基本電磁學題解

D. T. Paris and F. K. Hurd

黃而樂　編譯

基本電磁學題解

D. T. Paris and F. K. Hurd

黃而樂　編譯

基本電磁學題解

中華民國七十二年十月初版發行

平裝特價 112 元

著作者： D. T. Paris and F. K. Hurd

編譯者： 黃　而　樂

發行者： 吳　主　和

發行所： 復　文　書　局

地址：臺南市東門路421巷28號

門市部地址：台南市林森路二段63號

電話:(062)370003・386937

郵政劃撥帳戶32104號

No.28. LANE421 DONG-MEN ROAD TAINA TAIWAN REPUBLIC OF CHINA

TEL：(062)370003・386937

行政院新聞局登記證局版台業字第0370號

基本電磁學題解

目 録

第一章　向量分析

1－1　向量之加法點及義乘積

已知二向量場 **A** 和 **B** 爲：

$\mathbf{A} = x\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y + 3t\,\mathbf{a}_z$

$\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y + zt\,\mathbf{a}_z$

(a)　求 **A** 和 **B** 於 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$t=4$

(b)　求 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 於 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$t=0$

(c)　求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(d)　求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 於 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$t=1$

(e)　求於 $z=3$ 平面上所有點之 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(f)　利用(e)部之結果重做(d)部

(g)　求 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

(h)　求 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 於 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$t=1$

(i)　求於 $y=2$ 平面上所有點之 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

解：(a)　將各已知值代入，得

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 4\,\mathbf{a}_y + 12\,\mathbf{a}_z$

$\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 12\,\mathbf{a}_z$

(b)　將 x，y，y，t 之已知值代入，得

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 4\,\mathbf{a}_y$

$\mathbf{B} = 2\,\mathbf{a}_x + 4\,\mathbf{a}_y$

所以　$\mathbf{A}+\mathbf{B} = 3\,\mathbf{a}_x + 8\,\mathbf{a}_y$

：若先求 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$，然後再將 x，y，z，t 之值代入，則可得同一答案。

(c)　顯然的 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = xy + y^4 + 3zt^2$

(d)　於 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$t=1$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=2+16+9=27$

(e) 因 $y=z$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=xy+y^4+9t^2$

(f) 令 $x=1$，$y=2$，$t=1$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=27$

(g)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ x & y^2 & 3t\\ y & y^2 & zt\end{vmatrix}=(y^2zt-3y^2t)\mathbf{a}_x+(3ty-xzt)\mathbf{a}_y+(xy^2-y^3)\mathbf{a}_z$$

(h) 於 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$t=1$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=3\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=3\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$

(i) 因 $y=2$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(4zt-12t)\mathbf{a}_x+(6t-xzt)\mathbf{a}_y+(4x-8)\mathbf{a}_z$

1－2 向量之加法，點及 $\times$ 乘積。

已知：$\mathbf{A}=3\mathbf{a}_x+x\mathbf{a}_y+y\mathbf{a}_z$

$\mathbf{B}=x^2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y$

$\mathbf{C}=y\mathbf{a}_x+x\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$

(a) 求 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ 於 $x=2$，$y=3$ 處之值。

(b) 求 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$，$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$，$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$，$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$，$(\mathbf{B}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}$，$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})$。

你能否解釋這些三乘積之幾何意義嗎？

(c) 求 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

解：(a) $\mathbf{B}+\mathbf{C}=(x^2+y)\mathbf{a}_x+(4+x)\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$

所以於 $x=2$，$y=3$

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=3(x^2+y)+x(4+x)+4y=45$

(b) 先求 $\times$ 乘積

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ x^2 & 4 & 0\\ y & x & 4\end{vmatrix}=16\mathbf{a}_x-4x^2\mathbf{a}_y+(x^3-4y)\mathbf{a}_z$$

則三重積

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=48-4x^3+y(x^3-4y)$

同理，得

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=-4y^2+x^3(y-4)+48$$

$$\mathbf{C}\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ y & x & 4\\ 3 & x & y\end{vmatrix}=x(y-4)\mathbf{a}_x+(12-y^2)\mathbf{a}_y+x(y-3)\mathbf{a}_z$$

$\therefore$ $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=x^3(y-4)+4(12-y^2)$

由點積之變換特性和方程（１－５），可得：

$$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=-x^3(y-4)-4(12-y^2)$$

$$(\mathbf{B}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}=4y^2-x^3(y-4)-48$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})=-48+4x^3-y(x^3-4y)$$

各三乘積均表示一平行六面體之體積。

(c)　因為$\mathbf{B}+\mathbf{C}=(x^2+y)\mathbf{a}_x+(4+x)\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$

由此可得

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 3 & x & y\\ x^2+y & 4+x & 4\end{vmatrix}=(4x-4y-xy)\mathbf{a}_x+(x^2y+y^2-12)\mathbf{a}_y+(12+3x-x^3-xy)\mathbf{a}_z$$

1－3　向量之加法，點及叉乘積。

利用（１－１）式，和（１－４）式，求$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

若已知

(a)　$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$

(b)　$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB$

解：(a)　設$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$均不等於零。

滿足$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$之條件只有在$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$之夾角為$90^\circ$時成立，則

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\sin 90^\circ\mathbf{n}=AB\mathbf{n}$

此單位向量$\mathbf{n}$為未定義者。

(b)　於此情形下，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$之夾角為零。

所以　$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\sin 0^\circ\,\mathbf{n}=0$

1－4　坐標變換。

(a)　圓柱座標系表示問題（１－１）之向量$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$。

(b)　求$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$於$r=\sqrt{5}$，$\varphi=\tan^{-1}2$，$z=3$之點。在時間$t=4$時，

比較此題與（１－１）(a)題之結果。

解：(a) 利用坐標轉換

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z$

由（1—8）式，和坐標轉換之（1—10）式，可得：

$$A_r = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi = x\cos\varphi + y^2\sin\varphi = r\cos^2\varphi + r^2\sin^3\varphi$$

$$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi = -x\sin\varphi + y^2\cos\varphi = -r\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$A_z = 3t$$

所以，於圓柱坐標系：

$$\mathbf{A} = r(\cos^2\varphi + r\sin^3\varphi)\mathbf{a}_r + r\sin\varphi\cos\varphi(r\sin\varphi - 1)\mathbf{a}_\varphi + 3t\mathbf{a}_z$$

同理可得：

$$\mathbf{B} = r\sin\varphi(\cos\varphi + r\sin^2\varphi)\mathbf{a}_r + r\sin^2\varphi(r\cos\varphi - 1)\mathbf{a}_\varphi + zt\mathbf{a}_z$$

(b) 由 r，φ，z，t 之已知值，直接代入可得：

$$\mathbf{A} = \frac{9}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_r + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_\varphi + 12\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{10}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_r + 12\mathbf{a}_z$$

此二向量與（1－1）(a)題之向量同樣正確， 因他們於相同時間和相同空間之點處爲定值。

1－5 點乘積

利用習題（1－4）之結果。

(a) 在圓柱坐標系中表示 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(b) 計算習題（1－d）中該點之結果

解：(a) 在圓柱坐標系中，我們得

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = r^2\sin\varphi(\cos^2\varphi + r\sin^3\varphi)(\cos\varphi + r\sin^2\varphi) + r^2\sin^3\varphi\cos\varphi(r\sin\varphi - 1)(r\cos\varphi - 1) + 3zt^2$$

化簡之得：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^4\sin^4\varphi + 3zt^2$$

(b) 點 $x=1$，$y=2$，$z=3$，在圓柱坐標系中是於 $r=\sqrt{5}$，φ

$= \tan^{-1} 2$，$z = 3$。並且 $t = 1$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 25\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 + 3(3)(1)^2$$

$$= 27$$

1－6　叉乘積

利用習題（1－4）之結果。

(a)　在圓柱坐標系中表示 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

(b)　計算習題 1－1 h 中該點之 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

解：(a)　利用　乘積的求法，得

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ r(\cos^2\varphi + r\sin^3\varphi) & r\sin\varphi\cos\varphi(r\sin\varphi - 1) & 3t \\ r\sin\varphi(\cos\varphi + \sin^2\varphi) & r\sin^2\varphi(r\cos\varphi - 1) & zt \end{vmatrix}$$

展開：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} = &[(z-3)tr^2\sin^2\varphi\cos\varphi - tr\sin\varphi(z\cos\varphi \\ &-3\sin\varphi)]\mathbf{a}_r + [(3-z)tr^2\sin^3\varphi \\ &+ tr\cos\varphi(3\sin\varphi - z\cos\varphi)]\mathbf{a}_\varphi \\ &+ r^3\sin^2\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

(b)　於點 $r=\sqrt{5}$，$\varphi = \tan^{-1}2$，$z=3$ 和 $t=1$ 處

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \frac{6}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_r + \frac{3}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_\varphi - 4\,\mathbf{a}_z$$

1－7　坐標變換

已知 $\mathbf{A} = \cos\varphi\,\mathbf{a}_r + \sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi + r\,\mathbf{a}_z$

$\mathbf{B} = r\,\mathbf{a}_r + \varphi\,\mathbf{a}_\varphi + 2\,\mathbf{a}_z$

其中 φ 以弳度表示，圓柱座標系之原點與 xyz 座標系之原點重合，x 軸與 $\varphi = 0$ 之軸重合，求在點 $x=2$，$y=3$ 處之 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$。

解：於點 $x=2$，$y=3$ 處

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{13} \qquad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{3}{2} = 56.3^\circ = 0.982\ \text{rad}$$

所以

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=r\cos\varphi+\varphi\sin\varphi+2r=\sqrt{13}\,\frac{2}{\sqrt{13}}+0.982\,\frac{3}{\sqrt{13}}+2\sqrt{13}$$

$$=10.03$$

1－8 坐標變換

將向量 $\mathbf{A}=z\cos\varphi\,\mathbf{a}_r+r^2\sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi+16r\,\mathbf{a}_z$

以直角坐標表示。

解：利用

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

和（1—11）式向量三分量轉換，可得

$$\mathbf{A}_x=\mathbf{A}_r\cos\varphi-\mathbf{A}_\varphi\sin\varphi=z\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi=\frac{zx^2}{x^2+y^2}-y^2$$

$$\mathbf{A}_y=\mathbf{A}_r\sin\varphi+\mathbf{A}_\varphi\cos\varphi=z\sin\varphi\cos\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=\frac{zxy}{x^2+y^2}+xy$$

$$\mathbf{A}_z=16r=16\sqrt{x^2+y^2}$$

所以，在直角座標中：

$$\mathbf{A}=\left[\frac{zx^2}{x^2+y^2}-y^2\right]\mathbf{a}_x+\left[\frac{xyz}{x^2+y^2}+xy\right]\mathbf{a}_y+16\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{a}_z$$

1－9 坐標變換

一向量在 xy 平面上，且由下式定義：

$$\mathbf{B}=x\,\mathbf{a}_x+y\,\mathbf{a}_y$$

(a) 在圓柱坐標系中，如何表示 $\mathbf{B}$？

(b) 在點 $x=3$，$y=4$ 處，求 $\mathbf{B}$ 之大小和方向。

解：(a) 由（1—8）之坐標轉換式

$$x=r\cos\varphi\qquad\qquad y=r\sin\varphi$$

和（1—10）之向量轉換式可得：

$$B_r=B_x\cos\varphi+B_y\sin\varphi=x\cos\varphi+y\sin\varphi=r\cos^2\varphi$$
$$+r\sin^2\varphi=r$$

$$B_\varphi = -B_x \sin\varphi + B_y \cos\varphi = -x\sin\varphi + y\cos\varphi = -$$
$$= -r\sin\varphi\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$B_z = 0$

所以在圓柱坐標中　$\mathbf{B} = r\,\mathbf{a}_r$

(b)　於點 $x=3$，$y=4$ 其半徑距離爲　$r=\sqrt{x^2+y^2}=5$

所以　$\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_r$

1－10　坐標變換

導出向量分量之球面坐標系與直角坐標系之轉換式。

解：此問題有多個方法推導，其一是將單位向量 $\mathbf{a}_x$，$\mathbf{a}_y$，$\mathbf{a}_z$ 沿單位向量 $\mathbf{a}_r$，$\mathbf{a}_\theta$，$\mathbf{a}_\varphi$ 之方向投影，而利用此一投影乘一常數而導出向量分量之轉換式。

由圖（1—2 c）可清楚的看出 $\mathbf{a}_x$，$\mathbf{a}_y$，$\mathbf{a}_z$ 沿 $\mathbf{a}_r$ 方向之投影爲：

$\cos\varphi\sin\theta$　　　$\sin\varphi\sin\theta$　　　$\cos\theta$

所以已知向量　$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$

其半徑分量

$$A_r = A_x\cos\varphi\sin\theta + A_y\sin\varphi\sin\theta + A_z\cos\theta$$

同理，可求得 $\mathbf{a}_x$，$\mathbf{a}_y$，$\mathbf{a}_z$ 沿 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 方向之投影爲：

$\cos\varphi\cos\theta$　　　$\sin\varphi\cos\theta$　　　$-\sin\theta$

$-\sin\varphi$　　　$\cos\varphi$　　　0

因此　$A_\theta = A_x\cos\varphi\cos\theta + A_y\sin\varphi\cos\theta - A_z\sin\theta$

$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$

由直角坐標系轉換至球面坐之全部公式記在原書（1—13）式中。在求反轉換式時，我們簡單的解（1—13）式的聯立方程式，以求 A_x，A_y，A_z。很明顯的，其行列式爲：

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

展開此三階行列式，可得

$$-\sin\varphi\begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} - \cos\varphi\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$A_z=\begin{vmatrix} A_r & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ A_\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ A_\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$=A_r\sin\theta\cos\varphi+A_\theta\cos\theta\cos\varphi-A_\varphi\sin\varphi$$

同樣的結果可由 $\mathbf{a}_r$，$\mathbf{a}_\theta$，$\mathbf{a}_\varphi$ 沿 $\mathbf{a}_z$ 之投影而得。

A_y 和 A_z 之表示式均寫在原書（1—14）式中。

1—11 向量與解析幾何

已知 A、D 二向量

$$\mathbf{A}=3\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z$$

求此二向量之夾角。

解：此二向量之表度為

$$A=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}$$

$$D=\sqrt{1^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}$$

由（1—1）式，可得

$$\theta=\cos^{-1}\frac{(3)(1)+(4)(2)+(5)(6)}{\sqrt{50}\ \sqrt{41}}=\cos^{-1}0.905=25.1^\circ$$

1—12 向量與解析幾何

已知向量 $\mathbf{B}=\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z$

另一向量 $\mathbf{A}$ 其大小為 $\sqrt{3}$，其 x 分量為 1 。$\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 互相垂直，求向量 $\mathbf{A}$。

解：設 $\mathbf{A}=a\mathbf{a}_x+b\mathbf{a}_y+c\mathbf{a}_z$

因已知 $a=1$ 和 $|A|=\sqrt{3}$

所以 $b^2+c^2=2$

若 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 至相垂直，則 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$

因此 $1+2b+3c=0$

聯解此二方程，得：

$$b=1,\ -\frac{17}{13}\qquad c=-1,\ \frac{17}{13}$$

所以 $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$

或　$\mathbf{A}=\mathbf{a}_x-\dfrac{17}{13}\mathbf{a}_y+\dfrac{7}{13}\mathbf{a}_z$

1－13 向量與解析幾何

已知向量　$\mathbf{A}=r\,\mathbf{a}_r+r\,\mathbf{a}_\varphi$

(a) 以數學或文字描述當A之大小爲定値，其在xy平面（或$r\varphi$平面）上諸點之軌跡。

(b) 當$\mathbf{A}$與x軸之夾角爲45°和A之大小爲$\sqrt{2}$，求出$\mathbf{A}$在xy平面上之諸點。

解：(a) 顯然的，當r＝常數，其軌跡爲一圓，而圓心在原點。A軌跡中的每一點之大小爲一常數且等於$r\sqrt{2}$。

(b) 當$r=1$，則$A=\sqrt{2}$。因向量$\mathbf{A}$與$\mathbf{a}_r$和$\mathbf{a}_\varphi$成45°角，所以不論xy平面上所求得之點必與x軸成45°。若將向量A於直角坐標重做時，則可更清楚，即：

$\mathbf{A}=(x+y)\mathbf{a}_x+(x+y)\mathbf{a}_y$

此向量與x軸成45°角，故

$$\frac{x+y}{x-y}=\pm 1$$

此方程之解是$x=0$或$y=0$所以其解答爲

(1，0，0)，(0，1，0)，(−1，0，0)，(0，−1，0)．

1－14 向量與解析幾何

一向量場定義　　$\mathbf{A}=ax\mathbf{a}_x+by\mathbf{a}_y$ 其中a，b均爲常數。

(a) 在常數值z平面上，A之大小爲一定時，則所示諸線的圖形爲何？

(b) 當a，b相等，在常數值z平面上A之大小爲一定時，諸線的圖形爲何？

解：(a) 因$\mathbf{A}$之大小爲$\sqrt{(ax)^2+(by)^2}$，而由$|A|$上諸點到焦點的距離爲一常數時，此爲一橢圓族，其方程如下：

$$a^2x^2+b^2y^2=\text{常數}$$

(b) 其圖形爲一圓，因爲$a=b$，所以上式變成：

$$x^2+y^2=\text{常數}$$

1-15 向量與解析幾何

考慮下列三向量：

$$\mathbf{A}=5\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B}=B_x\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+B_z\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{C}=3\mathbf{a}_x+C_y\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$$

求使**A**，**B**，**C**三向量成正比之B_x，B_z，C_y之值。

解：在一空間成正交，需要

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=0$$

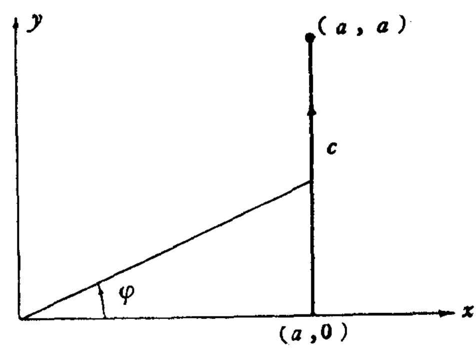
由此可得三個線性代數方程式如下：

$$5B_x+4+3B_z=0$$
$$3B_x+2C_y+B_z=0$$
$$15+2C_y+3=0$$

由第三方程式，可得$C_y=-9$其後，解第一，二方程式，得

$$B_x=\frac{29}{2}\qquad B_z=\frac{-51}{2}$$

1-16 線積分



解：利用（1－16）式，並使$y_1=0$，$y_2=a$。我們將此轉換至直角坐標和使$x=a$。

$$\int_c\frac{\cos\varphi}{r}\,dy=\int_0^a\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_0^a\frac{a}{a^2+y^2}\,dy=\left[\tan^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a=\frac{\pi}{4}$$

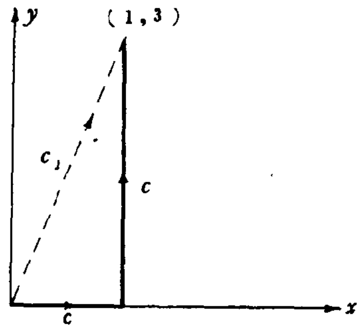
1-17 線積分

計算線積分

$$\int_c [(x^2+2y)dx+(x-5y^2)dy]$$

(a) 沿路徑 C。

(b) 沿路徑 C_1 即聯接（0，0）至（1，3）點之直線。



解：(a) 我們分路徑 C 爲兩段，其一是由（0，0）點至（1，0）點，其二是由（1，0）點至（1，3）點。沿第一段，因 y 之值不變化，故對 y 之積分爲零，沿第二段於 $x=1$ 處，因 x 之值不變化，故對 x 之積分等於零。因此：

$$\int_c [(x^2+2y)dx+(x-5y^2)dy]=\int_0^1 x^2 dx + \int_0^3 (1-5y^2)dy = -\frac{125}{3}$$

(b) 沿路徑 C_1，因其方程爲 $y=3x$ 所以：

$$\int_c [(x^2+2y)dx+(x-5y^2)dy]=\int_0^1 (x^2+6x)dx + \int_0^3 (\frac{y}{3}-5y^2)dy = -\frac{241}{6}$$

1-18 線積分

若向量 $\mathbf{A}=2x^2y\mathbf{a}_x+(y+z)\mathbf{a}_z$

且路徑 C_1 是與問題（1—17）的相同，計算 $\int_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

解：利用（1—24）式，因 $A_y=0$，所以（1—24）式之第二項爲零，而第三項之積分因其上下限相同，故亦爲零。如此，如習題（1—17b）沿路徑 C_1，$y=3x$ 積分，可得：

$$\int_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{e}=\int_{x_1}^{x_2}A_x\,dx=\int_0^1 2x^2(3x)dx=\frac{3}{2}$$

1-19 線積分

計算問題（1—18）中之線積分，此時之路徑係沿著第一象限之拋物線 $y=4-x^2$，路徑之始點爲（0；4）。

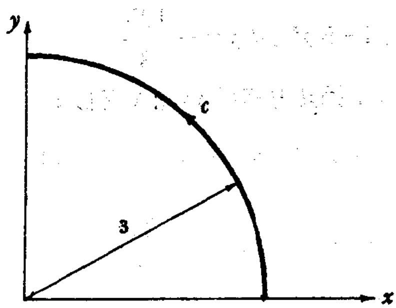
解：重覆問題（1—18）之步驟，可得：

$$\int_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\int_0^2 2x^2(4-x^2)dx=\frac{128}{15}$$

1-20 線積分

如圖所示計算

$$\int_C(\sin\varphi\mathbf{a}_r+r\cos\varphi\,\mathbf{a}_\varphi+\tan\varphi\mathbf{a}_z)\cdot d\mathbf{l}$$



解：利用（1—25）式，其第一和第三項之積分為零，因其上下限相同，故得：

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(r\cos\varphi)\,r\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}9\cos\varphi\,d\varphi=9$$

1—21 線積分

已知向量點函數：

$\mathbf{A}=3(x^2+x)\mathbf{a}_x+2yx\mathbf{a}_y+4z\mathbf{a}_z$

而路徑 C 是由下列三直線組成。

第一段：由（0，0，0）至（1，0，0）。

第二段：由（1，0，0）至（1，2，1）。

第三段：由（1，2，1）至（0，0，1）。

計算 $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

解：由路徑 C 之定義關係

第一段：$y=z=0$

第二段：$x=1\quad y=2z$

第三段：$y=2z\quad z=1$

各段之線積分值為：

在第一段：$\int_0^1 3(x^2+x)\,dx=\dfrac{5}{2}$

在第二段：$\int_0^2 2yx\,dy+\int_0^1 4z\,dz=\int_0^2 2y\,dy+\int_0^1 4z\,dz=6$

在第三段：

$$\int_1^0 3(x^2+x)\,dx+\int_2^0 2yx\,dy=\int_1^0 3(x^2+x)\,dx+\int_2^0 y^2\,dy=-\frac{31}{6}$$

所以三段的代數和為：

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\frac{10}{3}$$

1—22 線積分

計算向量 $\mathbf{A}=y\mathbf{a}_x-x\mathbf{a}_y$ 圍繞 xy 平面上封閉路徑之線積分，自