工程数学

# 数学物理方程与特殊函数

杨时中 编

陕西科学技术出版社

工 程 数 学
数学物理方程与特殊函数
杨 时 中 编
陕西科学技术出版社出版
(西安北大街131号)
陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 6.5印张 135千字
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷
印数：1—5,000
统一书号：7202·108 定价：1.40元

# 前　言

本书根据高等工科院校《工程数学教学大纲》中“数理方程与特殊函数”部分的要求编写而成。全书教学时数大约在26—32学时。

全书内容由“数理方程”和“特殊函数”两部分组成，“数理方程”部分以方程类型为顺序，着重讲述定解问题的求法，其中包括分离变量法、达朗贝尔法、格林函数法，重点放在分离变量法上；“特殊函数”部分主要讲了贝塞尔函数和勒让德函数，对它们的一些重要性质以及在解数理方程中的某些定解问题时的应用，都作了较详细的叙述；第四章特殊常微分方程的导出把“数理方程”与“特殊函数”两部分内容联系在一起，使全书成为有机的整体。

本书由西北大学刘书琴教授和陕西机械学院唐润生副教授审稿，在编写过程中得到李华、李选民、李帮鑫等同志的帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1985.12于西安工业学院

# 目　　录

# 引　言

数学物理方程是由物理学、力学、工程技术等实际问题产生的。它的主要研究对象乃是经过理想化的物理现象之间的联系，即研究某个物理规律已知的过程，系统的边界处于一定的已知物理条件下，系统的初始状态是已知的，求解其后的发展情况。

数学物理方程中，通常遇到的是二阶线性偏微分方程，特别是下面几种形式：

1）
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

（波动方程）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f\ (x,y,z,t)$$

2）
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

（热传导方程）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f\ (x,y,z,t)$$

3）
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad u=u(x,y,z)$$

（拉普拉斯方程）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad u=u(x,y)$$

为了今后讨论问题方便，下面介绍数理方程的基本概念。

1　定义

1）凡是含有多元未知函数偏导数的关系式，称为偏微分方程。

2）方程中最高阶导数的阶数，称为偏微分方程的阶。

3）如果一个偏微分方程对于所有未知函数及其各阶导数来说都是一次的，称为线性偏微分方程。

4）在方程中，不含有未知函数及其偏导数的项，称为自由项。当自由项为零时，方程称为齐次的。否则，称为非齐次的。

5）如果将多元函数$u$及其各阶导数代入方程后，得到恒等式，则称函数$u$为偏微分方程的解。

例　$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

可将上面方程写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

从而　$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_1(y)$$

这里$\varphi_1(y)$是$y$的任意函数。上式两端对$y$积分便得

$$u = \int \varphi_1(y) dy + \psi(x) = \varphi(y) + \psi(x)$$

其中$\varphi(y)$和$\psi(x)$分别是$y$和$x$的任意函数。可见，二阶偏微分方程的解含有两个任意函数。

## 2 定解问题

仅有这些方程还不能确定物体的运动，因为外界的作用常常是通过物体的边界传入内部去的，所以物体的运动不仅取决于方程，而且还与初始状态以及通过边界所受的外界作用有关。

从数学角度来看，偏微分方程的解含有任意函数和任意常数，所以，一个偏微分方程的解有无穷多个，只有方程不能得到确定的解。对于某个具体问题，初始状态和边界情况则是确定这些任意函数和任意常数的依据。因此，我们把函数$u$在区域$T$的边界之上所满足的条件称为边界条件；函数$u$在区域$T$内各点于初始状态的值称为初始条件。

比如弦振动的初始条件：

初始位移：$u(x,\ t)|_{t=0}=u(x,\ 0)=\varphi(x)$

初始速度：$u_t(x,\ t)|_{t=0}=u_t(x,\ 0)=\psi(x)$

有界弦振动两端固定的边界条件：

$$u(x,\ t)|_{x=0}=u(0,\ t)=0$$

$$u(x,\ t)|_{x=l}=u(l,\ t)=0$$

我们把初始条件和边界条件等这种决定方程解所必须的条件称为定解条件，定解条件要恰好说明物体的初始状态和边界上的物理状况，即定解条件不能提的过多或过少。由方程与定解条件所构成的数学问题，称为定解问题。

在定解问题中，有的定解条件只有初始条件的，称为初值问题（柯西问题），有的定解条件，既有初始条件，又有边界条件，这样的定解问题，称为混合问题。

比如定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

就是初值问题(柯西问题)。

定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 \end{cases}$$

就是混合问题。

3　解的适定性

研究任何一个定解问题，我们总是要问，这个定解问题的解是否存在?这就是解的存在性问题。这个定解问题的解是否只有一个?这就是解的唯一性问题。当定解条件作很小的变化时，定解问题的解是否也作很小的变化?这就是解的稳定性问题。如果一个定解问题的解是存在的，唯一的，稳定的，则我们称这个定解问题的解是适定的。

本书对解的适定性就不去讨论了，重点放在定解问题的求解方法上。

# 第一章 波动方程

凡是声学、电学、光学、弹性力学中的振动问题，推导出来的方程都是波动方程。

## §1.1 均匀弦横向振动方程的导出

设有一根可以自由弯曲的均匀的弦，它受一不随时间、地点而变化的张力$T$的作用($T$为常数)，在平衡状态下，没有沿$ox$轴方向的外力。当弦从平衡位置受了随意外力的作用，弦就开始振动。我们只考虑横振动，即位移矢量$u$在任何时候垂直$ox$轴，于是振动情况就由表示弦的垂直位移的一个函数$u(x,t)$表描述。下面我们建立弦的横振动方程。

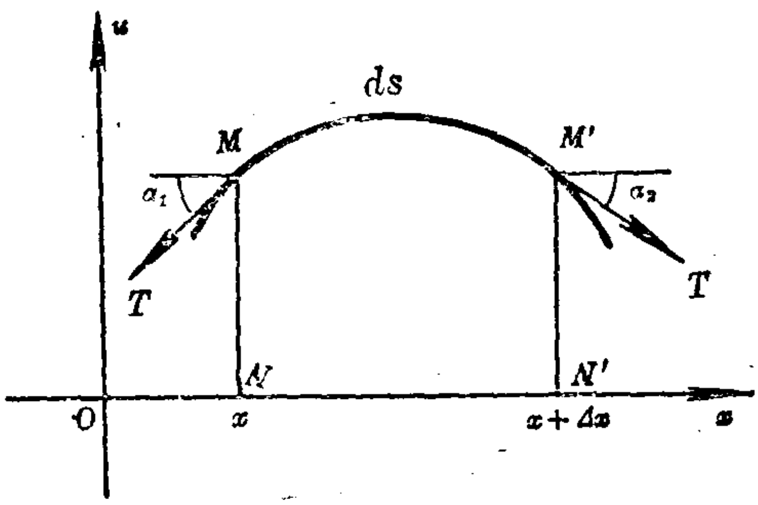


图1—1

由于弦是可以自由弯曲的，因此，发生于弦中的张力$T$的方向总是沿着弦的切线方向。任取弦上的某一单元$\widehat{MM'}$，

平衡时，它的位置为$NN'$。假定振动是微小的，所以位移$u$，就认为很小。于是有：

$$ds=\widehat{MM'}=\sqrt{(dx)^2+(du)^2}$$
$$=\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}dx$$
$$=dx=NN'$$

这里，我们略去$\frac{du}{dx}$的平方项，即可以认为弦在振动时，没有伸长或缩短。

由于弦是均匀的，所以质量$m=\rho ds$（$\rho$为常数），根据牛顿运动的规律可得：

$$-T\sin\alpha_1+T\sin\alpha_2=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}ds \qquad (1)$$

其中$\alpha_1$，$\alpha_2$是$M$，$M'$点处切线与$ox$轴的夹角。因为：

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\doteq\frac{\partial u}{\partial x}$$

所以$\sin\alpha_1=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M$， $\sin\alpha_2=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M'}$

代入（1）式得：

$$T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M'}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M\right]=\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot ds$$

或 $$T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right]=\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot dx$$

根据微分中值定理，当$\triangle x\to 0$时有：

$$T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\triangle x=\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\triangle x$$

即 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

其中$a^2=\frac{T}{\rho}$，这就是一维弦的自由振动方程。

当弦上还受有外力的作用，并且假定这个外力是随时间、地点而变的。则可设$F(x, t)$为单位长度上的外力，此时（1）式应为：

$$-T\sin\alpha_1+T\sin\alpha_2+F(x, t)\triangle s$$
$$=\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\triangle s$$

因而有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t) \tag{3}$$

其中 $a^2=\frac{T}{\rho}$，$f(x, t)=\frac{F(x, t)}{\rho}$

这就是一维弦的强迫振动方程。

现在我们已知初始条件：

$$u(x, 0)=\varphi(x),\qquad u_t(x, 0)=\psi(x)$$

假定弦的长度是有界的，记为$l$，且两个端点是固定的，即边界条件：

$$u(0, t)=0,\qquad u(l, t)=0$$

这样，我们得到下列定解问题

1）有界弦的自由振动

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(0, t) = 0 \qquad u(l, t) = 0 \\
u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)
\end{cases}
$$

2）有界弦的强迫振动

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\
u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 \\
u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)
\end{cases}
$$

## §1.2 有界弦自由振动的分离变量法

分离变量法，又称富里叶法。此法是求解偏微分方程常用方法之一，我们在这里将对有界弦的自由振动问题的分离变量法作较详细的介绍，在其它问题中，再应用此法时，就只作一般的叙述。求解下列定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (1) \\
u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 & (2) \\
u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & (3)
\end{cases}
$$

分离变量法的主要思想是设想所求的函数$u(x, t)$是两个一元函数$X(x)$和$T(t)$的乘积，然后利用边界条件和初始条件定出$X(x)$和$T(t)$。所以分离变量法的第一步是设：

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad \text{（且不为零）} \qquad (4)$$

将（4）对$x$和$t$分别求偏导之后，代入方程（1）得：

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

两边同除以 $a^2X(x)T(t)$后得：

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

这个等式的左端只是$t$的函数，故其值与$x$无关，右端只是$x$的函数，故其值与$t$无关，这两个互不相干的函数要相等，就必须都是常数，我们记此常数为$-\lambda$，从而有

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \tag{5}$$

于是（5）式就化为两个常微分方程

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{7}$$

为了确定常数$\lambda$的正负号，利用边界条件（2）应有

$$u(0,\ t)=X(0)T(t)=0$$

$$u(l,\ t)=X(l)T(t)=0$$

因为$T(t)\neq 0$，否则（4）为零解，所以得$X(0)=0$ $X(l)=0$，也就是说方程（7）满足条件$X(0)=X(l)=0$的非零解，不是对于任何$\lambda$值都成立，为此分别讨论如下：

(i) $\lambda<0$ 方程（7）有通解

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由于条件 $X(0)=X(l)=0$，故得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0\end{cases}$$

解此方程组得：

$$C_1(e^{\sqrt{-\lambda}l}-e^{-\sqrt{-\lambda}l})=0$$

因为$(e^{\sqrt{-\lambda}l}-e^{-\sqrt{-\lambda}l})\neq 0$

所以 $C_1=C_2=0$

即 $X(x)=0$，从而$u(x,\ t)=0$（不合要求）。

(ii)$\lambda=0$，方程(7)有通解

$$X(x)=C_1x+C_2$$

由于条件$X(0)=X(l)=0$故得：

$$\begin{cases}C_2=0\\C_1l+C_2=0\end{cases}$$

因为 $l\neq 0$，所以$C_1=C_2=0$

即 $X(x)=0$，从而$u(x,\ t)=0$ （不合要求）。

(iii)$\lambda>0$，方程(7)有通解

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

由于条件 $X(0)=X(l)=0$故得：

$$\begin{cases}C_1=0\\C_1\cos\sqrt{\lambda}\,l+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0\end{cases}$$

解此方程组得：

$$C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$$

得 $\begin{cases}C_2=0\text{ 或}\\\sin\sqrt{\lambda}\,l=0\end{cases}$

当$C_2=0$时，得$X(x)=0$，从而$u(x,\ t)=0$，显然又不合要求。所以，只有$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$，由此得到：

$$\sqrt{\lambda}\,l=n\pi \qquad (n=1,\ 2\cdots\cdots)$$

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\text{或记}\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

这样，方程(7)的解为

$$X(x)=C_2\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n=1,\ 2\cdots\cdots)$$

或 $$X_n(x)=C_2\sin\frac{n\pi}{l}x$$

通常情况下，我们称

$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$为固有值或本征值。

$X(x)=C_2\sin\frac{n\pi}{l}x$为固有函数或本征函数。

分离变量法的第二步，是把固有值代入方程(6)得

$$T''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T(t)=0$$

$$(n=1,\ 2\cdots\cdots) \qquad (8)$$

方程(8)的通解

$$T_n(t)=A'_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B'_n\sin\frac{n\pi a}{l}t \qquad (9)$$

其中$A'_n$，$B'_n$为待定常数。此时由（4）得

$$u_n(x,\ t)=X_n(x)T_n(t)$$
$$=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$(10)$$

其中$A_n=C_2A'_n$，$B_n=C_2B'_n$

这是方程（1）满足边界条件（2）的特解。这样的特解有无穷多个。一般说来，（10）式特解中的任何一个不一定满足初始条件，因为当$t=0$时

$$u_n(x,\ 0)=A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0}=B_n\frac{n\pi a}{l}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

而初始条件的函数$\varphi(x)$，$\psi(x)$是任意给定的，因此，这些特解$u_n(x,\ t)$一般还不是问题的解。

分离变量法的第三步，是求出满足初始条件的解。由于方程（1）是线性齐次方程，它的各个解的和亦必为其解，因此把（10）式的解叠加起来，得到：

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,\ t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11}$$

（11）亦为方程（1）满足条件（2）的解，然后根据初始条件（3）来确定待定常数$A_n$和$B_n$，问题就得到了全部解决。由初始条件得：

$$\left.\begin{aligned}u(x,\ 0)=\varphi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\\u_t(x,\ 0)=\psi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由（12）式可见，若$\varphi(x)$，$\psi(x)$在$[0,l]$上满足迪里赫勒条件，利用奇延拓，便可展成富里叶正弦级数