

图象依次如图1.2所示。式中"$\vee$"表示取大运算，将"$\vee$"两端较大的数作为运算结果；相反地，"$\wedge$"则表示取小运算。

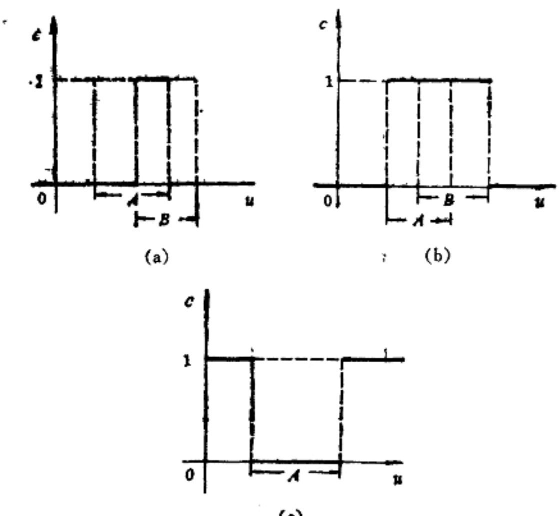

图1.2

集合运算具有下列性质：

(1) 幂等律：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$；

(2) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

(3) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(4) 吸收律：$(A \cup B) \cap A = A$，$(A \cap B) \cup A = A$；

(5) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

(6) 两极律：U与ϕ满足

$A \cap U = A$，$A \cup U = U$，$A \cap \phi = \phi$，$A \cup \phi = A$；

(7) 复原律：$(A^c)^c = A$；

(8) 补余律：$A \cup A^c = U$，$A \cap A^c = \phi$；

(9) 对偶律(De Morgan律)：

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

这些性质可直接从并、交、余的定义推出，也可以用特征函数证明。如对偶律的证明如下：

证法1 $u \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow u \notin (A \cup B)$

$\Leftrightarrow u \notin A$ 且 $u \notin B$

$\Leftrightarrow u \in A^c$ 且 $u \in B^c$

$\Leftrightarrow u \in A^c \cap B^c$

证法2 $C_{(A \cup B)^c}(u) = 1 - C_{A \cup B}(u)$

$= 1 - (C_A(u) \vee C_B(u))$

$= (1 - C_A(u)) \wedge (1 - C_B(u))$

$= C_{A^c}(u) \wedge C_{B^c}(u)$

$= C_{A^c \cap B^c}(u)$.

至此，说明集合完全可以由其特征函数表征。

§1.2 模糊集合及隶属函数

论域U上的经典集合A可由其特征函数C_A表征，$C_A(u)$指明u对A的隶属程度。不过，这时隶属度只取0和1两个值，因而只能表现“非此即彼”的确切概念。

没有明确外延的概念称作**模糊概念**。如，“青年人”是一个模糊概念，对一个特定的人来说，他是否属于“青年人”这个集合，有时是不能明确回答的，具有“亦此亦彼”的模糊性，故不能直接用经典集合来刻画。

为了表现“亦此亦彼”的模糊概念，美国控制论专家查德打破了隶属程度只取0和1的限制，提出模糊子集的概念。

定义2 设给定论域U，所谓确定了U上的一个**模糊子集** $\underset{\sim}{A}$，是指对任意$u\in U$，都有一个表示对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度的数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$与之对应，其中$0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\leqslant1$。

通常把$\mu_{\underset{\sim}{A}}$称为模糊集合$\underset{\sim}{A}$的**隶属函数**，而把$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$称为$u$对$\underset{\sim}{A}$的**隶属度**。

模糊子集还可以这样定义：

设给定论域U，映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}:\ U\longrightarrow[0,\ 1]$$

$$u\longrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

确定了U上的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$。

这样定义的模糊集合，就把经典集合的二值逻辑拓广成[0，1]区间上的连续值逻辑。

模糊子集完全由其隶属函数所刻画。当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 的值域是 $\{0,1\}$ 时，$\underset{\sim}{A}$就是经典集合，而$\mu_{\underset{\sim}{A}}$就是它的特征函数。因此，经典集合是特殊的模糊集合。

论域U上的模糊子集组成的集合称为**模糊集合类**。而模糊集合类的全体称为U的**模糊幂集**，记为$\mathscr{F}(U)$。

下面介绍模糊子集的具体表示方法。

（1）当论域U是连续的实数区间时，U上的模糊子集可以用普通的实函数表示。

例1 以人的年龄为论域$U=[0，100]$，查德给出“年老”$\underset{\sim}{O}$与“年轻”$\underset{\sim}{Y}$两个模糊子集，它们的隶属函数分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<u\leqslant 100\end{cases}$$

图1.3给出“年老”与“年轻”的隶属函数的图象。对“年老”

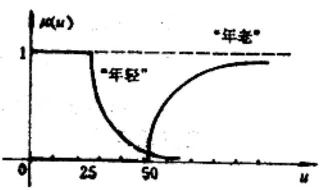

图1.3

$\underset{\sim}{O}$来说 $\mu_{\underset{\sim}{O}}(60)=0.8$，$\mu_{\underset{\sim}{O}}(80)=0.97$，而对“年轻”$\underset{\sim}{Y}$，

$\underset{\sim}{\mu_y}(60)=0.02$，$\underset{\sim}{\mu_y}(80)=0.008$。

(2) 当U为有限论域时，模糊子集可用列表法表示，举例说明如下：

例2 设$U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$（如图1.4），其中的元素可视为虫卵、细胞、血球等，它们的圆度对于类型的形

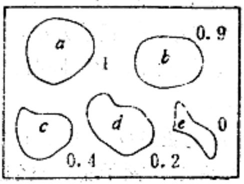

图1.4

态鉴别起着重要的作用。模糊概念"圆块块"α的外延是U上的一个模糊子集A。它的隶属函数可列表确定，即对每一元素指定一个隶属度，如下表：

元　素	a	b	c	d	e
隶属度	1	0.9	0.4	0.2	0

若采用查德的台式表示法，可记为

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.4/c+0.2/d+0/e$$

上式右端无分式求和之意，分母位置上放置的是论域U的元素，分子位置上放置的是相应元素对于A的隶属度，有时隶属度为零的项可以省略不写。

当将U中元素排定顺序后，还可将$\underset{\sim}{A}$写成模糊向量

$$\underset{\sim}{A}=(1,\ 0.9,\ 0.4,\ 0.2,\ 0)$$