中等专业学校教材

数 学

SHUXUE

第四册
（工程数学）

辽宁省中专数学教材编写组 编

辽宁科学技术出版社

主　编　　陶增骈
副主编　　张成卓　李大发、由震云
编　委　　（按姓氏笔画为序）
于殿生　方桂梅　王化久
马　骝　由震云　刘晓东
李大发　李玉臣　李挺雄
张成卓　孟繁杰　胡晋廷
陶增骈　敖勤章　崔润泉

中等专业学校教材
数　学
Shu Xue
第四册
（工程数学）
辽宁省中专数学教材编写组　编

辽宁科学技术出版社出版发行
（沈阳市南京街6段1里2号）
朝阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：12　字数：264,000
1989年8月第1版　　1989年8月第1次印刷

责任编辑：枫　岚　　责任校对：王　莉
封面设计：曹太文　　　　　　　东　戈

印数：1—9,563
ISBN 7-5381-0744-4/G·121　　定价：2.65元

前　言

本套教材是根据1983年教育部审定的四年制《中等专业学校数学教学大纲》的要求，根据中专数学教学内容要浅下来、在应用上要加强的原则，从辽宁省中专数学教学的实际出发，适当参考现行中专数学教材内容，在辽宁省教育委员会的指导下，组织辽宁省部分中等专业学校长期从事中专数学教学工作的副教授、高级讲师、讲师编写的。在编写内容上，注意了与初中数学知识的衔接，突出了基础知识、基本理论和基本应用。在推理论证方式的选择上，力求避繁就简、科学直观。

本套教材分基础数学（一、二、三册）和应用数学（四册）两部分。招收初中学生的学校使用1—4册，招收高中学生的学校使用3—4册。

本套教材除经典内容外，均由辽宁师范大学梁宗巨教授、贺贤孝副教授主审。辽宁师范大学谢光熹副教授、大连工业学校的林惠泉同志也参加了部分章节的审订工作。大连市部分中专学校的朱淑英、张慧云、杨兰佳、徐裕树等同志对部分内容也提出了宝贵意见。

本册为工科中专数学教材第四册（工程数学），包括线性代数、级数、拉氏变换、概率初步及数理统计等内容。参加本册教材编写的有甘金南（二十二章）、郑素梅（二十三章）、任春英（二十四章）、王再兴、刘静（二十五章）、

李玉臣（二十六章）等同志。大连市水产学校许晓媛同志也参加了部分章节的编写。本册书由辽河石油学校李玉臣同志、辽宁省医疗器械学刘静同志统稿。

由于时间仓促，水平所限，不当之处敬请读者批评指正。

辽宁省中专数学教材编写组

1989年1月

目　　录

第二十二章　行列式、矩阵与线性方程组

工程技术中，很多问题可以归结为解线性方程组的问题。行列式和矩阵是讨论和计算线性方程组的重要工具。本章将介绍行列式和矩阵的一些基本概念，并讨论线性方程组的解法。

§22—1　二、三阶行列式

一　二阶行列式

设二元线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

我们用加减消元法来解方程组（Ⅰ）

式（1）乘a_{22}减式（2）乘a_{12}消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \qquad (3)$$

式（2）乘a_{11}减式（1）乘a_{21}消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \qquad (4)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，则由式（3）和（4）得出方程组（Ⅰ）的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \qquad (5)$$

在公式（5）中，两个分母都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中$a_{11}$、$a_{21}$、$a_{12}$、$a_{22}$是方程组（Ⅰ）的未知数 x_1、x_2 的系数。为了便于记忆和讨论，把a_{11}、a_{21}、a_{12}、a_{22}按方程组（Ⅰ）中原来的位置排列成正方形，即

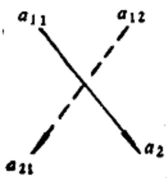


图　22—1（1）

可以看出$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是这样两项的和：一项是正方形中用实线表示的对角线（叫做主对角线）上两数的积，再添上正号；一项是虚线表示的对角线（叫做次对角线）上两数的积，再添上负号。通常在这四个数的两旁各加一竖线，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (22—1)$$

(22—1)式的左端称为**二阶行列式**，右端称为二阶行列式的**展开式**。$a_{ij}(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$ 称为行列式的**元素**，横排为**行**，纵排为**列**。

公式（5）中的两个分子也可用行列式来表示，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

用 D、D_1、D_2 分别表示上述各行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

其中 D 称为方程组（Ⅰ）的**系数行列式**，D_1 和 D_2 是以常数 b_1、b_2 分别替换行列式 D 中的第一列、第二列的元素所得到的两个二阶行列式。于是，当 $D\neq 0$ 时，线性方程组（Ⅰ）的解可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{22—2}$$

例1 计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -5\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha\end{vmatrix}$

解

（1）$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -5\end{vmatrix}=(-3)(-5)-6(-4)=39$

（2）$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha\end{vmatrix}=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$

$$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$= -\cos 2\alpha.$$

例 2 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -1, \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{9}{10}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{7}{10} \end{cases}$$

二 三阶行列式

我们仍用加减消元法解三元线性方程组

$$(\text{I}) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

先消去x_3：

式（1）乘a_{33}减式（3）乘a_{13}，得

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})x_2 = b_1a_{33} - a_{13}b_3 \qquad (4)$$

式（2）乘a_{13}减式（1）乘a_{23}，得

$$(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})x_1 + (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})x_2 = b_2a_{13} - b_1a_{23} \qquad (5)$$

式（3）乘a_{23}减式（2）乘a_{33}，得

$$(a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33})x_1+(a_{32}a_{23}-a_{22}a_{33})x_2$$
$$=b_3a_{23}-b_2a_{33} \qquad (6)$$

由（4）、（5）和（6）三式消去x_2，然后式（4）乘a_{22}加式（5）乘a_{32}加式（6）乘a_{12}，得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}$$
$$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}+b_2a_{32}a_{13}-b_1a_{32}a_{23}$$
$$+b_3a_{12}a_{23}-b_2a_{12}a_{33} \qquad (7)$$

若$D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}$
$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}\neq 0$，由（7）式，得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}+b_2a_{32}a_{13}-b_1a_{32}a_{23}$$
$$+b_3a_{12}a_{23}-b_2a_{12}a_{33}) \qquad (8)$$

同样，我们可以求得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}-a_{31}b_2a_{13}+a_{21}b_3a_{13}-a_{11}b_3a_{23}$$
$$+a_{31}b_1a_{23}-a_{21}b_1a_{33}) \qquad (9)$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3-a_{31}a_{22}b_1+a_{21}a_{32}b_1$$
$$-a_{11}a_{32}b_2+a_{31}a_{12}b_2-a_{21}a_{12}b_3) \qquad (10)$$

仿照二阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示

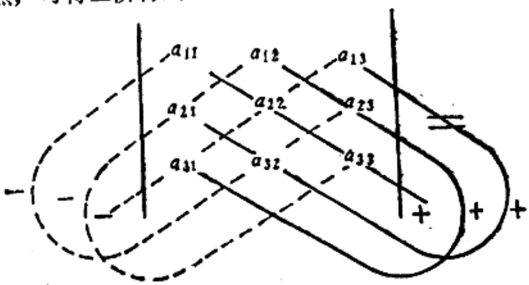
$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \qquad (22-3)$$

（22—3）式的左端称为**三阶行列式**，右端称为**三阶行列式的展开式**。它一共有六项，每项都是不同行不同列的三个元素的乘积，三个带有正号的项，三个带有负号的项。利用这一特点，可得三阶行列式的展开法如下：



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}。$$

图 22—1（2）

这就是说，实线上三个元素的积取正号，虚线上三个元素的积取负号，然后相加便是三阶行列式的展开式。这种展开法叫做**对角线展开法**。

注意：对角线展开法仅适用于二阶和三阶行列式。

有了三阶行列式，上面x_1、x_2、x_3的表达式中，分母都是

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而分子则分别是行列式D_1、D_2、D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中D_1、D_2、D_3是分别把D中第一、二、三列的元素换成常数项 b_1、b_2、b_3 所得的三个三阶行列式。于是，当 $D\neq0$ 时，线性方程组（Ⅰ）的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D} \qquad (22—4)$$

例 3 计算下列三阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

解 用对角线展开法计算

（1）
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= 2\times(-3)\times1+(-4)\times2 \\ &\quad \times1+1\times1\times(-1)-1\times(-3) \\ &\quad \times1-(-4)\times1\times1-2\times2 \\ &\quad \times(-1) \\ &= -6-8-1+3+4+4=-4\end{aligned}$$

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+0+0-0-0-0 = a_{11}a_{22}a_{33}$

主对角线一侧的元素都为零的行列式叫做三角行列式。由例3的（2）可知，三角行列式的值等于主对角线上元素之积。

例 4　用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-5y+3z=2, \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

故方程组的解为

$$x=-\frac{11}{8},\quad y=-\frac{9}{8},\quad z=-\frac{3}{4}$$

练　习

1. 口答下列行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$；（5）$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$；

（7）$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2．用对角线展开法计算下列各行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；（4）$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$，（6）$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

3．填空：

（1）设 $\begin{cases} 2x-\ \ y=3, \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 则$D=$____，$D_1=$____，$D_2=$____，$x=$____，$y=$____

（2）设 $\begin{cases} 2x-\ \ y=3, \\ 3x+2y+z=2, \\ x+\qquad\ z=2 \end{cases}$ 则 $D=$____，$D_1=$____，$D_2=$____，$D_3=$____，$x=$____，$y=$____，$z=$____

习题　22—1

1．求下列各行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & \lg e \\ \ln 10 & 1 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$；（4）$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x-1 \end{vmatrix}$

2．用行列式解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}4x+3y=5,\\3x+4y=6;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}60I_1-20I_2-120=0,\\-20I_1+80I_2+60=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x-3y=9k,\\4x-y=8k;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{1}{5}x_2=6,\\[2ex]\dfrac{1}{6}x_1-\dfrac{1}{2}x_2=-4\end{cases}$

3. 验证下列等式：

(1) $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\b & d\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}ka & kb\\c & d\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$；

$\begin{vmatrix}a+x & b+y\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y\\c & d\end{vmatrix}$

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix}3 & 4 & -5\\11 & 6 & -1\\2 & 3 & 6\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 3 & 2\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}4 & 2 & 3\\2 & 3 & 0\\3 & 0 & 0\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}a & b & 0\\c & 0 & b\\0 & a & a\end{vmatrix}$.

5. 用行列式解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}2x-y+3z=3,\\3x+y-5z=0,\\4x-y+z=3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=0,\\2x_1-x_2+4x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3=3,\\x_1-2x_2+x_3=0,\\3x_1+x_2+3x_3=7;\end{cases}$

$$（4）\begin{cases} ax_1+bx_2 \qquad\qquad =c, \\ \qquad\quad bx_2+cx_3=a,(abc\neq 0) \\ ax_1 \qquad\quad +cx_3=b \end{cases}$$

§22—2 三阶行列式的性质

将一个行列式D的行与列依次互换所得到的行列式称为行列式D的转置行列式，记为D'。即行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

以下介绍的三阶行列式的性质，均可用对角线展开法来证明。

性质1 行列式D与它的转置行列式D'的值相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由此可知，对行列式的行成立的性质对于列也一定成立；反过来也同样成立。

性质2 行列式的任意两行（列）互换，行列式仅改变符号，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$